富山大学教育学部研究論集　No. 2 ： 1 −11 (1999)

ベッセル関数 $J_n(x)$, $Y_n(x)$ とその導関数 $J'_n(x)$, $Y'_n(x)$ の零点

山下　正人

Zeros of Bessel Functions $J_n(x)$, $Y_n(x)$ and those of their Derivatives $J'_n(x)$, $Y'_n(x)$

Masato YAMASHITA

E-mail:myama@edu.toyama-u.ac.jp

Abstract

An algorithm for the numerical computation of the zeros of the Bessel functions $J_n(x)$, $Y_n(x)$ and those of their derivatives $J'_n(x)$, $Y'_n(x)$ is described. For $n=0$ the first four terms of the McMahon expansions and their Padé approximation are used as the initial values in the Newton-Raphson method. For all $n \geq 1$ the asymptotic expansions for large orders are used as the initial values for the first two zeros. The sum of the difference between the successive two zeros including the last zero and the last zero is valid as the initial values for the third or later zeros. The zeros of $Y_n(x)$ and $J'_n(x)$ for $n \geq 1$ are obtained by means of a higher order version of the Newton-Raphson method.

キーワード：ベッセル関数，零点，ニュートン・ラフソン法，マクマホン展開，パデ近似

Key words：Bessel functions, zeros, Newton-Raphson method, McMahon expansions, Padé approximation

1．はじめに

円筒形空洞共振器のE型モードや円形膜の固有振動数，円形導波管のTM波の伝搬定数，円柱材料の熱伝導率を求めるときに，第1種ベッセル関数 $J_n(x)$（nは任意の実数）の零点が必要になる。また円筒形空洞共振器のH型モードの固有振動数，円形導波管のTE波の伝搬定数，円柱材料中の任意の点の電位を求めるときに，その導関数 $J'_n(x)$ の零点が必要になる。$J_n(x)$ や $J'_n(x)$ の零点は，ある関数をベッセル関数で展開するときにも用いられる。

$J_n(x)$ や $J'_n(x)$ の零点（それぞれ $j_{n,s}$・$j'_{n,s}$ とする）は無数に存在する。ここで添え字sは零点を小さい方から並べたとき，その順番を表すパラメータである。Olverらはnとsの組み合わせに応じて数種類の計算方法を用い，$n \leq 20(1/2)$，$s \leq 50$に対する零点を示している［1］。Beattieは導波管内の電磁波の減衰定数と位相定数を求めるために補間法を用いて，$j_{n,s}$ については $j_{0,1}$ から $j_{45,1}$ までの338個，また $j'_{n,s}$ については $j'_{0,2}$ から $j'_{49,1}$ までの362個を求めている［2］。Temmeは $J_n(x)$ と $J'_n(x)$ のほかに，第2種ベッセル関数 $Y_n(x)$ とその導関数 $Y'_n(x)$ の零点（それぞれ，$y_{n,s}$・$y'_{n,s}$ とする）を計算するALGOLプログラムを与えている［3］。

ベッセル関数の零点を使う必要がある場合，我々には二つの選択肢がある。一つは，たとえば文献［1］に掲載されている零点をコンピュータのメモリーに貯蔵し，必要に応じてそこから読み出す方法である。もう一つは，必要になったときに零点を計算する方法である。第一の方法は長時間の単調な入力作業を強いられるし，また高精度の計算をするときに入力されている零点の個数が十分かどうかという問題が残る。第二の方法はプログラミングはまぬがれないが，上記のような問題は起こらない。

円柱材料の抵抗率は，四探針法によって測定することができる。すなわち円柱材料の側面に四本の金属針（探針）を立て，外側の二本の探針間に電流Iを流したとき，内側の二本の探針間の電位差Vを測定する。このとき抵抗率ρは

$$\rho = Fa\frac{V}{I} \tag{1}$$

から求められる。ここでaは円柱材料の半径で，Fは抵抗率補正係数（resistivity correction factor）とよばれる無次元の数値である［4］。補正係数Fを計算するときに$J'_n(x)$ の零点が必要になる。たとえば，半径$a=1$ cm，長さ$b=5$ cmの円柱材料の場合，$n=40$，$s=13$までの零点を使えば十分な精度の補正係数Fを求めることができる。しかし，$a=5$ cm，$b=15$cmの場合には，$n=204$までの零点が必要になる。このように材料の寸法によっては文献［1］に記載されていない零点を使用しなければならない場合が出てくる。

この論文では上記のような要請をふまえて，第1種ベッセル関数 $J_n(x)$ の導関数 $J'_n(x)$ 零点を求める方法について述

べる。$J_n(x)$ および第2種ベッセル関数 $Y_n(x)$ とその導関数 $Y_n'(x)$ の零点も同様にして求められるので，これらについても併記する。また付録に文献［1］の表を補う意味も含めて $J_n'(x)$ の零点 $j_{n,s}'$ を，$20 \leq n \leq 49$，$1 \leq s \leq 60$ の範囲で示す。

2．零点の計算方法

x の任意の関数 $f(x)$ の零点，すなわち

$$f(x)=0 \tag{2}$$

の根を求めるための方法はいろいろあるが，今回は関数の導関数が容易に求められる場合に有用なニュートン・ラフソン（Newton-Raphson）法を用いた。いま式(2)の根 x の近似値 x_m とすると，$x=x_m+h$ と書ける。ここで h は非常に小さい数とする。この x を式(2)に代入して得られる関数 $f(x_m+h)$ を x_m を中心とするテイラー級数に展開すると

$$f(x_m+h)=f(x_m)+hf'(x_m)+\frac{h^2}{2}f''(x_m)+\cdots=0 \tag{3}$$

となる。式(3)において h^2 以上の項を無視して，h について解くと

$$h=-\frac{f\ (x_m)}{f'\ (x_m)} \equiv h_1 \tag{4}$$

を得る。したがって，x_m よりも真の根に近い根 x_{m+1} は

$$x_{m+1}=x_m+h_1=x_m-\frac{f\ (x_m)}{f'\ (x_m)} \tag{5}$$

となる。式(5)を用いて根を求める方法は2位の速さで収束するので，この論文では以後この方法を2位のニュートン・ラフソン法とよぶことにする。また，式(3)において h^2 の項まで含めると

$$f(x_m)+h[f'(x_m)+\frac{h}{2}f''(x_m)]=0 \quad =0 \tag{6}$$

となる。そこで式(6)の［　］の中の h に式(4)の h_1 を代入した後，h について解くと

$$h=-\frac{f(x_m)}{f'(x_m)+(h_1/2)f''(x_m)} \equiv h_2 \tag{7}$$

となる。したがって，この場合 x_{m+1} は次のようになる。

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m+h_2 \\ &= x_m-\frac{2f(x_m)f'(x_m)}{2[f'(x_m)]^2-f(x_m)f''(x_m)} \end{aligned} \tag{8}$$

式(8)を用いて根を求める方法は3位の速さで収束するので，以後この方法を3位のニュートン・ラフソン法とよぶことにする。ところで関数 $f(x)$ が $J_n(x)$ の場合，その1次導関数は

$$f'(x)=J_n'(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x) \tag{9}$$

であるので，2位のニュートン・ラフソン法によって求められる根 x_{m+1} は式(5)より

$$x_{m+1}=x_m-\frac{J_n(x_m)}{(n/x_m)J_n(x_m)-J_{n+1}(x_m)} \tag{10}$$

となる。また $f(x)$ の2次導関数は

$$\begin{aligned} f''(x) &= J_n''(x) \\ &= \frac{n^2-n-x^2}{x^2}J_n(x)+\frac{1}{x}J_{n+1}(x) \end{aligned} \tag{11}$$

であるので，3位のニュートン・ラフソン法によって求められる根 x_{m+1} は式(8)より

$$\begin{aligned} x_{m+1} = x_m &- 2x_mJ_n(x_m)[nJ_n(x_m)-x_mJ_{n+1}(x_m)] \\ &／[(n^2+n+x_m^2)J_n^2(x_m)-(4n+1)x_mJ_n(x_m) \\ &\times J_{n+1}(x_m)+2x_m^2J_{n+1}^2(x_m)] \end{aligned} \tag{12}$$

となる。また関数 $f(x)$ が $J_n'(x)$ の場合 $f'(x)=J_n''(x)$ であるので，2位のニュートン・ラフソン法によって求められる根 x_{m+1} は式(5)，(9)，(11)より

$$\begin{aligned} x_{m+1} = x_m &- x_m[nJ_n(x_m)-x_mJ_{n+1}(x_m)] \\ &／[(n^2-n-x_m^2)J_n(x_m)+x_mJ_{n+1}(x_m)] \end{aligned} \tag{13}$$

となる。また，その2次導関数は

$$\begin{aligned} f''(x)=J_n'''(x) &= \frac{x^2-n^2-2}{x^2}J_{n+1}(x) \\ &+ \frac{(n-1)(n^2-2n-x^2)}{x^3}J_n(x) \end{aligned} \tag{14}$$

であるから，3位のニュートン・ラフソン法によって求められる根 x_{m+1} は式(8)，(9)，(11)，(14)より

$$\begin{aligned} x_{m+1} = x_m &- 2x_m[n(n^2-n-x_m^2)J_n^2(x_m) \\ &+ x_m(2n-n^2+x_m^2)J_n(x_m)J_{n+1}(x_m)-x_m^2J_{n+1}^2(x_m)] \\ &／\{[n(n-1)(n^2-3x_m^2)+2x_m^4]J_n^2(x_m) \\ &+ x_m[n^2(2n+1)-x_m^2(2n+3)]J_n(x_m)J_{n+1}(x_m) \\ &+ x_m^2(x_m^2-n^2)J_{n+1}^2(x_m)\} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。関数 $f(x)$ が $Y_n(x)$ または $Y_n'(x)$ の場合には，上式中の $J_n(x)$ を $Y_n(x)$ に置き換えればよい。

3．零点の初期値

式(5)や式(8)を用いて零点を求めるためには，初期値を与えてやらなければならない。初期値の選び方によっては，ニュートン・ラフソン法の計算を繰り返すにつれて，求めたい零点からどんどん遠ざかって，結果的には近隣の零点が求められてしまうことがある。したがって，初期値としては求めたい零点に十分に近い値を使うことが，繰り返し計算の回数を減らすという点でも大切である。

3．1　$n \geq 1$ の場合の初期値

次数 n が大きい場合，ベッセル関数の零点のうち小さい方から5番目までの零点が次のように求められている［1］，［5］。

(1) $J_n(x)$ の零点，$j_{n,s}$

$$j_{n,1} \approx n + 1.8557571n^{1/3} + 1.0331503n^{-1/3} - 0.003974n^{-1} - 0.09076n^{-5/3} + 0.0433n^{-7/3} \quad (16)$$

$$j_{n,2} \approx n + 3.2446076n^{1/3} + 3.1582436n^{-1/3} - 0.083307n^{-1} - 0.84367n^{-5/3} + 0.8639n^{-7/3} \quad (17)$$

$$j_{n,3} \approx n + 4.3816712n^{1/3} + 5.7597129n^{-1/3} - 0.226068n^{-1} - 2.80395n^{-5/3} + 3.9760n^{-7/3} \quad (18)$$

$$j_{n,4} \approx n + 5.3866138n^{1/3} + 8.7046824n^{-1/3} - 0.432274n^{-1} - 6.40286n^{-5/3} + 11.2490n^{-7/3} \quad (19)$$

$$j_{n,5} \approx n + 6.3052630n^{1/3} + 11.9269025n^{-1/3} - 0.701926n^{-1} - 12.01933n^{-5/3} + 24.8020n^{-7/3} \quad (20)$$

(2) $Y_n(x)$ の零点，$y_{n,s}$

$$y_{n,1} \approx n + 0.9315768n^{1/3} + 0.2603506n^{-1/3} + 0.011976n^{-1} - 0.00602n^{-5/3} - 0.0012n^{-7/3} \quad (21)$$

$$y_{n,2} \approx n + 2.5962685n^{1/3} + 2.0221830n^{-1/3} - 0.035716n^{-1} - 0.34628n^{-5/3} + 0.2722n^{-7/3} \quad (22)$$

$$y_{n,3} \approx n + 3.8341592n^{1/3} + 4.4102330n^{-1/3} - 0.146758n^{-1} - 1.64436n^{-5/3} + 2.0233n^{-7/3} \quad (23)$$

$$y_{n,4} \approx n + 4.8970149n^{1/3} + 7.1942264n^{-1/3} - 0.321240n^{-1} - 4.37396n^{-5/3} + 6.9651n^{-7/3} \quad (24)$$

$$y_{n,5} \approx n + 5.8549399n^{1/3} + 10.2840965n^{-1/3} - 0.559169n^{-1} - 8.93666n^{-5/3} + 17.0999n^{-7/3} \quad (25)$$

(3) $J'_n(x)$ の零点，$j'_{n,s}$

$$j'_{n,1} \approx n + 0.8086165n^{1/3} + 0.0724902n^{-1/3} - 0.050967n^{-1} + 0.00939n^{-5/3} \quad (26)$$

$$j'_{n,2} \approx n + 2.5780961n^{1/3} + 1.9551856n^{-1/3} - 0.089250n^{-1} - 0.29413n^{-5/3} \quad (27)$$

$$j'_{n,3} \approx n + 3.8257153n^{1/3} + 4.3646903n^{-1/3} - 0.200071n^{-1} - 1.56685n^{-5/3} \quad (28)$$

$$j'_{n,4} \approx n + 4.8918203n^{1/3} + 7.1585294n^{-1/3} - 0.374502n^{-1} - 4.27481n^{-5/3} \quad (29)$$

$$j'_{n,5} \approx n + 5.8513010n^{1/3} + 10.2542267n^{-1/3} - 0.612411n^{-1} - 8.81804n^{-5/3} \quad (30)$$

(4) $Y'_n(x)$ の零点，$y'_{n,s}$

$$y'_{n,1} \approx n + 1.8210980n^{1/3} + 0.9400074n^{-1/3} - 0.058084n^{-1} - 0.05402n^{-5/3} \quad (31)$$

$$y'_{n,2} \approx n + 3.2328653n^{1/3} + 3.1044932n^{-1/3} - 0.136685n^{-1} - 0.77821n^{-5/3} \quad (32)$$

$$y'_{n,3} \approx n + 4.3751914n^{1/3} + 5.7198338n^{-1/3} - 0.279349n^{-1} - 2.71528n^{-5/3} \quad (33)$$

$$y'_{n,4} \approx n + 5.3823170n^{1/3} + 8.6722214n^{-1/3} - 0.485524n^{-1} - 6.29376n^{-5/3} \quad (34)$$

$$y'_{n,5} \approx n + 6.3021240n^{1/3} + 11.8991624n^{-1/3} - 0.755163n^{-1} - 11.89156n^{-5/3} \quad (35)$$

$J'_n(x)$ の零点のうち小さい方から１番目と２番目の零点を求めるときには，式(26)の $j'_{n,1}$ と式(27)の $j'_{n,2}$ を反復計算の初期値として用いた。３番目から５番目までの初期値も同様にして求めることができるが，６番目以降の初期値を求める場合には，これらの零点に対する近似式を導かなければならない。ベッセル関数の隣り合う二つの零点の間隔は定式化されていないので，３番目の零点の初期値 $j'_{n,3}$ の選び方は任意である。今回の計算では次のような方法によって $j'_{n,3}$ に対する初期値を求めた。すなわち一つ前の零点$j'_{n,2}$と二つ前の零点 $j'_{n,1}$ の差を$j'_{n,2}$ に加えた値を$j'_{n,3}$ とした。すなわち

$$j'_{n,3} = j'_{n,2} + (j'_{n,2} - j'_{n,1}) \quad (36)$$

$j'_{n,4}$ 以降の零点についても同様にして求めた。また $J_n(x)$，$Y_n(x)$，$Y'_n(x)$ の場合も同様にして，それぞれの初期値を求めることができる。

３．２　$n=0$の場合の初期値

式(16)－(35)には，$n^{-1/3}$，n^{-1}，$n^{-5/3}$などの項が含まれている。したがって，$n=0$のときはこれらの式を用いて初期値を求めることはできない。ベッセル関数の零点の近似値として，次のようなマクマホン（McMahon）展開を用いることができる［１］。$s \gg n$の場合，$J_n(x)$と$Y_n(x)$の零点$j_{n,s}$と$y_{n,s}$については

$$j_{n,s}, y_{n,s} \approx \beta - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A_{2r-1}}{(2r-1)!\,2^{3r}\beta^{2r-1}} \quad (37)$$

である。ここで$j_{n,s}$に対しては$\beta = \pi(s+n/2-1/4)$，$y_{n,s}$に対しては$\beta = \pi(s+n/2-3/4)$である。また係数A_{2r-1}は次のとおりである。

$$A_1 = \mu - 1 \quad (38)$$

$$A_3 = (\mu - 1)(7\mu - 31) \quad (39)$$

$$A_5 = 4(\mu - 1)(83\mu^2 - 982\mu + 3779) \quad (40)$$

$$A_7 = 6(\mu - 1)(6949\mu^3 - 153855\mu^2 + 1585743\mu - 6277237) \quad (41)$$

$$A_9 = 144(\mu - 1)(70197\mu^4 - 2479316\mu^3 + 48010494\mu^2 - 512062548\mu + 2092163573) \quad (42)$$

$$A_{11} = 720(\mu - 1)(5592657\mu^5 - 287149133\mu^4 + 8903961290\mu^3 - 179289628602\mu^2 + 1982611456181\mu - 8249725736393) \quad (43)$$

ここで$\mu = 4n^2$である。また $J'_n(x)$ と $Y'_n(x)$ の零点$j'_{n,s}$と$y'_{n,s}$については

$$j'_{n,s}, y'_{n,s} \approx \beta' - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{A'_{2r-1}}{(2r-1)!\,2^{3r}\beta'^{(2r-1)}} \quad (44)$$

である。ここで$j'_{n,s}$に対しては$\beta' = \pi(s+n/2-3/4)$，$y'_{n,s}$に対しては$\beta' = \pi(s+n/2-1/4)$である。また係数A'_{2r-1}は次のとおりである。

$$A'_1 = \mu + 3 \quad (45)$$

表 1. 式（51）と式（52）の各項の値。上から第 1 項、第 2 項、第 3 項、第 4 項、第 5 項、第 6 項の値を示している。

s	$j_{0,s}$	$y_{0,s}$	$j'_{0,s}$	$y'_{0,s}$
1	2.4	7.9×10^{-1}	7.9×10^{-1}	2.4
	5.3×10^{-2}	1.6×10^{-1}	-4.8×10^{-1}	-1.6×10^{-1}
	-6.2×10^{-3}	-1.7×10^{-1}	4.8×10^{-2}	1.8×10^{-3}
	3.4×10^{-3}	8.2×10^{-1}	-7.7×10^{-3}	3.2×10^{-3}
	-4.5×10^{-3}	-9.9	9.2	4.2×10^{-3}
	1.1×10^{-2}	2.2×10^{2}	-2.1×10^{2}	-1.1×10^{-2}
2	5.5	3.9	3.9	5.5
	2.3×10^{-2}	3.2×10^{-2}	-9.5×10^{-2}	-6.8×10^{-2}
	-4.9×10^{-4}	-1.3×10^{-3}	3.9×10^{-4}	1.4×10^{-4}
	4.9×10^{-5}	2.6×10^{-4}	-2.5×10^{-4}	-4.6×10^{-5}
	-1.2×10^{-5}	-1.3×10^{-4}	1.2×10^{-4}	1.1×10^{-5}
	5.5×10^{-6}	1.1×10^{-4}	-1.1×10^{-5}	-5.3×10^{-6}
3	8.6	7.1	7.1	8.6
	1.4×10^{-2}	1.8×10^{-2}	-5.3×10^{-2}	-4.3×10^{-2}
	-1.3×10^{-4}	-2.3×10^{-4}	6.6×10^{-5}	3.6×10^{-5}
	5.1×10^{-6}	1.4×10^{-5}	-1.3×10^{-5}	-4.8×10^{-6}
	-5.1×10^{-7}	-2.1×10^{-6}	1.9×10^{-6}	4.7×10^{-7}
	9.4×10^{-8}	5.8×10^{-7}	-5.5×10^{-7}	-9.1×10^{-8}

$$A'_3 = 7\mu^2+82\mu-9 \tag{46}$$

$$A'_5 = 4(83\mu^3+2075\mu^2-3039\mu+3537) \tag{47}$$

$$A'_7 = 6(6949\mu^4+296492\mu^3-1248002\mu^2+7414380\mu-5853627) \tag{48}$$

$$A'_9 = 144(70197\mu^5+4535387\mu^4-38051230\mu^3+527973862\mu^2-2491515495\mu+2014126479) \tag{49}$$

$$A'_{11} = 720(5592657\mu^6+507585210\mu^5-7121376977\mu^4+177311093036\mu^3-2079338304417\mu^2+9969910286202\mu-8057531232063) \tag{50}$$

ここでは$n=0$の場合を扱っているので，式（37）は

$$j_{0,s}, y_{0,s} \approx \beta+\frac{1}{8\beta}-\frac{124}{3(8\beta)^3}+\frac{120928}{15(8\beta)^5}-\frac{401743168}{105(8\beta)^7}+\frac{3213563248128}{945(8\beta)^9}-\cdots \tag{51}$$

となる。ここで$j_{0,s}$に対して$\beta=\pi(s-1/4)$，$y_{0,s}$に対しては$\beta=\pi(s-3/4)$である。同様に式（44）については

$$j'_{0,s}, y'_{0,s} \approx \beta'-\frac{3}{8\beta'}+\frac{36}{3(8\beta')^3}-\frac{113184}{15(8\beta')^5}+\frac{374632128}{105(8\beta')^7}-\frac{3093698271744}{945(8\beta')^9}+\cdots \tag{52}$$

となる。ここで$j'_{0,s}$に対して$\beta'=\pi(s-3/4)$，$y'_{0,s}$に対しては$\beta'=\pi(s-1/4)$である。

表 1 は式（51）と式（52）の第 1 項から第 6 項までの各項の値を$s=1,2,3$について示したものである。$j_{0,1}$の場合，第 1 項から第 4 項までの絶対値は減少していくが，第 5 項以降は増加に転ずる。$y_{0,1}$の場合，絶対値は第 2 項までは減少していくが，第 3 項以降増加に転ずる。$j'_{0,1}$の場合，絶対値は第 4 項まで減少していくが，第 5 項以降増加に転ずる。$j'_{0,1}$の場合，絶対値は第 3 項まで減少していくが，第 4 項以降増加に転ずる。しかし，$s=2$および$s=3$のとき，いずれの場合も絶対値は単調に減少していく。マクマホン展開は$s\gg n$のもとに導かれたものであるので，$s=1$のときに上記のような現象が起きても不思議ではない。Temmeは式（51）と式（52）の第 1 項から第 4 項までを取り入れたパデ(Padé)近似を用いて初期値を求めた。表 2 はこのようにして求めた初期値（上段）とマクマホン展開の第 1 項から第 4 項までの和（中段）を示したものである。なお下段は真の零点である。$s=1$の場合，パデ近似が与える初期値の方がマクマホン展開が与える初期値よりもいくらか真の零点に近い。なお$j'_{0,1}=0$であるので，この場合は計算する必要はない。この場合は，表の初期値を使って計算すると失敗する。また$y_{0,1}$の場合，マクマホン展開が与える初期値は真の零点とはかけ離れているが，この値を初期値として用いても正しい零点が得られる。$s=2,3$については，どちらの方法も正しい初期値を与える。$s\geq3$のときの初期値はもちろん式（51）や式（52）から求められるが，式（36）を使っても求められる。

表 3 は，$s=3,4$の場合についてこれら二つの方法によって求めた初期値を示したものである。すなわち上段の数値は，パデ近似またはマクマホン展開の第 4 項までの和であり，中段は式（36）から求められた値である。なお下段は真の零

表 2． 式（51）と式（52）の第 1 項から第 4 項までを含めたパデ近似（上段）とマクマホン展開（中段）から求めた初期値。なお下段は真の零点である。

S	$j^{p}_{0,s}$ $j^{M}_{0,s}$ $j_{0,s}$	$y^{p}_{0,s}$ $y^{M}_{0,s}$ $y_{0,s}$	$j'^{p}_{0,s}$ $j'^{M}_{0,s}$ $j'_{0,s}$	$y'^{p}_{0,s}$ $y'^{M}_{0,s}$ $y'_{0,s}$
1	2.405 2.406 2.40482556	0.9165 1.601 0.89357697	0.3108 −0.4142 0.00000000	2.198 2.195 2.19714133
2	5.520 5.520 5.52007811	3.958 3.958 3.95767842	3.832 3.832 3.83170597	5.430 5.430 5.42968104
3	8.654 8.654 8.65372791	7.086 7.086 7.08605106	7.016 7.016 7.01558667	8.596 8.596 8.59600587

表 3． $s=3$、4 場合に、マクマホン展開またはパデ近似を用いて計算した初期値（上段）と式(36)を用いて計算した初期値（中段）。なお下段は真の零点である。

S	$j_{0,s}$	$y_{0,s}$	$j'_{0,s}$	$y'_{0,s}$
3	8.654 8.635 8.65372791	7.086 7.022 7.08605106	7.016 7.663 7.01558667	8.596 8.662 8.59600587
4	11.792 11.787 11.7915344	10.222 10.214 10.2223450	10.173 10.199 10.1734681	11.749 11.762 11.7491548

点である。この表から，いずれの場合も上段の数値が中段の数値より真の零点に近いので，実際の計算では$n\geq3$の場合についても，パデ近似またはマクマホン展開が与える初期値を用いた方がよい。

3．3　零点の計算

上記のようにして初期値が定まると，零点の計算を実行する段階になる。表 4 は各ベッセル関数の零点を計算するときに使用したニュートン・ラフソン法をまとめたものである。たとえば$Y_n(x)$の$n\geq1$の場合，2 位のニュートン・ラフソン法では$n=944$，$s=3$のとき$s=5$の零点が求まり，$n=944$，$s=4$のとき$s=9$の零点が求まってしまう。また$J'_n(x)$の$n\geq1$の場合，2 位のニュートン・ラフソン法では$n=55$，$s=3$のとき$s=5$の零点が求まり，$n=55$，$s=4$のとき$s=3$の零点が求まってしまう。2 位のニュートン・ラフソン法であろうと 3 位のニュートン・ラフソン法であろうと，初期値は式（21）と式（22）あるいは式（26）と式（27）によって与えられるので，このような不合理は 2 位のニュートン・ラフソン法に起因するものと考えられる。また 2 位のニュートン・ラフソン法と 3 位のニュートン・ラフソン法の繰り返し回数はそれほど変わらないので，計算をするときには 3 位のニュートン・ラフソン法を用いた方が無難である。なお$J_n(x)$や$Y_n(x)$の計算は，IMSL Math LibraryのサブプログラムDBSJNSやDBSYSを用いて行った。零点が漏れなく求められたかどうかは次のようにして判断した。すなわち連続した二つの零点の間を10等分し，両端の零点を除く 9 点で関数の値を計算し，隣り合う二つの関数の値の積を求めた。もしすべての積が正であれば，この二つの零点の間にはほかに零点は存在しないと考えられるが，もしこの積が一つでも負になれば，この二つの零点の間には計算されなかった別の零点が存在することになる。

4．むすび

第 1 種，第 2 種ベッセル関数$J_n(x)$，$Y_n(x)$およびその導関数$J'_n(x)$，$Y'_n(x)$の零点をただ二つのプロセスで求める方法について述べた。次数$n=0$の場合，マクマホン展開の 4 項目までを用いる限り，初期値をパデ近似から求めてもマクマホン展開から求めても正しい零点が求められる。また$n\geq1$の場合，すでに求められた二つの零点を用いて次の零点の初期値を求めた。このような方法をとることによって，前二つの零点の情報を次の零点に反映させ，結果として漏れなく零点を求めることができた。$Y_n(x)$と$J'_n(x)$の零点は，$n\geq1$のとき 3 位のニュートン・ラフソン法を用いなければならないが，これ以外の場合は 2 位のニュートン・ラフソン法でよい。nとsの広い範囲の組み合わせに対して零点の計算ができることを確かめてあるので，本論文に述べた方法はほとんどの用途に使用できるものと思われる。

表4. ニュートン・ラフソン法の選択

	$J_n(x)$	$Y_n(x)$	$J'_n(x)$	$Y'_n(x)$
$n=0$	2位	2位	2位	2位
$n\geq 1$	2位	3位	3位	2位

参考文献

[1] Olver, F.W.J.: *Royal Society Mathematical Tables, Bessel Functions. PartIII. Zeros and Associated Values,7,Cambridge Univ. Press, London／New York,* 1960.

[2] Beattie, C.L.: Table of First 700 Zeros of Bessel Functions-$J_l(x)$and $J'_l(x)$, *Bell Tech. J.*, 37, 1958, 689-697.

[3] Temme, N.M.: An Algorithm with ALGOL 60 Program for the Computation of the Zeros of Ordinary Bessel Functions and those of their Derivatives, *J. Computational Phys.*, 32, 1979, 270-279.

[4] Yamashita, M., Nishii, T. and Kurihara, H.: Resistivity Correction Factor for the Four-Point Probe Method on Cylindrical Materials, *Jpn. J. Appl. Phys.*, 35(3), 1996, 1948-1953.

[5] Olver, F.W.J.,: A further method for the evaluation of zeros of Bessel functions and some new asymptotic expansions for zeros of functions of large order, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47, 1952, 699-712.

付録　$J'_n(x)$ の零点 $j'_{n,s}$

この付録では文献[1]の表を拡張する意味を込めて，表5として $J'_n(x)$ の零点 $j'_{n,s}$ を$20\leq n\leq 49$，$1\leq s\leq 60$の範囲で示す。

表5. $J'_n(x)$の零点 $j'_{n,s}$

s	$j'_{20,s}$	$j'_{21,s}$	$j'_{22,s}$	$j'_{23,s}$	$j'_{24,s}$	$j'_{25,s}$
1	22.21914648	23.25482051	24.28938554	25.32292421	26.35550968	27.38720713
2	27.71212684	28.81559026	29.91614781	31.01399843	32.10931996	33.20227214
3	31.97371522	33.11916251	34.26076830	35.39878197	36.53342770	37.66490790
4	35.87394150	37.05164392	38.22489744	39.39397753	40.55913306	41.72058970
5	39.58453089	40.78864004	41.98788278	43.18254757	44.37289611	45.55916665
6	43.17653646	44.40300395	45.62431208	46.84075435	48.05259808	49.26008750
7	46.68716642	47.93297704	49.17342240	50.40879603	51.63936621	52.86537891
8	50.13856248	51.40136592	52.65866144	53.91073936	55.15786592	56.40028590
9	53.54502718	54.82293308	56.09523556	57.36221966	58.62414749	59.88126077
10	56.91634787	58.20780036	59.49358979	60.77399447	62.04927114	63.31965714
11	60.25951651	61.56321210	62.86121252	64.15378858	65.44119072	66.72365106
12	63.57969798	64.89452898	66.20365410	67.50733617	68.80581881	70.09932836
13	66.88081125	68.20582532	69.52513956	70.83900854	72.14766879	73.45134051
14	70.16589626	71.50026659	72.82895627	74.15221157	75.47026176	76.78332077
15	73.43735505	74.78035780	76.11770942	77.44964789	78.77639527	80.09815911
16	76.69711577	78.04811263	79.39349598	80.73349570	82.06832667	83.39819010
17	79.94674733	81.30517182	82.65802681	84.00553424	85.34790193	86.68532484
18	83.18754160	84.55288816	85.91271419	87.26723391	88.61664829	89.96114613
19	86.42057347	87.79238862	89.15873605	90.51982252	91.87584232	93.22697826
20	89.64674568	91.02462083	92.39708397	93.76433469	95.12656081	96.48393932
21	92.86682276	94.25038819	95.62859953	97.00164943	98.36971948	99.73298103
22	96.08145700	97.47037697	98.85400232	100.23251908	101.60610281	102.97491943
23	99.29120879	100.68517731	102.07391178	103.45759186	104.83638732	106.21045882
24	102.49656256	103.89529989	105.28886442	106.67742970	108.06115997	109.44021077
25	105.69793942	107.10118907	108.49932752	109.89252247	111.28093283	112.66470928
26	108.89570741	110.30323355	111.70571016	113.10329937	114.49615496	115.88442292
27	112.09018972	113.50177494	114.90837220	116.31013826	117.70722198	119.09976484
28	115.28167140	116.69711486	118.10763159	119.51337323	120.91448394	122.31110086
29	118.47040496	119.88952065	121.30377038	122.71330090	124.11825184	125.51875620
30	121.65661491	123.07923023	124.49703977	125.91018560	127.31880304	128.72302109
31	124.84050162	126.26645606	127.68766423	129.10426374	130.51638575	131.92415540
32	128.02224448	129.45138853	130.87584508	132.29574744	133.71122280	135.12239262
33	131.20200466	132.63419879	134.06176338	135.48482763	136.90351492	138.31794317
34	134.37992735	135.81504114	137.24558249	138.67167667	140.09344340	141.51099720
35	137.55614375	138.99405508	140.42745019	141.85645057	143.28117243	144.70172705
36	140.73077270	142.17136707	143.60750052	145.03929093	146.46685114	147.89028929
37	143.90392215	145.34709205	146.78585539	148.22032658	149.65061526	151.07682652
38	147.07569037	148.52133470	149.96262588	151.39967502	152.83258863	154.26146893
39	150.24616703	151.69419060	153.13791348	154.57744360	156.01288451	157.44433561
40	153.41543413	154.86574720	156.31181110	157.75373069	159.19160666	160.62553576
41	156.58356680	158.03608467	159.48440394	160.92862653	162.36885039	163.80516966
42	159.75063402	161.20527667	162.65577033	164.10221411	165.54470332	166.98332963
43	162.91669926	164.37339098	165.82598238	167.27456989	168.71924626	170.16010077
44	166.08182098	167.54049008	168.99510660	170.44576440	171.89255376	173.33556168
45	169.24605316	170.70663167	172.16320445	173.61586284	175.06469479	176.50978506
46	172.40944570	173.87186914	175.33033279	176.78492558	178.23573321	179.68283830
47	175.57204480	177.03625193	178.49654432	179.95300860	181.40572827	182.85478390
48	178.73389334	180.19982593	181.66188798	183.12016386	184.57473500	186.02567996
49	181.89503110	183.36263377	184.82640922	186.28643970	187.74280459	189.19558054
50	185.05549510	186.52471511	187.99015039	189.45188112	190.90998472	192.36453602
51	188.21531983	189.68610691	191.15315093	192.61653007	194.07631988	195.53259339
52	191.37453743	192.84684364	194.31544764	195.78042572	197.24185160	198.69979657
53	194.53317792	196.00695750	197.47707494	198.94360469	200.40661870	201.86618662
54	197.69126935	199.16647859	200.63806500	202.10610123	203.57065755	205.03180199
55	200.84883798	202.32543510	203.79844794	205.26794743	206.73400221	208.19667874
56	204.00590841	205.48385344	206.95825202	208.42917339	209.89668463	211.36085068
57	207.16250371	208.64175841	210.11750375	211.58980738	213.05873482	214.52434959
58	210.31864555	211.79917328	213.27622804	214.74987593	216.22018101	217.68720536
59	213.47435428	214.95611993	216.43444832	217.90940404	219.38104973	220.84944611
60	216.62964905	218.11261895	219.59218663	221.06841522	222.54136598	224.01109833

表 5.　$J'_n(x)$ の零点 $j'_{n,s}$ （続き）

s	$j'_{26,s}$	$j'_{27,s}$	$j'_{28,s}$	$j'_{29,s}$	$j'_{30,s}$	$j'_{31,s}$
1	28.41807483	29.44816521	30.47752554	31.50619868	32.53422356	33.56163572
2	34.29299903	35.38163108	36.46828685	37.55307443	38.63609270	39.71743238
3	38.79340601	39.91908887	41.04210875	42.16260504	43.28070570	44.39652854
4	42.87855284	44.03320998	45.18473289	46.33327932	47.47899456	48.62201276
5	46.74157681	47.92032600	49.09559743	50.26755989	51.43636931	52.60217002
6	50.46344645	51.66288070	52.85857983	54.05071903	55.23946052	56.42495487
7	54.08706022	55.30461857	56.51824657	57.72812261	58.93441230	60.13726972
8	57.63822500	58.87189183	60.10147963	61.32716786	62.54912345	63.76750203
9	61.13378297	62.38192112	63.62586750	64.86580101	66.10188848	67.33428573
10	64.58537241	65.84662124	67.10359375	68.35646723	69.60540730	70.85056897
11	68.00138519	69.27459380	70.54346404	71.80817077	73.06887767	74.32573818
12	71.38807549	72.67225671	73.95205564	75.22764416	76.49918344	77.76682482
13	74.75022911	76.04452654	77.33441251	78.62005552	79.90161382	81.17923628
14	78.09158850	79.39525213	80.69448717	81.98945851	83.28032121	84.56722136
15	81.41513374	82.72750140	84.03543330	85.33909047	86.63862466	87.93417897
16	84.72327469	86.04375773	87.35980602	88.67157668	89.97921796	91.28286992
17	88.01798612	89.34605807	90.66970305	91.98907425	93.30431637	94.61556629
18	91.30090509	92.63609256	93.96686649	95.29337609	96.61576251	97.93415943
19	94.57340261	95.91527793	97.25275779	98.58598749	99.91510461	101.24023964
20	97.83663724	99.18481239	100.52861404	101.86818361	103.20365517	104.53515600
21	101.09159600	102.44571756	103.79549081	105.14105333	106.48253572	107.82006210
22	104.33912588	105.69887085	107.05429533	108.40553316	109.75271154	111.09595148
23	107.57995851	108.94503071	110.30581242	111.66243383	113.01501881	114.36368530
24	110.81472967	112.18485673	113.55072507	114.91246135	116.27018616	117.62401445
25	114.04399489	115.41892564	116.78963090	118.15623386	119.51885194	120.87759717
26	117.26824202	118.64774427	120.02305540	121.39429526	122.76157818	124.12501332
27	120.48790147	121.87176007	123.25146283	124.62712635	125.99886196	127.36677606
28	123.70335463	125.09136975	126.47526503	127.85515391	129.23114481	130.60334141
29	126.91494076	128.30692647	129.69482885	131.07875830	132.45882040	133.83511622
30	130.12296281	131.51874575	132.91048223	134.29827972	135.68224106	137.06246477
31	133.32769222	134.72711045	136.12251935	137.51402352	138.90172317	140.28571435
32	136.52937301	137.93227501	139.33120494	140.72626464	142.11755174	143.50515992
33	139.72822519	141.13446897	142.53677796	143.93525135	145.32998429	146.72106811
34	142.92444772	144.33389999	145.73945472	147.14120852	148.53925413	149.93368065
35	146.11822100	147.53075649	148.93943156	150.34434034	151.74557324	153.14321719
36	149.30970902	150.72520980	152.13688711	153.54483268	154.94913467	156.34987791
37	152.49906121	153.91741614	155.33198432	156.74285516	158.15011466	159.55384558
38	155.68641404	157.10751823	158.52487213	159.93856290	161.34867443	162.75528754
39	158.87189243	160.29564679	161.71568699	163.13209806	164.54496185	165.95435723
40	162.05561097	163.48192174	164.90455419	166.32359121	167.73911272	169.15119572
41	165.23767493	166.66645337	168.09158892	169.51316249	170.93125207	172.34593288
42	168.41818127	169.84934322	171.27689736	172.70092264	174.12149520	175.53868853
43	171.59721941	173.03068503	174.46057752	175.88697392	177.30994861	178.72957340
44	174.77487196	176.21056542	177.64272000	179.07141093	180.49671087	181.91868998
45	177.95121538	179.38906458	180.82340874	182.25432132	183.68187331	185.10613330
46	181.12632055	182.56625688	184.00272158	185.43578640	186.86552071	188.29199157
47	184.30025324	185.74221137	187.18073084	188.61588175	190.04773189	191.47634686
48	187.47307462	188.91699228	190.35750380	191.79467768	193.22858022	194.65927554
49	190.64484162	192.09065941	193.53310312	194.97223974	196.40813407	197.84084886
50	193.81560730	195.26326851	196.70758727	198.14862907	199.58645728	201.02113333
51	196.98542121	198.43487165	199.88101083	201.32390278	202.76360950	204.20019110
52	200.15432961	201.60551750	203.05342485	204.49811431	205.93964654	207.37808037
53	203.32237583	204.77525160	206.22487713	207.67131369	209.11462066	210.55485564
54	206.48960042	207.94411663	209.39541245	210.84354783	212.28858090	213.73056805
55	209.65604141	211.11215261	212.56507284	214.01486076	215.46157327	216.90526562
56	212.82173451	214.27939714	215.73389777	217.18529382	218.63364102	220.07899348
57	215.98671326	217.44588553	218.90192434	220.35488591	221.80482483	223.25179411
58	219.15100923	220.61165103	222.06918749	223.52367366	224.97516301	226.42370749
59	222.31465211	223.77672494	225.23572010	226.69169154	228.14469165	229.59477135
60	225.47766992	226.94113675	228.40155320	229.85897211	231.31344482	232.76502124

表 5. $J'_n(x)$ の零点 $j'_{n,s}$ (続き)

s	$j'_{32,s}$	$j'_{33,s}$	$j'_{34,s}$	$j'_{35,s}$	$j'_{36,s}$	$j'_{37,s}$
1	34.58846766	35.61474922	36.64050785	37.66576885	38.69055565	39.71488993
2	40.79717690	41.87540324	42.95218254	44.02758073	45.10165905	46.17447445
3	45.51018228	46.62176750	47.73137747	48.83909883	49.94501228	51.04919307
4	49.76245810	50.90044573	52.03608272	53.16946879	54.30069698	55.42985428
5	53.76509596	54.92527166	56.08281316	57.23782876	58.39041974	59.54068094
6	57.60734209	58.78675269	59.96330850	61.13712347	62.30830435	63.47695133
7	61.33683844	62.53325256	63.72663752	64.91711085	66.10478288	67.28975730
8	64.98244897	66.19410026	67.40258336	68.60801790	69.81051636	71.01018463
9	68.56313857	69.78858366	71.01074932	72.22975619	73.44571783	74.65874137
10	72.09209754	73.33012943	74.56479294	75.79620886	77.02449111	78.24974724
11	75.57889638	76.82848778	78.07463998	79.31747334	80.55710149	81.79363188
12	79.03071064	80.29097497	81.54774425	82.80113789	84.05126881	85.29824389
13	82.45306311	83.72322656	84.98985154	86.25305616	87.51295225	88.76964580
14	85.85029678	87.12967762	88.40548697	89.67784138	90.94685132	92.21262163
15	89.22588862	90.51388147	91.79827859	93.07919474	94.35673887	95.63101442
16	92.58266499	93.87872862	95.17117970	96.46013108	97.74568998	99.02795836
17	95.92295364	97.22660130	98.52662592	99.82313832	101.11624387	102.40604293
18	99.24869360	100.55948531	101.86664885	103.17029296	104.47052110	105.76743192
19	102.56151640	103.87905257	105.19296007	106.50334547	107.81031029	109.11395139
20	105.86280703	107.18672330	108.50701434	109.82378452	111.13713340	112.44715603
21	109.15375054	110.48371343	111.81005790	113.13288615	114.45229573	115.76837986
22	112.43536818	113.77107144	115.10316602	116.43175191	117.75692466	119.07877564
23	115.70854570	117.04970726	118.38727234	119.72133877	121.05200012	122.37934591
24	118.97405588	120.32041515	121.66319230	123.00248302	124.33837887	125.67096757
25	122.23257651	123.58389218	124.93164192	126.27591929	127.61681392	128.95441169
26	125.48470503	126.84075306	128.19325294	129.54229613	130.88797031	132.23035959
27	128.73097040	130.09154239	131.44858532	132.80218861	134.15243805	135.49941598
28	131.97184299	133.33674460	134.69813740	136.05610880	137.41074273	138.76211977
29	135.20774259	136.57679233	137.94235445	139.30451442	140.66335432	142.01895307
30	138.43904532	139.81207330	141.18163569	142.54781604	143.91069464	145.27034871
31	141.66608921	143.04293621	144.41634032	145.78638322	147.15314345	148.51669660
32	144.88917907	146.26969559	147.64679248	149.02054960	150.39104378	151.75834901
33	148.10859058	149.49263603	150.87328558	152.25061730	153.62470636	154.99562519
34	151.32457372	152.71201572	154.09608591	155.47686064	156.85441345	158.22881523
35	154.53735580	155.92806951	157.31543581	158.69952934	160.08042206	161.45818339
36	157.74714401	159.14101157	160.53155633	161.91885128	163.30296686	164.68397100
37	160.95412764	162.35103763	163.74464959	165.13503492	166.52226253	167.90639895
38	164.15848005	165.55832701	166.95490081	168.34827131	169.73850595	171.12566988
39	167.36036026	168.76304428	170.16248007	171.55873598	172.95187803	174.34197002
40	170.55991452	171.96534081	173.36754384	174.76659046	176.16254532	177.55547090
41	173.75727753	175.16535612	176.57023636	177.97198372	179.37066146	180.76633080
42	176.95257360	178.36321896	179.77069085	181.17505335	182.57636840	183.97469600
43	180.14591766	181.55904842	182.96903052	184.37592667	185.77979756	187.18070195
44	183.33741610	184.75295481	186.16536954	187.57472171	188.98107076	190.38447427
45	186.52716762	187.94504044	189.35981386	190.77154800	192.18030111	193.58612961
46	189.71526387	191.13540039	192.55246194	193.96650739	195.37759381	196.78577651
47	192.90179012	194.32412313	195.74340542	197.15969468	198.57304681	199.98351605
48	196.08682577	197.51129107	198.93272973	200.35119827	201.76675148	203.17944252
49	199.27044491	200.69698111	202.12051457	203.54110065	204.95879309	206.37364399
50	202.45271670	203.88126509	205.30683442	206.72947896	208.14925139	209.56620281
51	205.63370583	207.06421018	208.49175896	209.91640536	211.33820102	212.75719609
52	208.81347284	210.24587930	211.67535346	213.10194745	214.52571193	215.94669609
53	211.99207448	213.42633143	214.85767911	216.28616867	217.71184975	219.13477064
54	215.16956401	216.60562192	218.03879338	219.46912854	220.89667611	222.32148345
55	218.34599143	219.78380277	221.21875025	222.65088304	224.08024894	225.50689443
56	221.52140376	222.96092289	224.39760051	225.83148484	227.26262279	228.69105998
57	224.69584525	226.13702832	227.57539197	229.01098353	230.44384902	231.87403324
58	227.86935761	229.31216244	230.75216971	232.18942586	233.62397607	235.05586432
59	231.04198013	232.48636616	233.92797624	235.36685596	236.80304966	238.23660054
60	234.21374993	235.65967810	237.10285171	238.54331549	239.98111297	241.41628658

表 5.　$J'_n(x)$ の零点 $j'_{n,s}$ （続き）

s	$j'_{38,s}$	$j'_{39,s}$	$j'_{40,s}$	$j'_{41,s}$	$j'_{42,s}$	$j'_{43,s}$
1	40.73879184	41.76228012	42.78537226	43.80808458	44.83043235	45.85242988
2	47.24608006	48.31652548	49.38585712	50.45411848	51.52135039	52.58759122
3	52.15171154	53.25263353	54.35202077	55.44993122	56.54641941	57.64153668
4	56.55702215	57.68227699	58.80569058	59.92733042	61.04726012	62.16553970
5	60.68870138	61.83456466	62.97834948	64.12012999	65.25997613	66.39795402
6	64.64315855	65.80701462	66.96860305	68.12800265	69.28528788	70.44052920
7	68.47213170	69.65199810	70.82944334	72.00454949	73.17739421	74.34805104
8	72.20712253	73.40142430	74.59317900	75.78247092	76.96937991	78.15398172
9	75.86892789	77.07637299	78.28116712	79.48339598	80.68314089	81.88047903
10	79.47207895	80.69158247	81.90834900	83.12246507	84.33401283	85.54307039
11	83.02716621	84.25780087	85.48562731	86.71073237	87.93319861	89.15310461
12	86.54216443	87.78312656	89.02122157	90.25653626	91.48915323	92.71915116
13	90.02323738	91.27382253	92.52149207	93.76633247	95.00842607	96.24785140
14	93.47525189	94.73483679	95.99146646	97.24522677	98.49619960	99.74446310
15	96.90211981	98.17014868	99.43519028	100.69732971	101.95664816	103.21322324
16	100.30703326	101.58300717	102.85596828	104.12600076	105.39318502	106.65759794
17	103.69263108	104.97609950	106.25653523	107.53402139	108.80863747	110.08045954
18	107.06111946	108.35167351	109.63917984	110.92372048	112.20537390	113.48421524
19	110.41436124	111.71162815	113.00583659	114.29706737	115.58539789	116.87090232
20	113.75394322	115.05758178	116.35815482	117.65574191	118.95041930	120.24226013
21	117.08122766	118.39092443	119.69755187	121.00118826	122.30190869	123.59978521
22	120.39739231	121.71285841	123.02525420	124.33465667	125.64113968	126.94477420
23	123.70346191	125.02443029	126.34232988	127.65723634	128.96922233	130.27835766
24	127.00033317	128.32655631	129.64971438	130.96988168	132.28712965	133.60152696
25	130.28879499	131.62004289	132.94823134	134.27343333	135.59571904	136.91515600
26	133.56954469	134.90560315	136.23860947	137.56863532	138.89574963	140.22001879
27	136.84320148	138.18387056	139.52149630	140.85614905	142.18789651	143.51680391
28	140.11031740	141.45541012	142.79746961	144.13656490	145.47276247	146.80612642
29	143.37138652	144.72072770	146.06704690	147.41041185	148.75088782	150.08853778
30	146.62685258	147.98027779	149.33069329	150.67816550	152.02275852	153.36453417
31	149.87711545	151.23447013	152.58882822	153.94025491	155.28881309	156.63456348
32	153.12253658	154.48367518	155.84183111	157.19706829	158.54944846	159.89903125
33	156.36344360	157.72822892	159.09004613	160.44895794	161.80502496	163.15830572
34	159.60013436	160.96843683	162.33378634	163.69624441	165.05587052	166.41272214
35	162.83288028	164.20457741	165.57333724	166.93922011	168.30228440	169.66258653
36	166.06192931	167.43690516	168.80895979	170.17815242	171.54454031	172.90817888
37	169.28750846	170.66565316	172.04089311	173.41328638	174.78288918	176.14975593
38	172.50982606	173.89103537	175.26935670	176.64484703	178.01756152	179.38755360
39	175.72907364	177.11324857	178.49455255	179.87304149	181.24876953	182.62178914
40	178.94542766	180.33247409	181.71666683	183.09806073	184.47670894	185.85266297
41	182.15905098	183.54887936	184.93587148	186.32008117	187.70156058	189.08036032
42	185.37009419	186.76261921	188.15232556	189.53926603	190.92349185	192.30505270
43	188.57869675	189.97383709	191.36617645	192.75576663	194.14265794	195.52689915
44	191.78498802	193.18266610	194.57756096	195.96972345	197.35920296	198.74604739
45	194.98908820	196.38922993	197.78660625	199.18126709	200.57326093	201.96263484
46	198.19110913	199.59364369	200.99343070	202.39051917	203.78495670	205.17678953
47	201.39115499	202.79601467	204.19814466	205.59759308	206.99440667	208.38863086
48	204.58932300	205.99644300	207.40085115	208.80259470	210.20171958	211.59827041
49	207.78570399	209.19502222	210.60164643	212.00562302	213.40699708	214.80581249
50	210.98038290	212.39183987	213.80062061	215.20677068	216.61033438	218.01135482
51	214.17343928	215.58697795	216.99785810	218.40612450	219.81182068	221.21498899
52	217.36494773	218.78051333	220.19343809	221.60376595	223.01153971	224.41680098
53	220.55497825	221.97251822	223.38743492	224.79977154	226.20957012	227.61687157
54	223.74359663	225.16306045	226.57991849	227.99421320	229.40598587	230.81527675
55	226.93086473	228.35220384	229.77095457	231.18715863	232.60085661	234.01208806
56	230.11684082	231.54000850	232.96060511	234.37867162	235.79424792	237.20737293
57	233.30157978	234.72653110	236.14892852	237.56881231	238.98622171	240.40119497
58	236.48513343	237.91182508	239.33597991	240.75763749	242.17683640	243.59361425
59	239.66755064	241.09594093	242.52181134	243.94520078	245.36614717	246.78468752
60	242.84887762	244.27892636	245.70647203	247.13155289	248.55420625	249.97446848

表 5. $J'_n(x)$の零点 $j'_{n,s}$ （続き）

s	$j'_{44,s}$	$j'_{45,s}$	$j'_{46,s}$	$j'_{47,s}$	$j'_{48,s}$	$j'_{49,s}$
1	46.87409061	47.89542716	48.91645142	49.93717458	50.95760723	51.97775935
2	53.65287710	54.71724208	55.78071831	56.84333616	57.90512436	58.96611015
3	58.73533146	59.82784946	60.91913392	62.00922575	63.09816371	64.18598460
4	63.28222582	64.39737208	65.51102923	66.62324535	67.73406610	68.84353482
5	67.53412615	68.66855175	69.80128692	70.93238495	72.06189644	73.18986951
6	71.59379334	72.74514357	73.89463994	75.04233952	76.18829659	77.33256282
7	75.51658976	76.68307658	77.84757445	79.01014324	80.17083993	81.32971886
8	79.33634823	80.51654782	81.69464548	82.87070314	84.04477980	85.21693177
9	83.07548378	84.26822496	85.45876907	86.64717947	87.83351663	89.01783829
10	86.74971206	87.95400864	89.15602759	90.35583329	91.55348723	92.74904815
11	90.37052520	91.58553174	92.79819229	94.00857188	95.21673264	96.42273401
12	93.94660509	95.17158660	96.39416407	97.61440284	98.83236544	100.04811170
13	97.48468340	98.71899365	99.95085056	101.18031959	102.40746339	103.63234198
14	100.99009189	102.23315733	103.47372769	104.71186830	105.94764179	107.18110818
15	104.46712910	105.71843670	106.96721397	108.21352602	109.45743525	110.69900154
16	107.91931306	109.17840082	110.43492869	111.68896138	112.94056098	114.18978708
17	111.34956042	112.61600989	113.87987487	115.14121956	116.40010562	117.65659228
18	114.76031651	116.03374677	117.30457228	118.57285667	119.83866105	121.10204422
19	118.15365178	119.43371452	120.71115607	121.98603942	123.25842510	124.52837136
20	121.53133458	122.81771003	124.10145126	125.38262051	126.66127769	127.93748046
21	124.89488702	126.18728060	127.47702989	128.76419640	130.04883933	131.33101571
22	128.24562840	129.54376783	130.83925557	132.13215233	133.42251659	134.71040470
23	131.58470948	132.88834237	134.18931852	135.48769783	136.78353803	138.07689476
24	134.91313970	136.22203148	137.52826358	138.83189505	140.13298284	141.43158190
25	138.23180923	139.54574134	140.85701270	142.16568151	143.47180393	144.77543415
26	141.54150674	142.86027511	144.17638333	145.48988874	146.80084668	148.10931061
27	144.84293413	146.16634779	147.48710340	148.80525742	150.12086438	151.43397698
28	148.13671854	149.46459846	150.78982376	152.11245002	153.43253096	154.75011852
29	151.42342245	152.75560049	154.08512851	155.41206125	156.73645161	158.05835073
30	154.70355214	156.03987009	157.37354371	158.70462687	160.03317164	161.35922842
31	157.97756474	159.31787353	160.65554464	161.99063106	163.32318406	164.65325326
32	161.24587428	162.59003325	163.93156202	165.27051275	166.60693587	167.94088027
33	164.50885683	165.85673304	167.20198731	168.54467093	169.88483357	171.22252332
34	167.76685488	169.11832254	170.46717721	171.81346931	173.15724773	174.49855983
35	171.02018114	172.37512108	173.72745757	175.07724022	176.42451710	177.76933484
36	174.26912178	175.62742097	176.98312679	178.33628802	179.68695199	181.03516456
37	177.51393932	178.87549041	180.23445870	181.59089215	182.94483733	184.29633938
38	180.75487503	182.11957599	183.48170513	184.84130964	186.19843530	187.55312656
39	183.99215115	185.35990488	186.72509816	188.08777738	189.44798760	190.80577256
40	187.22597276	188.59668678	189.96485204	191.33051418	192.69371751	194.05450508
41	190.45652945	191.83011558	193.20116495	194.56972242	195.93583160	197.29953486
42	193.68399678	195.06037090	196.43422049	197.80558969	199.17452140	200.54105730
43	196.90853763	198.28761937	199.66418906	201.03829009	202.40996468	203.77925385
44	200.13030329	201.51201586	202.89122904	204.26798550	205.64232679	207.01429327
45	203.34943455	204.73370449	206.11548785	207.49482664	208.87176169	210.24633275
46	206.56606259	207.95281958	209.33710295	210.71895401	212.09841296	213.47551892
47	209.78030982	211.16948648	212.55620260	213.94049883	215.32241471	216.70198873
48	212.99229059	214.38382234	215.77290674	217.15958376	218.54389231	219.92587029
49	216.20211189	217.59593679	218.98732759	220.37632361	221.76296316	223.14728353
50	219.40987392	220.80593250	222.19957030	223.59082600	224.97973730	226.36634091
51	222.61567065	224.01390580	225.40973352	226.80319189	228.19431799	229.58314798
52	225.81959029	227.21994712	228.61790991	230.01351612	231.40680227	232.79780394
53	229.02171574	230.42414146	231.82418655	233.22188788	234.61728138	236.01040209
54	232.22212500	233.62656883	235.02864544	236.42839111	237.82584122	239.22103029
55	235.42089152	236.82730456	238.23136379	239.63310492	241.03256278	242.42977134
56	238.61808453	240.02641969	241.43241443	242.83610390	244.23752240	245.63670339
57	241.81376937	243.22398126	244.63186610	246.03745850	247.44079222	248.84190021
58	245.00800772	246.42005259	247.82978375	249.23723526	250.64244038	252.04543156
59	248.20085791	249.61469354	251.02622876	252.43549711	253.84253134	255.24736340
60	251.39237510	252.80796076	254.22125926	255.63230363	257.04112612	258.44775821