

双曲型の流体方程式に対するエルミート 特性有限要素法の開発と評価

奥村 弘

Development and Evaluation of Hermite Element Based Characteristic Finite
Element Method for the Hyperbolic Equation of Flow Problems

Hiroshi OKUMURA

E-mail: okumura@itc.u-toyama.ac.jp

Abstract

This paper presents a new characteristic finite element formulation, named semi-Lagrange Galerkin (SLG) method, on unstructure triangle/tetrahedral meshes to solve two- or three-dimensional hyperbolic flow problems. In the present method, the calculation procedure is divided into two phases which are advection and non-advection phases. The advection phase is computed by the semi-Lagrange procedure using a 10 or 20 degrees of freedom triangular/tetrahedral element which consists of complete cubic polynomials given by function values and first order derivatives on each vertex and a function value on barycenter of triangle surface. The non-advection phase is calculated by the Galerkin finite element procedure using the same 10 DOF triangular or 20 DOF tetrahedral element. Numerical experiments are investigated and some numerical results are shown.

キーワード：双曲型流れ問題，エルミート要素，特性 Galerkin 法，有限要素法

Keywords: Hyperbolic flow, Hermite element, characteristic Galerkin, FEM

1 はじめに

流体の流れ問題の支配方程式には，移流項と拡散項が含まれ，そのどちらかが卓越するかによって流れの特性が変化する．流れ問題の数値計算では，その特性に応じて適切な手法を選択する必要がある．特に移流が卓越する場合，移流項に対して中心差分的近似を行うと解が不安定になりやすく，これを解決するためにさまざまな手法が提案されている．これらの手法を大きく分類すると，風上法と特性法にわけられる．本論文では，近年さまざまな高精度な手法が開発されている特性法に着目する．特性法に基づく代表的な手法には，風上側の物理量の分布を局所 Hermite 補間によって近似し，semi-Lagrange 法によって移流計算を行う CIP (cubic-interpolated pseudoparticle/propagation) 法 [1] がある．また，有限要素法では，時間微分項と移流項を Lagrange 微分の形で表し，その項を差分近似し，Galerkin 法によって離散化する特性有限要素法 (characteristic/Lagrange Galerkin method) [2, 3, 4, 5] がある．本論文では，この二つの手法に着目し，移流計算と非移流計算を分離し，移流計算を事前に行う semi-Lagrange 法を特性有限要素法に組み込んだ新しい手法を semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法 [6] として提案する．具体的には，semi-Lagrange 法で必要となる物理量の補間を有

限要素法における要素による内挿補間としてとらえ、物理量の導関数値を自由度に含む Hermite 型要素を semi-Lagrange 法による移流計算に適用する．さらに、非移流計算でも、同様の要素を適用し、Galerkin 法によって離散化する．

SLG 法では、Hermite 型要素を移流・非移流計算に適用することによって、CIP 法の考えを非構造格子に拡張でき、非移流計算でも高精度化が可能である．また、Hermite 型要素には自由度に導関数値が含まれることから、CIP 法 [1] および CIP 法から派生した手法 (multi-moment 法) [7, 8, 9] のように支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がなくなる．なお、CIP 法を高精度展開した IDO (interpolated differential operator) 法 [7] では、拡散項の高精度化のために 5 次補間を用いているが、非構造格子への適用は難しい．さらに、SLG 法では、semi-Lagrange 法によって事前に移流計算による解を投影していることから、Galerkin 法によって非移流計算を行う段階で、特性有限要素法で必要になる合成関数の積分が現れないという特長がある．

本論文では、2 次元移流拡散方程式に対して、各頂点での関数値と 1 階導関数値および要素重心での関数値を自由度とする 10 自由度の Hermite 型三角形 3 次要素 [10, 11] を用い、semi-Lagrange 法を Rui & Tabata による時間 2 次精度の特性有限要素法 [5] に組み込んだ SLG 法を開発する．また、双曲型方程式に代表される移流の卓越した流れ問題に対するいくつかの数値実験を行い、計算精度を評価することによって、SLG 法の有効性を明らかにする．

1.1 双曲型方程式

境界 $\Gamma \equiv \partial\Omega$ を有する領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) において、ベクトル関数 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ に関する移流拡散方程式を考える．

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{on } \Gamma \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 ν は拡散係数 ($\nu \geq 0$)、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ は外力である．なお、 \mathbf{u} は、発散条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を満足するものとする．式 (1) の第 2, 3 式により境界条件および初期条件を与える．

1.2 特性法

時間 t に位置 \mathbf{x} にある仮想流体粒子の時間 τ での位置を $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau)$ とすると、特性曲線上の軌跡は、以下のような常微分方程式によって表される．

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau) \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t; t) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (2)$$

式 (1) の時間微分項 (第 1 項) と移流項 (第 2 項) は、以下のような Lagrange 微分の形で表すこともできる．

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{d}{d\tau} \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau) \Big|_{\tau=t} \quad (3)$$

特性法では、時間増分を Δt として、式 (3) を以下のように近似する。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x})$ は $t^{n+1}(\equiv (n+1)\Delta t)$ でのベクトル関数、 $\mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ は $t^n(\equiv n\Delta t)$ での \mathbf{x} を起点とした特性曲線上の上流点の位置 $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})(\equiv \mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^n))$ でのベクトル関数であり、合成関数として表される。

$$\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^{n+1}), t^{n+1}) \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^n), t^n) \quad (6)$$

$\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ は、式 (2) を時間積分することによって求められる。全時間での $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が既知であれば時間 4 次精度の Runge–Kutta 法などの高精度な方法を用いることができるが、Navier–Stokes 方程式のように移流項が非線形になる場合には、反復計算なしに $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+1})$ を得ることができない。そこで、本論文では、 $t^{n+\frac{1}{2}}(\equiv (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ での移流速度 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})(\equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t^{n+\frac{1}{2}}))$ または以下のような時間 2 次精度の Adams–Bashforth 法による近似を用いる多段法によって $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ を求める。

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} (3\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})) \quad (7)$$

上流点の位置を求めるには、まず、 $\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{X}^n(\mathbf{x})}{2}, t^{n+\frac{1}{2}}\right)$ での移流速度を以下のような反復計算によって求める。

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{u}^*\left(\mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}^{(m-1)}\right) & (m = 1, 2, \dots) \\ \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (8)$$

$m = 1$ でも時間 2 次精度となるため、 m は少ない反復数で十分である。本論文では $m = 2$ としている。つぎに、時間 2 次精度の上流点の位置を以下のように求める。

$$\mathbf{X}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \Delta t \mathbf{u}^{(m)} + O(\Delta t^2) \quad (9)$$

1.3 Semi–Lagrange Galerkin (SLG) 法

式 (1) の時間 2 次精度となるような特性法による時間方向の離散化は、 $\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{X}^n(\mathbf{x})}{2}, t^{n+\frac{1}{2}}\right)$ で式 (1) を評価するように拡散項 (第 3 項) および外力項 (右辺項) に時間 2 次精度の Crank–Nicolson 法を適用することによって、以下のように行われる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{2} (\Delta \mathbf{u}^{n+1} + \Delta \mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n) = \frac{1}{2} (\mathbf{f}^{n+1} + \mathbf{f} \circ \mathbf{X}^n) \quad (10)$$

SLG 法では、移流計算と非移流計算を分離し、移流計算を事前に行う semi–Lagrange 法を適用する。式 (10) の第 1 項を 0 とし、さらに、移流計算による解の更新を $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ とすると、移流計算は以下のように行われる。

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \quad (11)$$

これは、 $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ での値を \mathbf{x} に投影していると考えられる。また、式 (10) の外力項の $\mathbf{f} \circ \mathbf{X}^n$ も同様に扱う。

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \quad (12)$$

非移流計算では、式 (10) の第 2 項の $\Delta \mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n$ を単に $\Delta \tilde{\mathbf{u}}$ と置き換えると完全な時間 2 次精度とならない。そこで、1.5.3 の式 (32) のように扱う。式 (11), (12), (32) を式 (10) に代入することによって、以下のような非移流計算における時間方向の離散式が得られる。

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} - \frac{\nu}{2} (\Delta \mathbf{u}^{n+1} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}) - \frac{\nu \Delta t}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j^*}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_j} \right) \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{f}^{n+1} + \tilde{\mathbf{f}}) \quad (13)$$

拡散項を時間 2 次精度化するには、式 (13) の第 3 項のような付加項が必要になる。式 (13) の空間方向の離散化には Galerkin 法を適用する。

ところで、Rui & Tabata による時間 2 次精度の特性有限要素法 [5] では、式 (10) の第 1 項と外力項はそのまま、第 2 項の $\Delta \mathbf{u} \circ \mathbf{X}^n$ を 1.5.3 の式 (31) のように扱い、空間方向の離散化に Galerkin 法を適用している。この場合、有限要素法による定式化に必要な積分に合成関数が含まれる。通常はこの積分に対して数値積分が行われる。SLG 法の場合、 $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ での値を \mathbf{x} に投影しているため、合成関数の積分が現れない。

移流計算を精度よく行うためには、CIP 法 [1] の考えに従い、物理量の分布を高次の補間関数を用いて近似する必要がある。本論文では、この高次補間に Lagrange 要素を用いるのではなく、有限要素法による構造解析分野の板曲げ問題において考案された導関数値を自由度に含む Hermite 型要素を適用する。さらに、本論文では、非移流計算においても、移流計算と同様の要素を適用し、Galerkin 法によって離散化する。この方法によれば、要素の自由度に導関数値が含まれるため、CIP 法 [1] のように、支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がなくなる。また、移流・非移流計算とも同様の物理量の補間が行われ、精度が損なわれないと考えられる。

計算効率の面では、連立 1 次方程式を解くのは非移流計算のみであり、さらに、行列が対称となる点において優れている。また、移流計算では、 $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ が \mathbf{x} と大きく離れていても解の更新が可能である。よって、CFL 条件に制約されない大きな Δt を選ぶことができ、安定性の面でも優れている。

1.4 Hermite 型三角形 3 次要素

本論文では、有限要素に図 1 に示すような三角形要素の頂点 \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, 3$) での関数値 \mathbf{u}_i とその 1 階導関数値 $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \Big|_i \right)$ 、さらに、要素の重心 \mathbf{x}_e での関数値 \mathbf{u}_e を自由度とする 10 自由度の Hermite 型三角形 3 次要素 [10, 11] を用いる。この要素は、完全 3 次補間となり、面積座標 L_i によって補間関数を陽的表示できる。なお、CIP 法から派生した CIVA 法 [8] では、図 1 の要素から \mathbf{u}_e を除いた 9 自由度の三角形要素を用いている。この要素は 3 次補間を行うには条件が一つ足らず、不完全 3 次補間となる。

Ω における有限要素近似を \mathbf{u}_h 、要素ごとの三角形領域 Ω_e における有限要素近似を $\mathbf{u}_h|_{\Omega_e}$ とすると、 $\mathbf{u}_h|_{\Omega_e}$ は、以下のように表される。

$$\mathbf{u}_h|_{\Omega_e} = \mathbf{H}_e^T \mathbf{U}_e \quad (14)$$

$$\mathbf{H}_e = \begin{bmatrix} H_{0i}, & H_{xi}, & H_{yi}, & H_{0e} \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$\mathbf{U}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i, & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \Big|_i, & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \Big|_i, & \mathbf{u}_e \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

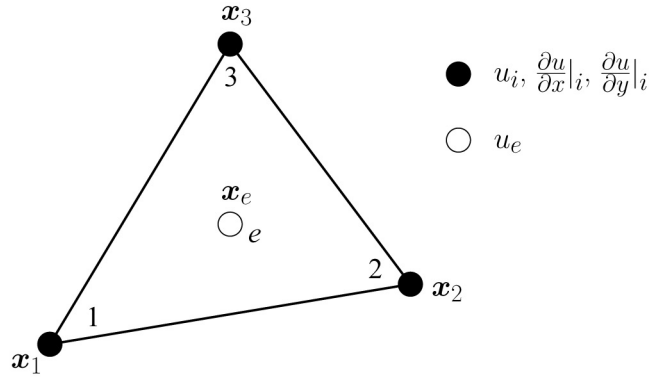


図 1: 10 自由度の Hermite 型三角形 3 次要素

ここで, H_{0i} , H_{xi} , H_{yi} , H_{0e} は補間関数であり, L_i の関数によって以下のように表される.

$$\begin{cases} H_{0i} = L_i^2 (3 - 2 L_i) - 7 L_1 L_2 L_3 \\ H_{xi} = L_i^2 (x_{ji} L_j - x_{ik} L_k) - (x_{ji} - x_{ik}) L_1 L_2 L_3 \\ H_{yi} = L_i^2 (y_{ji} L_j - y_{ik} L_k) - (y_{ji} - y_{ik}) L_1 L_2 L_3 \\ H_{0e} = 27 L_1 L_2 L_3 \end{cases} \quad (17)$$

ここで, (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の偶置換であり, $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ である.

1.5 数値計算の具体的手順

具体的な SLG 法による数値計算法について, 移流計算と非移流計算にわけて説明する.

1.5.1 移流計算

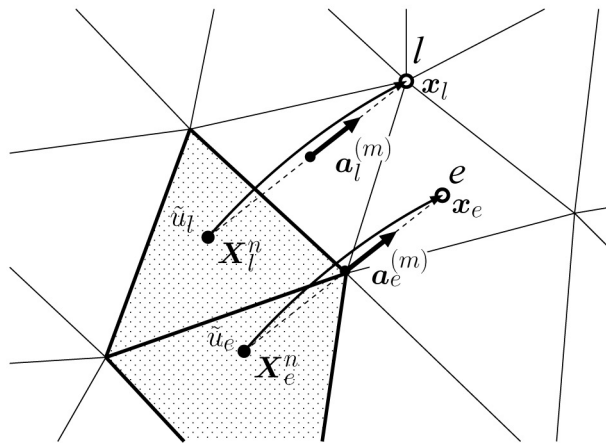


図 2: 移流計算の概略

図 2 に示すように, 節点 l ($1 \leq l \leq N_{nd}$) の位置を x_l , 要素 e ($1 \leq e \leq N_{el}$) の重心位置を x_e , それぞれの上流点の位置を X_l^n , X_e^n , また, 中間点での移流速度を $u_l^{(m)}$, $u_e^{(m)}$ とする.

上流点の位置を求めるには、まず、式 (8) に基づき $\mathbf{u}_l^{(m)}$, $\mathbf{u}_e^{(m)}$ を式 (14) による補間によって以下のように求める。

$$\begin{cases} \mathbf{u}_l^{(m)} = \mathbf{u}_h^*(\mathbf{x}_l - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}_l^{(m-1)}) \\ \mathbf{u}_e^{(m)} = \mathbf{u}_h^*(\mathbf{x}_e - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}_e^{(m-1)}) \\ \mathbf{u}_l^{(0)} = \mathbf{u}_l^*, \quad \mathbf{u}_e^{(0)} = \mathbf{u}_e^* \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

ここで、 \mathbf{u}_l^* , \mathbf{u}_e^* は \mathbf{u}_h^* を構成する l および e での関数値である。つぎに、式 (9) に基づき \mathbf{X}_l^n , \mathbf{X}_e^n を以下のように求める。

$$\mathbf{X}_l^n = \mathbf{x}_l - \Delta t \mathbf{u}_l^{(m)}, \quad \mathbf{X}_e^n = \mathbf{x}_e - \Delta t \mathbf{u}_e^{(m)} \quad (19)$$

移流計算による式 (11) に基づく l および e での関数値の更新は、式 (14) による補間によって以下のように行われる。

$$\tilde{\mathbf{u}}_l = \mathbf{u}_h \circ \mathbf{X}_l^n, \quad \tilde{\mathbf{u}}_e = \mathbf{u}_h \circ \mathbf{X}_e^n \quad (20)$$

また、 l での 1 階導関数値の更新は、CIP 法 [1] のように支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式から求めるのではなく、式 (14) による 1 階導関数値の補間と 1.5.3 の式 (28) により以下のように行われる。

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \right|_l = \left(\delta_{ij} - \Delta t \left. \frac{\partial \mathbf{u}_j^*}{\partial x_i} \right|_l \right) \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial x_j} \circ \mathbf{X}_l^n \quad (21)$$

ここで、 $\left. \frac{\partial \mathbf{u}_j^*}{\partial x_i} \right|_l$ は \mathbf{u}_h^* を構成する l での 1 階導関数値である。これらの手順により $\tilde{\mathbf{u}}_h$ が得られ、 $\tilde{\mathbf{f}}_h$ も同様の手順により得られる。

移流計算による解の更新を一つのベクトル $\tilde{\mathbf{U}}$ にまとめると、以下ようになる。

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\tilde{\mathbf{u}}_l, \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} \right|_l, \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial y} \right|_l, \tilde{\mathbf{u}}_e \right]^T \quad (l = 1, 2, \dots, N_{nd}, \quad e = 1, 2, \dots, N_{el}) \quad (22)$$

1.5.2 非移流計算

\mathbf{u}_h と同様の有限要素空間の重み関数 \mathbf{w}_h を式 (13) に乗じ、 Ω で積分することによって、以下のような Galerkin 法による弱形式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h}{\Delta t} d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{w}_h : (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}_h) d\mathbf{x} \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{ih}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_{jh}^*}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mathbf{w}_h}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_h}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{w}_h \cdot (\mathbf{f}_h^{n+1} + \tilde{\mathbf{f}}_h) d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w}_h \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、第 3 項の導出には、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を考慮した部分積分が施されている。

式 (23) の有限要素方程式は以下のようになり、連立 1 次方程式の行列が対称となる。

$$\left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \right] \mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2} \mathbf{M} (\mathbf{F}^{n+1} + \tilde{\mathbf{F}}) + \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - \frac{1}{2} \mathbf{D} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R} \right] \tilde{\mathbf{U}} \quad (24)$$

ここで, \mathbf{U}^{n+1} , \mathbf{F}^{n+1} , $\tilde{\mathbf{F}}$ は式 (22) と同じように表され, 各係数行列は以下ようになる.

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \mathbf{H}_e \mathbf{H}_e^T d\mathbf{x} \\ \mathbf{D} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \nu \frac{\partial \mathbf{H}_e}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{H}_e^T}{\partial x_i} d\mathbf{x} \\ \mathbf{R} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \nu \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{ih}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_{jh}^*}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mathbf{H}_e}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{H}_e^T}{\partial x_j} d\mathbf{x} \end{cases} \quad (25)$$

ここで, $\sum_{e=1}^{N_{el}}$ は要素ごとの係数行列の全体系への重ね合わせを表す.

式 (24) の総自由度数は, $N_{nd} \times 3 + N_{el}$ となるが, 要素ごとの自由度 u_e^{n+1} は, 静的縮約 (static condensation) によって消去することができる.

1.5.3 補足：合成関数の導関数

SLG 法では, $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ での値を \mathbf{x} に投影しているために, 合成関数の導関数の扱いに注意を要する. はじめに, 式 (11) のように扱った場合, $\nabla \tilde{u}$ について考える. $\nabla \tilde{u}$ は以下のようになる.

$$\nabla \tilde{u} = \frac{\partial X_j^n}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ \mathbf{X}^n \quad (26)$$

ここで, $\frac{\partial X_j^n}{\partial x_i}$ は式 (9) により以下のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_j^n}{\partial x_i} &= \delta_{ij} - \Delta t \frac{\partial u_j^*(\mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{u}^{(m-1)})}{\partial x_i} + O(\Delta t^2) \\ &= \delta_{ij} - \Delta t \frac{\partial u_j^*(\mathbf{x})}{\partial x_i} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (27)$$

式 (27) を式 (26) に代入すると, $\nabla \tilde{u}$ は以下のようになる.

$$\nabla \tilde{u} = \nabla u \circ \mathbf{X}^n - \Delta t \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ \mathbf{X}^n + O(\Delta t^2) \quad (28)$$

また, $\nabla u \circ \mathbf{X}^n$ について考える. 式 (28) の右辺第 1 項を左辺に移項すると, $\nabla u \circ \mathbf{X}^n$ が得られる.

$$\nabla u \circ \mathbf{X}^n = \nabla \tilde{u} + \Delta t \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ \mathbf{X}^n + O(\Delta t^2) \quad (29)$$

式 (29) の下線部に式 (29) そのものを代入して整理すると, $\nabla u \circ \mathbf{X}^n$ が \tilde{u} によって表される.

$$\nabla u \circ \mathbf{X}^n = \nabla \tilde{u} + \Delta t \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} + O(\Delta t^2) \quad (30)$$

つぎに, $\Delta u \circ \mathbf{X}^n$ について考える. 式 (30) の右辺の $u \circ \mathbf{X}^n$ を $\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ \mathbf{X}^n$, 左辺の \tilde{u} を $\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ \mathbf{X}^n$ に置き換えると, $\Delta u \circ \mathbf{X}^n$ が得られる.

$$\Delta u \circ \mathbf{X}^n = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ \mathbf{X}^n \right) \Big|_{\mathbf{x}} + \Delta t \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ \mathbf{X}^n \right) \Big|_{\mathbf{x}} + O(\Delta t^2) \quad (31)$$

ここで、下線部の微分は \mathbf{X}^n 点での微分であり、下線部外側の微分は \mathbf{x} 点での微分である。また、右辺第2項の i と j は交換している。さらに、式 (31) の下線部に式 (30) を代入して整理すると、 $\Delta u \circ \mathbf{X}^n$ が \tilde{u} によって表される。

$$\Delta u \circ \mathbf{X}^n = \Delta \tilde{u} + \Delta t \left[\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \right) \right] + O(\Delta t^2) \quad (32)$$

2 数値実験による SLG 法の精度検証

ここでは、本論文にて提案した SLG (Semi-Lagrange Galerkin) 法 [6] を精度と数値安定性を検証するために、双曲型方程式に対する幾つかの数値実験を通じて検証する。

2.1 Burgers 方程式（一方向衝撃波問題）

スカラーの保存変数 u に対する 1 次元 Burgers 方程式は次式の初期値問題として表される。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0, & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (33)$$

ここで、 $T > 0$ は時間である。保存型方程式 (33) の第一式は、プリミティブ変数 u を未知量とする以下の非保存型の方程式に変形することができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (34)$$

この得られた Burgers 方程式 (34) も非線形の微分方程式である。従来のコンピューター・シミュレーションでは、この双曲型方程式を精度よく数値安定性に優れて解くことが難しかった。本研究で提案する SLG 法の有効性を検証するために、まずはこの Burgers 方程式 (34) の数値実験を行う。計算領域 $\Omega = (0, 1) \times (0, 0.01)$ において、時刻 $t = 0$ における初期条件 $u^0 = \sin(2\pi x)$ を与えたときの数値実験を行う。有限要素分割は $x_1 = x$ 方向に 200 分割、 $x_2 = y$ 方向に 4 分割とし、時間増分 $\Delta t = 0.02$ を与える。このとき、最大のクーラン数¹は $CFL = 2$ となる。時刻 $T = 0.4$ までの計算結果を図 3 に示す ($y = 0$ 面)。この問題では、解の非線形性もさることながら、 $x = 0.5$ で発生する衝撃波を捕捉するための精度と数値安定性が重要となる。図 3 から分かるように、SLG 法で与える計算結果では、高いクーラン数でも数値振動が発生することなく、高い精度で衝撃波を捉えていることが分かる。なお、 y 方向全てにおいて同一の計算結果が得られており、SLG 法では計算メッシュの分割と形状に対する依存性が低いため、解の対称性を崩すことなく計算を行うことができる。このことは、多次元問題における方向分離の適用性にも優れていることを示している。

¹クーラン数 (Courant number) CFL とは流体の数値シミュレーションの際に必要な無次元数。クーラン数は移流方程式の安定性を評価する上で大変重要な無次元数で、通常のシミュレーションでは $CFL \leq 1$ であることが必要となる。これを CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy Condition) とも呼ばれている。

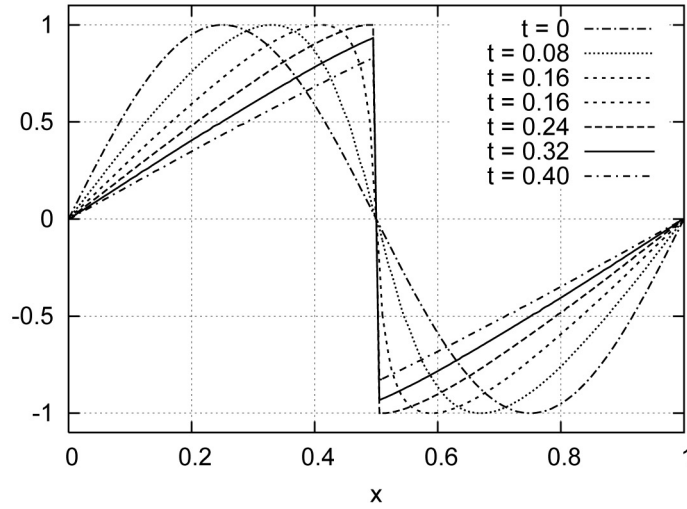


図 3: 一方向衝撃波問題 (Burgers 方程式) の計算結果 (縦軸は近似解 u)
($CFL = 2$; 初期条件および時刻 $t = 0.08, 0.16, 0.24, 0.32, 0.4$) を表示

2.2 複雑な初期条件に対する Burgers 方程式の数値実験

次式に示す保存型 Burgers 方程式と複雑な初期条件における数値実験 [16] を行う.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u U^0(x), & \text{periodic on } \partial\Omega \end{cases} \quad (35)$$

空間 $\Omega = (-1, 1) \times (0, 0.01)$ において, 初期条件は文献 [16] で使われたベンチマークを用いる. なお, 境界条件は周期境界条件を与える. 以下が複雑な初期条件である.

$$U^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} (G(x, \beta, z - \delta) + G(x, \beta, z + \delta) + 4G(x, \beta, z)) & (-0.8 \leq x \leq -0.6) \\ 1 & (-0.4 \leq x \leq -0.2) \\ 1 - |10(x - 1)| & (0.0 \leq x \leq 0.2) \\ \frac{1}{6} (F(x, \alpha, a - \delta) + F(x, \alpha, a + \delta) + 4F(x, \alpha, a)) & (0.4 \leq x \leq 0.6) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (36)$$

ここで, $G(x, \beta, z) = \exp(-\beta(x - z)^2)$, $F(x, \alpha, a) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2(x - a)^2)}$, また定数は $a = 0.5$, $z = -0.7$, $\delta = 0.005$, $\alpha = 10$, $\beta = \frac{\log 2}{36\delta^2}$ である.

空間のメッシュ分割は, 均等な 200 分割を与える (メッシュ・サイズ $\Delta x = 0.01$). $T = 1$ (1 周期後) の計算結果を示す. なお, クーラン数 $C_r = CFL$ を選んだ時, 時間増分量 Δt は $\Delta t = C_r \Delta x$ とし, 時間ステップ n は $n = 0, 1, 2, \dots, [T/\Delta t]$ で与える. 図 4 の計算結果が示しているように, SLG 法は階段状の不連続解に対しても数値安定性に優れており, 連続解あるいは尖端のような分布にも高解像かつ高精度であるといえる.

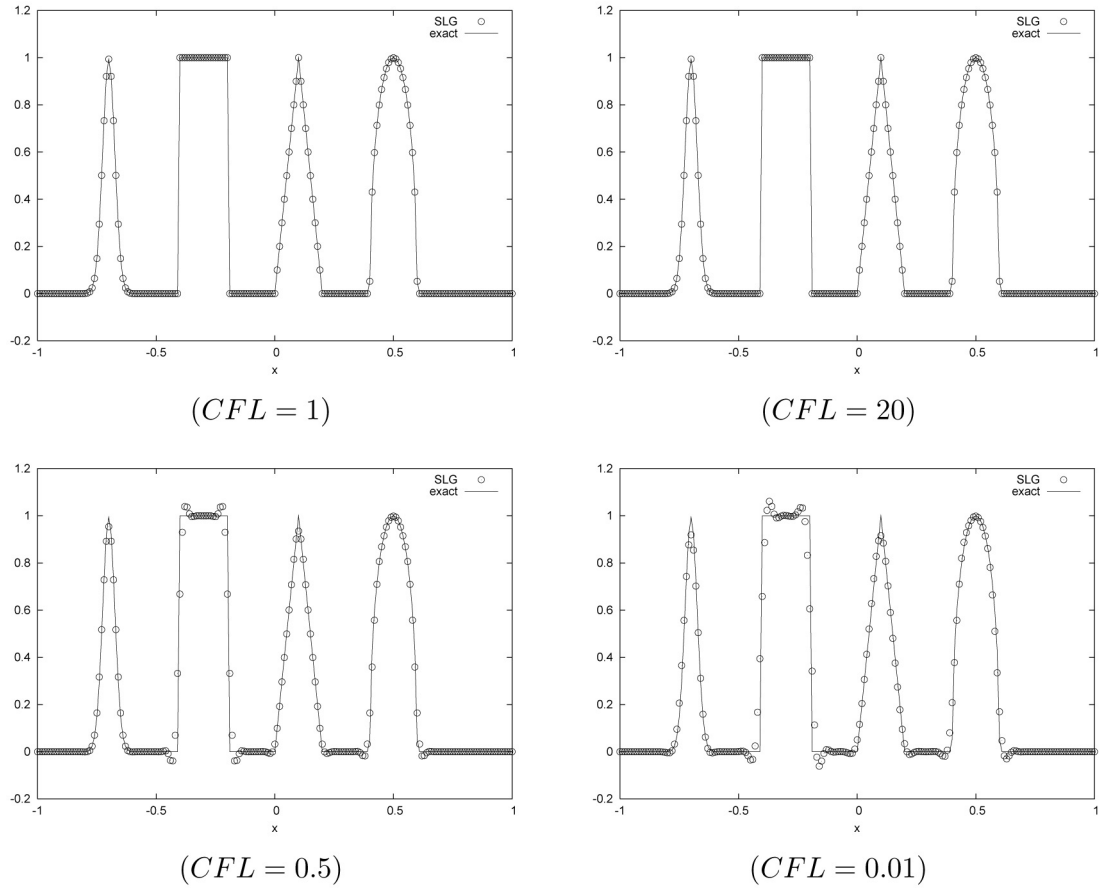


図 4: 複雑な初期条件に対する非保存型移流問題（Burgers 方程式）の数値実験 [16]

さらに、この数値実験により SLG (Semi-Lagrange Galerkin) 法 [6] は以下の数値特性を考察することができる。

- 1次元移流問題において SLG 法が与える計算結果は、精度、安定性、そして初期分布形状の保存性のすべてにおいて優れている。
- 1次元移流問題では、クーラン数が $CFL = 1$ および、その整数倍 $CFL = 1, 2, 3, \dots$ のとき、節点で厳密解が得られる。
- クーラン数が小さい時、不連続点近傍において、高周波成分の若干の減衰が見られる。
- クーラン数が小さい時、不連続点近傍において、若干のオーバーシュートおよびアンダーシュートが見られる。しかしながら、これは時間発展とともに増幅しないため安定である。

2.3 2次元移流問題の数値実験 [16]

ここでは、2次元の移流テストを行う。スカラー関数 $u = u(\mathbf{x}, t)$ に対する非保存型の移流方程式は次式のように表現することができる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0, & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (37)$$

ここで, $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ は移流速度ベクトルである. 矩形空間領域 $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ において, 流速は $\mathbf{a} = (a_x, a_y) = (-2\pi y, 2\pi x)$ と回転流速場とし, 初期条件は文献 [16] を参考にしたベンチマークを用いる. 以下が複雑な初期条件である.

$$u(\mathbf{x}, 0) = \begin{cases} \frac{1}{6} (G(r_1 + \delta, \beta) + G(r_1 - \delta, \beta) + 4G(r_1, \beta)) & (|r_1| \leq 0.2) \\ 1 & (|x| \leq 0.2, -0.8 \leq y \leq -0.4) \\ 1 - |5r_2| & (|r_2| \leq 0.2) \\ \frac{1}{6} (F(r_3 + \delta, \alpha) + F(r_3, \alpha) + 4F(r_3, \alpha)) & (|r_3| \leq 0.2) \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (38)$$

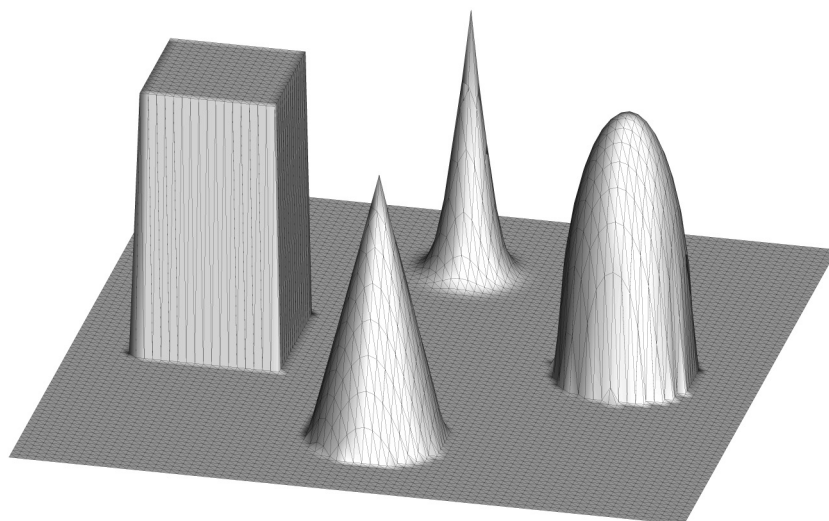
ここで, $r_1 = \sqrt{(x + 0.6)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - 0.6)^2 + y^2}$, $r_3 = \sqrt{x^2 + (y - 0.6)^2}$, $G(r, \beta) = \exp(-\beta r^2)$, $F(r, \alpha) = \sqrt{\max(1 - \alpha^2 r^2)}$, また定数は $\delta = 0.01$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{\log 2}{36\delta^2}$ である.

空間のメッシュ分割は, 均等な 200×200 分割を与える (メッシュ・サイズ $h = \Delta x = \Delta y = 0.01$). $T = 1$ (1 周期後) の計算結果を示す. なお, クーラン数 $C_r = CFL$ を選んだ時, 時間増分量 Δt は $\Delta t = \frac{C_r}{\|\mathbf{a}\|} \Delta x$ とし, 時間ステップ n は $n = 0, 1, 2, \dots, [T/\Delta t]$ で与える. なお, SLG 法との比較のために, 有限要素流体シミュレーションで一般的に用いられる SUPG (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin) 法 [14, 15] の計算結果も示す. 図 5 の計算結果が示しているように, SUPG 法の計算結果では, 解が大きく減衰し (散逸誤差), 大きな位相誤差²が生じていることが確認できるが, 一方, SLG 法は階段状の不連続解に対しても数値安定性に優れており, 連続解あるいは尖端のような分布にも高解像かつ高精度であるといえる.

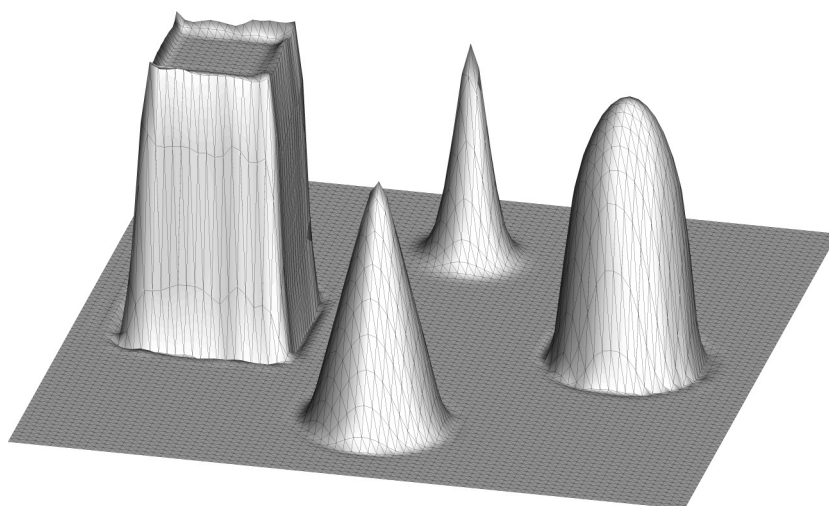
3 おわりに

本研究では, 流体解析における CIP 法と特性有限要素法に着目することにより, 高精度な計算力学手法として Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 特性有限要素法を開発した. この中で, Semi-Lagrange 法で必要となる物理量の補間を有限要素法における要素による内挿補間としてとらえ, 物理量の導関数値を自由度に含む Hermite 型要素を semi-Lagrange 法による移流計算に適用し. さらに, 非移流計算でも, 同様の要素を適用し, Galerkin 法によって離散化することにより高精度な流体解析手法の開発に成功した. SLG 法では, Hermite 型要素を移流・非移流計算に適用することによって, 非構造格子に拡張でき, 非移流計算でも高精度化が可能である. また, Hermite 型要素には自由度に導関数値が含まれることから, CIP 法および CIP 法から派生した手法 (multi-moment 法) のように支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がなくなるといった大きな利点がある. さらに, SLG 法では, semi-Lagrange 法によって事前に移流計算による解を投影していることから, Galerkin 法によって非移流計算を行う段階で, 特性有限要素法で必要になる合成関数の積分が現れないという別の利点もある. 以上を踏まえると, 本手法は非圧縮性・圧縮性の流体解析の統一解法

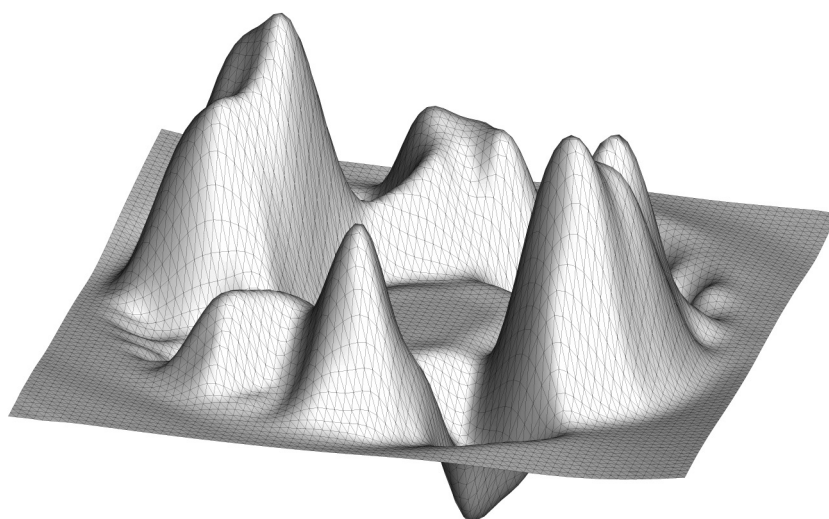
² 双曲型方程式における 1 階の空間微分項は分散性を表す. ここで, 分散性とは周波数によって波の伝播速度が変化する現象である. したがって, 双曲型方程式の数値計算では分散誤差が大きく働き, 数値解に含まれる周波性成分によって伝播速度が異なるため, 波形の変化を生じさせる.



厳密解（初期条件）



SLG 法 [6]



SUPG 法 [14, 15]

図 5: 2次元移流問題の数値実験 [16] により得られた計算結果（近似解 u の鳥瞰図）

へ発展させることが期待できる。従来、流体方程式における移流項の非線形問題を Lagrange 微分で表現する特性法を用いることにより克服することができる。また、圧縮性流体と津波や高潮解析における浅水波方程式には数理モデル上の類似性があることから、本手法を浅水波方程式の高精度解法として拡張することができる。他の流れ問題として、自由界面問題が近年着目されているが、界面追跡法に基づく解析では、移流計算の高い精度が求められているため、本手法は自由界面問題への適用も考えることができる。本論文では、1 階の微係数値を考慮した完全 3 次エルミート要素を利用したが、今後はさらに 2 階微係数値を考慮した 5 次 Bell 要素への拡張したい。

参考文献

- [1] 矢部 孝 他編: CIP 法 —原子から宇宙までを解くマルチスケール解法—, 森北出版 (2003)
- [2] Pironneau, O. : On the transport–diffusion algorithm and its applications to the Navier–Stokes equations, *Numerische Mathematik*, **38** (1982) 309–332
- [3] Pironneau, O. : *Finite element methods for fluids*, John Wiley & Sons, Chichester (1989)
- [4] Süli, E. : Convergence and nonlinear stability of the Lagrange–Galerkin method for the Navier–Stokes equations, *Numerische Mathematik*, **53** (1988) 459–483
- [5] Rui, H. & Tabata, M. : A second order characteristic finite element scheme for convection–diffusion problems, *Numerische Mathematik*, **92** (2002) 161–177
- [6] 奥村弘, 丸岡晃: 自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法の評価”, 応用力学論文集, Vol.12 (2009), pp.155-162
- [7] Aoki, T. : Interpolated differential operator (IDO) scheme for solving partial differential equations, *Computer Physics Communications*, **102** (1997) 132–146
- [8] Tanaka, N. : The CIVA method for mesh-free approaches; Improvement of the CIP method for n-simplex, *Computational Fluid Dynamics Journal*, **8** (1999) 121–127
- [9] Ii, S. , Shimuta, M. & Xiao, F. : A 4th-order and single-cell-based advection scheme on unstructured grids using multi-moments, *Computer Physics Communications*, **173** (2005) 17–33
- [10] Huebner, K. H. 著, 山田 嘉昭 訳: 有限要素法, 科学技術出版社 (1978)
- [11] Ciarlet, P. G. : *The finite element method for elliptic problems*, SIAM, Philadelphia (2002)
- [12] <http://maxima.sourceforge.net>
- [13] 菊池 文雄: 有限要素法概説 [新訂版] —理工学における基礎と応用—, サイエンス社 (1999)
- [14] Hughes, T. J. R., L. P. Franca and M. Mallet: A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time-dependent multi-dimensional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 63, pp.97-112 (1987)
- [15] Tezduyar, T. E. and Y. Osawa: Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, pp.411-430 (2000)
- [16] G.-S. JIANG and C.-W. SHU: Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, *J. Comput. Physics* 126, 202-228 (1996)

(2011年10月19日受付)

(2011年12月14日受理)

