

# 単振動の方程式に基づいた三角関数の離散化について

守井清吾\*・山口範和

## Discretization Procedure of the Trigonometric Functions Based on the Equation for Simple Harmonic Oscillation

Shingo MORII\*

E-mail: m0920117@ems.u-toyama.ac.jp

Norikazu YAMAGUCHI

E-mail: norikazu@edu.u-toyama.ac.jp

**概要.** 本稿では正弦関数と余弦関数の離散化について考える。これらの関数は単振動に対する微分方程式の素解として得られるという事実に注目し、対応する差分方程式を用いた離散化を行う。これにより、興味深い性質を持つ離散系関数が構成されることを報告する。

**キーワード.** 三角関数, 離散化, 差分方程式, 単振動.

**Abstract.** In this paper, we are concerned with a discretization of the trigonometric functions. Noting the fact that the sine and cosine functions are obtained as the fundamental solution of the ordinary differential equation for simple harmonic oscillation, we discretize these functions by means of a difference equation associated with that equation. We report that the discrete functions which we obtain have many fruitful properties.

**Keywords.** trigonometric functions, discretization, difference equation, simple harmonic oscillation.

## §1. はじめに

### 1.1. 関数の離散化

本稿では正弦関数  $\sin x$  と余弦関数  $\cos x$  の離散化について考える。

実数全体  $\mathbb{R}$ (またはその連結部分集合) を定義域とする関数  $f(x)$  が与えられているとする。このとき、 $f(x)$  と何らかの意味で対応を持つ様な整数全体  $\mathbb{Z}$ (またはその部分集合) を定義域とする離散系の関数  $F(n)$  を定めたい。本稿では、 $f(x)$  から何らかの手段を用いて  $F(n)$  を構成する手続きのことを関数の離散化と呼ぶ。

離散化には様々な方法が考えられる。元の関数  $f(x)$  が持っている性質のうち、何れの性質を重視して離散化をするかにより、得られる  $F(n)$  の性質は異なる。 $f(x)$  を離散化した場合、一般に得られる  $F(n)$  は元の関数  $f(x)$  の性質の全てを反映したものとはならない。これは  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{Z}$  の位相的性質の違いによるところが大きい。当然ながら、離散化に際して可能な限り  $f(x)$  の性質を損なわない方法を採用することが望ましい。

我々は Graham, Knuth & Patashnik [1, Chapter 2] のアイデアに倣い、関数の離散化を行う。彼等のアイデアは元の関数  $f(x)$  が満たす微分方程式(常微分方程式)に注目するものである。微分方程式とは未知関数とその導関数に関する方程式である(俣野 [3], 柳田・栄 [5] 等を参照)。多くの関数は、適当な微分方程式の解として得られる。この事実は微分方程式が関数の定義を与えている、と言い換えても良い。本稿の主題である三角関数も、ある線形微分方程式系の解とし

\* 富山大学大学院教育学研究科教科教育専攻数学教育専修。

て定義することが出来る. 当然ながら, 微分方程式の解として定義した三角関数は, 別の方法で定めたそれと一致する.

既に述べた様に, Graham, Knuth & Patashnik の方法は, 離散化の対象となる関数  $f(x)$  の満たす微分方程式に注目する方法である. しかし,  $\mathbb{Z}$  は離散集合であるから,  $\mathbb{Z}$  に於いては微分の定義に現れる極限操作を考えることが出来ない. そこで,  $\mathbb{Z}$  に於いて微分と対応する概念が必要となる. それを差分という. 彼等の方法は  $f(x)$  の満たす微分方程式を対応する差分方程式へ書き直し, それを解くことにより離散系関数  $F(n)$  を定める, というものである. 詳しくは項を改めて述べよう.

## 1.2. 微分と差分

Graham, Knuth & Patashnik による離散化の手法の詳細を述べる.

その為に, 先ずは滑らかな関数に対する微分法を思い出そう.  $I \subseteq \mathbb{R}$  を定義域とする実数値関数  $f(x)$  が与えられているとする. このとき,  $f(x)$  に対し演算子  $D$  を以下で定める ( $D$  を微分演算子(differential operator) という).

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1.1)$$

ここで  $h \in \mathbb{R}$  である. 各  $x \in I$  に対して, 上式の右辺の極限值が存在するとき, 関数  $f(x)$  は区間  $I$  上で微分可能であるといい,  $Df(x)$  を  $f(x)$  の導関数と呼んだ.

$h \in \mathbb{R}$  であるから, 上の様な極限操作がとれるが,  $\mathbb{Z}$  に於いては (1.1) の様な極限をとることは出来ない. そこで, (1.1) を参考にして,  $\mathbb{Z}$  に於いて類似の演算子を定めよう.  $n \in \mathbb{Z}$  とは異なるが  $n$  に最も近い点は  $n \pm 1$  の 2 点である. そこで, (1.1) に於いて  $h > 0$  であると見做し対応する操作を考えれば, 以下の定義は自然であろう.

**定義 1.1** (前進差分).  $f(n)$  を  $N \subseteq \mathbb{Z}$  を定義域とする関数とする. このとき, 演算子  $\Delta$  を以下で定める.

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \quad (n+1, n \in N). \quad (1.2)$$

$\Delta$  を前進差分演算子(forward difference operator) と呼び,  $\Delta f$  を  $f$  の前進差分(forward difference) という.

以上の準備の下に, Graham, Knuth & Patashnik [1] による関数の離散化手法を指数関数  $e^x$  の離散化を例にとり説明する. ここで,  $e = 2.718\dots$  は自然対数の底 (Napier 数) である.  $e$  を底とする指数関数は微分に関して不変である. 即ち,  $e^x$  は微分方程式

$$De^x = e^x \quad (1.3)$$

を満足する.

(1.3) を出発点として,  $e^x$  の離散化を行ってみよう.  $e^x$  と対応する  $\mathbb{Z}$  を定義域とする関数を  $E(n)$  と表す. (1.3) と対応する性質として,  $E(n)$  に前身差分演算子に関して不変であること, 即ち

$$\Delta E(n) = E(n) \quad (1.4)$$

を課す.

このとき, (1.4) を前進差分の定義式 (1.2) を用いて書き直せば, 差分方程式  $E(n+1) = 2E(n)$  を得る. まずは,  $n \geq 0$  の場合のみを考えよう. 得られた差分方程式を逐次代入によって解けば,  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $E(n) = 2^n E(0)$  を得る.  $n = 0$  に於ける値  $E(0)$  をどの様に決定するのがか問題となるが,  $e^0 = 1$  を考慮し,  $E(0) = 1$  とするのが自然であろう. よって,  $E(n) = 2^n$  を得る.  $n < 0$  に対しても同様に定義すれば良い.

勿論、話の出発点を違えば  $E(n) = 2^n$  以外の候補も考えられるが、この定義は十分に妥当なものと言ってよいだろう。実際、 $E(n) = 2^n$  とすれば、 $E(n)$  は前進差分演算子  $\Delta$  に関して不変であり、指数法則  $E(n+m) = E(n)E(m)$  を満たし、更に  $n$  に関する単調増加性  $E(n) > E(m)$  ( $n > m$ ) を持っている。従って、 $E(n) = 2^n$  は  $e^x$  の持っている性質を殆ど壊すことなく、 $\mathbb{Z}$  上の関数として定められている。

上で見た様に、指数関数に対しては、Graham, Knuth & Patashnik の方法により理想的な離散化が行われた。しかし、同じ初等関数であっても、三角関数に対して同様の方法で離散化を行っても上手くいかず、得られる離散系関数は元の  $\sin x, \cos x$  の性質の大半を反映しないものになってしまう。このことについては、§2 に於いて詳しく述べる。

### 1.3. 三角関数の性質

我々の目的は三角関数  $\sin x, \cos x$  に対して適切な離散化を行うことである。実際の離散化を論じる前に、ここで三角関数がどのような性質を持つ関数であるかを振り返っておこう。我々の目標は、以下に挙げる性質をなるべく破壊することなく、三角関数を離散化することと言い換えて構わない。

- $\sin x, \cos x$  は周期  $2\pi$  を持つ。即ち、任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対し、次を満たす。

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta. \quad (1.5)$$

この性質を三角関数の周期性と呼ぶ。

- 任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対し、

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (1.6)$$

を満たす。この性質は  $(\cos \theta, \sin \theta)$  が単位円周上の点を表していることと対応する。この性質を三角関数の等距離性と呼ぶことにする。

- $\sin x$  は奇関数であり、 $\cos x$  は偶関数である。即ち、任意の  $\theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta \quad (1.7)$$

が成立する。

- $\sin x$  と  $\cos x$  は次の関係を満たす。

$$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x. \quad (1.8)$$

- 以下の加法定理を満たす。

**定理 1.2** (加法定理). 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して、次が成立する。

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \end{aligned}$$

上記の性質以外にも、無限級数展開に関わる重要な性質があるが、ここでは省略する。

(1.8) は  $\sin x, \cos x$  が 1 階線形微分方程式系の解であることを言っている。従って、三角関数の離散化に於ける出発点の一つとして (1.8) を選ぶことが出来る。

### 1.4. 本稿の構成

§2 に於いて (1.8) を基にした三角関数の離散化を論じる。得られる離散系関数は元の  $\sin x, \cos x$  の性質を殆ど反映しないことを述べるのが目的である。

§3 に於いては、 $\sin x, \cos x$  が単振動に対する常微分方程式  $u'' = -u$  の素解であるという事実に注目し、三角関数の離散化を行い、得られる離散系関数の性質を調べる。離散化に際しては、新たに後退差分と呼ばれる概念を導入する。これにより話は §1.2 と比較して大幅に改善される。

§4 では, §2 および §3 に於いて得られた 2 種類の離散系関数の比較を行う.

## §2. 1 階微分方程式系による方法

既に述べた様に, 本稿の目的は  $\sin x, \cos x$  に対する適切な離散化を行うことにある. §1 で述べたことの繰り返しになるが, 適切な離散化, とは  $\sin x, \cos x$  の持つ性質をなるべく良く反映する様な離散系関数を構成することをいう. 以下では,  $\sin x, \cos x$  に対応する離散系関数をそれぞれ  $S(n), C(n)$  で表すことにしよう.

以下, Graham, Knuth & Patashnik [1] の方法に基づいて  $S(n), C(n)$  の導出を行う. 更に得られる離散系関数の性質を調べ, 問題点を明らかとすることが本節の目的である.

### 2.1. $S(n), C(n)$ の導出

離散化の出発点は,  $\sin x, \cos x$  に対する以下の 1 階微分方程式系である.

$$\begin{cases} D \cos x = -\sin x, \\ D \sin x = \cos x. \end{cases} \quad (2.1)$$

(2.1) を基に離散化を行うには, (2.1) と対応する差分方程式系を考えればよい. そこで,  $S(n), C(n)$  が以下の関係式を満たすとする.

$$\Delta C(n) = -S(n), \quad \Delta S(n) = C(n). \quad (2.2)$$

このとき (1.2) より, 次の線形差分方程式系を得る.

$$\begin{cases} C(n+1) = C(n) - S(n), \\ S(n+1) = C(n) + S(n). \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで,  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  とおけば, (2.3) は

$$\begin{bmatrix} C(n+1) \\ S(n+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} C(n) \\ S(n) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

と書ける. 従って,  $A^n$  の表示がわかれば, 初期値  $C(0), S(0)$  を用いて  $C(n), S(n)$  を  $n$  について閉じた形で表現出来る. そこで,  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して,  $A^n$  の表示を求めよう. ここで  $\mathbb{N}$  は自然数の全体を表す. その為に,  $A$  を次の様書き直す.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}.$$

上の表示からわかる様に,  $A$  は拡大回転行列であるから, de Moivre の定理を用いれば次を得る.

$$A^n = 2^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{n}{4}\pi & -\sin \frac{n}{4}\pi \\ \sin \frac{n}{4}\pi & \cos \frac{n}{4}\pi \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

(2.4) より,  $C(0), S(0)$  を用いれば,  $n \in \mathbb{N}$  に対する  $C(n), S(n)$  の  $n$  について閉じた表示を得る.  $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$  であることを考慮すれば初期値は  $C(0) = 1, S(0) = 0$  とするのが自然であろう. このとき, (2.4) と (2.5) より

$$C(n) = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{4}\pi, \quad S(n) = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{4}\pi \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.6)$$

を得る. (2.6) が 1 階線形微分方程式系 (2.1) を基に, 三角関数を離散化したものである. なお, (2.6) の定義域は  $n \in \mathbb{N}_0$  としたが, 自然に  $\mathbb{Z}$  全体へ拡張される.

## 2.2. $S(n), C(n)$ の性質

§ 2.1 に於いて得られた  $S(n), C(n)$  はどの程度, 元の関数  $\sin x, \cos x$  の性質を反映したものとなっているだろうか. § 1.3 で述べた諸性質との対応を調べよう.

**周期性.** (2.6) の表示より, 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して, 適当な  $k \in \mathbb{N}$  が存在して

$$S(n+k) = S(n), \quad C(n+k) = C(n)$$

とはならない. 即ち, (2.6) は周期性を持たない. しかし, (1.5) に注意すれば, 次の関係を満たすことは容易にわかる.

$$S(n \pm 8) = 2^{\pm 4} S(n), \quad C(n \pm 8) = 2^{\pm 4} C(n).$$

上の関係より,  $2^4$  による拡大・縮小を無視すれば, 周期性があると見做すことも出来る. 言い換えれば, 原点  $O$  と点  $(C(n), S(n))$  を結ぶ線分と  $x$  軸のなす角を  $\arg(C(n), S(n))$  と書くとき, 次が成立する (図 2.1 を参照).

$$\arg(C(n \pm 8), S(n \pm 8)) = \arg(C(n), S(n)).$$

**等距離性.** (1.6) に相当する性質を調べてみよう. (1.6) と (2.6) より, 任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$C(n)^2 + S(n)^2 = 2^n \cos^2 \frac{n}{4} \pi + 2^n \sin^2 \frac{n}{4} \pi = 2^n$$

を得る. よって  $C(n), S(n)$  は等距離性を持たない.

**奇関数・偶関数性.** (1.7) に相当する性質を持つか調べる. 即ち,  $C(-n) = C(n), -S(-n) = S(n)$  を満たすかどうか検証すれば良い. (2.6) より,

$$\begin{aligned} C(-n) &= 2^{-\frac{n}{2}} \cos \frac{(-n)}{4} \pi = 2^{-\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{4} \pi, \\ -S(-n) &= -2^{-\frac{n}{2}} \sin \frac{(-n)}{4} \pi = 2^{-\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{4} \pi \end{aligned}$$

となり,  $C(n), S(n)$  は共に (1.7) に相当する性質を持たない.

**加法定理.** 加法定理を満たすか検証する.  $n, m \in \mathbb{N}$  とする. このとき, 定理 1.2 と指数法則より

$$\begin{aligned} S(n+m) &= 2^{\frac{m+n}{2}} \sin \frac{n+m}{4} \pi \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{4} \pi 2^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m}{4} \pi + 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{4} \pi 2^{\frac{m}{2}} \sin \frac{m}{4} \pi \\ &= S(n)C(m) + C(n)S(m), \\ C(n+m) &= 2^{\frac{n+m}{2}} \cos \frac{n+m}{4} \pi \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{4} \pi 2^{\frac{m}{2}} \cos \frac{m}{4} \pi - 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{4} \pi 2^{\frac{m}{2}} \sin \frac{m}{4} \pi \\ &= C(n)C(m) - S(n)S(m) \end{aligned}$$

を得る. しかし,  $S(n), C(n)$  の定義に於ける 2 の冪乗の存在によって,

$$\begin{aligned} S(n-m) &\neq S(n)C(m) - C(n)S(m), \\ C(n-m) &\neq C(n)C(m) + S(n)S(m) \end{aligned}$$

となってしまう. 従って, 加法定理に相当する性質は部分的には満たされるが, 完全ではない.



本節の最後に、 $(C(n), S(n))$  を二次元平面上にプロットしたものを図 2.1 に、 $C(n), S(n)$  のグラフを図 2.2 に示す。

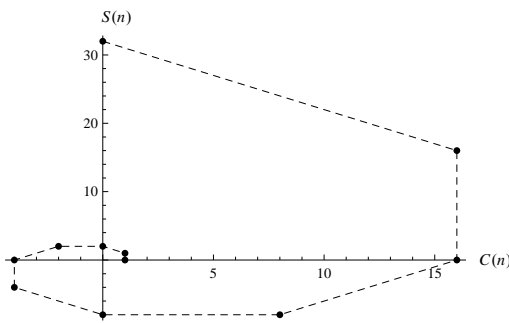


図 2.1.  $(C(n), S(n))$  の二次元平面上へのプロット ( $n = 0, 1, \dots, 10$ )

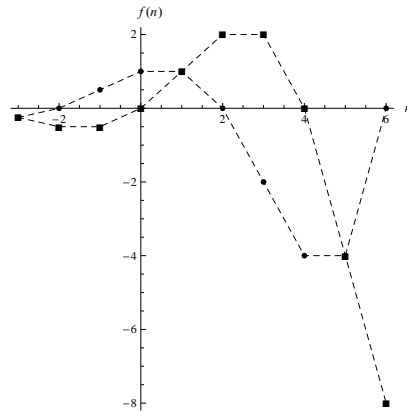


図 2.2.  $C(n)$  (●),  $S(n)$  (■) のグラフ ( $n = -3, -2, \dots, 6$ )

(2.6) からわかることであるが、 $(C(n), S(n))$  は  $n$  の増加に伴い、 $(C(0), S(0)) = (1, 0)$  から出発し、反時計回りに螺旋を描く (図 2.1)。

以上、1 階線形微分方程式系 (2.1) を基にした三角関数の離散化とそこから得られる  $S(n), C(n)$  の性質について見てきたが、三角関数が本来持っている重要な性質の殆どは失われてしまっていることがわかるだろう。上手く対応がつかなくなってしまう理由の一つとして、(2.6) の表示が 2 のべき乗を含んでいることが挙げられる。次節に於ける我々の目標は (2.1) とは異なる微分方程式を基に離散化を行い、 $\{S(n), C(n)\}$  よりも元の関数  $\sin x, \cos x$  の性質を強く反映する離散系の関数を構成することにある。

### § 3. 単振動の方程式による方法

前節では、1 階線形微分方程式 (2.1) を出発点とした際に、三角関数がどの様に離散化されるかを見た。得られた関係式と元の三角関数  $\sin x, \cos x$  の間の対応は十分とは言い難いものであった。

本節では (2.1) とは異なる出発点から三角関数の離散化を行う。特に、(2.6) が満足しなかった三角関数の性質の一部を満たす様に定めることが目標である。以下では、前節で構成した  $S(n), C(n)$  と区別をする為に、 $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  によって離散化した正弦関数と余弦関数を表す。

前節では (2.1) を基に離散化を行ったが、 $\sin x, \cos x$  が満たす微分方程式は (2.1) だけに限らない。 $\sin x, \cos x$  が単振動 (調和振動) の方程式:

$$D^2 u = -u \quad (3.1)$$

に対する素解を与えることはよく知られた事実である (例えば、俣野 [3], 柳田・栄 [5])。この事実は、微分演算子  $D$  を用いれば、以下の様に表わされる。

$$D^2 \sin x = -\sin x, \quad D^2 \cos x = -\cos x. \quad (3.2)$$

(3.2) は (2.1) を更に微分することにより簡単に確かめられる。

本節では (3.2) を出発点として三角関数の離散化を行う。その為に、少し準備をしよう。

#### 3.1. 後退差分演算子

(3.1) と対応する差分方程式の一つとして、 $\Delta^2 f = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = -f(n)$  を考えることが出来る。しかし、この差分方程式から出発しても話は改善されない。何故、この方

法では改善されないのか, の一つの要因として, 得られる差分方程式を線形差分方程式系へ書き直した際の係数行列の行列式が1と等しくならぬことが考えられる.

そこで,  $\Delta^2 f = -f$  とは異なる (3.1) と対応する差分方程式を必要とする. その様な差分方程式を導入する為に, 後退差分という概念を導入する. その為に, もう一度導関数について振り返ろう.

$f(x)$  が微分可能な関数であるとき, その導関数  $f'(x)$  は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

を満たす. ここで,  $h > 0$  であつたと見做せば次の様にして, 後退差分を定めることは不自然ではないだろう.

**定義 3.1** (後退差分).  $N \subset \mathbb{Z}$  を定義域とする関数  $f$  に対し, 演算子  $\nabla$  を以下で定める.

$$\nabla f(n) = f(n) - f(n-1), \quad (n, n-1 \in N) \quad (3.3)$$

と定める. ここで,  $\nabla$  を後退差分演算子(**backward difference operator**)と呼ぶことにし,  $\nabla f(n)$  を  $f$  の後退差分(**backward difference**)と呼ぶ.

後退差分演算子  $\nabla$  を導入したことにより,  $D^2$  に対応する差分演算子の候補は  $\Delta^2, \nabla\Delta (= \Delta\nabla), \nabla^2$  の3通りの組み合わせが考えられる様になった. 既に述べた様に,  $\Delta^2$  を用いても話は改善されない. 同じ理由によって  $\nabla^2$  を用いても話は改善されない. そこで, 前進差分と後退差分を組み合わせた  $\nabla\Delta$  を用いて, 差分方程式を導出し, それを基に三角関数の離散化を行おう. なお,  $\nabla\Delta$  は二階の微分演算子  $D^2$  に対する**中心差分**と呼ぶべき演算子である.

### 3.2. $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$ の導出

(3.2) は  $\sin x$  に対しても,  $\cos x$  に対しても同じ形の微分方程式であるから,  $f(n)$  が差分方程式

$$\nabla\Delta f(n) = -f(n) \quad (3.4)$$

を満たすとして話を進めよう.  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  の違いは初期条件のみで決まる. 初期条件については後で別途考察する.

(1.2), (3.3) に従つて (3.4) を書き直せば,  $f(n)$  が満たすべき差分方程式として, 以下を得る.

$$f(n+1) - f(n) + f(n-1) = 0. \quad (3.5)$$

更に,  $g(n) = f(n-1)$  とおくと, 差分方程式 (3.5) は  $f(n), g(n)$  に対する以下の線形差分方程式系へ書き直される.

$$\begin{cases} f(n+1) = f(n) - g(n), \\ g(n+1) = f(n). \end{cases} \quad (3.6)$$

(3.6) の解  $f(n), g(n)$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) を求めよう. そこで  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  とおく. このとき (3.6) は

$$\begin{bmatrix} f(n+1) \\ g(n+1) \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} f(n) \\ g(n) \end{bmatrix}$$

と表わされる. 従つて, 前節の場合と同様に  $B^n$  の表示を求めることが鍵となる.

ここで, 行列  $B$  について,  $\det B = 1$  であることを注意しておこう. 即ち, 行列  $B$  の定める線形変換によって, 平面上の図形の面積は不変である. この事実は, (3.6) から定まる  $f(n)$  が周期性や等距離性を持つことを期待させる. 実際, 後で確認する様に本節の方法で定める  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は (2.6) とは異なり, 真の周期性を持つ. また, 等距離性は完全ではないが部分的に満たす.

さて、一先ずは差分方程式 (3.6) の解の表示を求めよう。その為には、既に述べた様に  $B^n$  の  $n$  について閉じた表示が求まれば良い。そこで、 $B$  を対角行列へ変換する。その為に、 $B$  の固有値と固有ベクトルを求めよう。 $B$  の固有多項式は

$$\Phi_B(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

であるから、 $B$  の固有値は

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。ここで  $i = \sqrt{-1}$  は虚数単位を表す。 $\lambda_{\pm}$  に対応する固有ベクトルを  $p_{\pm}$  とすると

$$p_+ = \begin{bmatrix} \lambda_+ \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_- = \begin{bmatrix} \lambda_- \\ 1 \end{bmatrix}$$

ととれば良い。そこで  $P = [p_+ \ p_-]$  として  $2 \times 2$  複素数値行列  $P$  を定めると、行列  $B$  は  $P, P^{-1}$  によって

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

と対角化される。準備が整ったところで、 $B^n$  の表示を求めよう。(3.7) と  $PP^{-1} = I_d$  より、

$$B^n = P \begin{bmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \begin{bmatrix} \lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1} & -\lambda_+^n + \lambda_-^n \\ \lambda_+^n - \lambda_-^n & -\lambda_+^{n-1} + \lambda_-^{n-1} \end{bmatrix}$$

を得る。ここで、 $\lambda_+ \lambda_- = 1$  であることを用いた。これは固有方程式  $\Phi_B(\lambda) = 0$  に於ける根と係数の関係に他ならない。更に、極形式を用いれば  $\lambda_{\pm} = e^{\pm \frac{\pi}{3}i}$  であるから、de Moivre の定理より

$$B^n = \frac{1}{\sqrt{3}i} \begin{bmatrix} e^{\frac{\pi}{3}(n+1)i} - e^{-\frac{\pi}{3}(n+1)i} & -(e^{\frac{\pi}{3}ni} - e^{-\frac{\pi}{3}ni}) \\ e^{\frac{\pi}{3}ni} - e^{-\frac{\pi}{3}ni} & -(e^{\frac{\pi}{3}(n-1)i} - e^{-\frac{\pi}{3}(n-1)i}) \end{bmatrix}$$

を得る。更に、Euler の公式より、 $\theta \in \mathbb{R}$  に対して

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

であるから、 $B^n$  の  $n$  について閉じた表示として

$$B^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin \frac{n+1}{3}\pi & -\sin \frac{n}{3}\pi \\ \sin \frac{n}{3}\pi & -\sin \frac{n-1}{3}\pi \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

を得る。

**$\mathcal{F}(n)$  の決定.** (3.8) を用いて、 $\mathcal{F}(n)$  の表示を求めよう。その為には、どの様に初期条件を選ぶのが妥当であろうか。 $\sin 0 = 0$  を考慮すれば、初期条件として  $g(1) = \mathcal{F}(0) = 0$  とするのは適当であろう。 $n \geq 2$  に対して、 $\mathcal{F}(n)$  の値を再帰的に決定するには初期条件として  $\mathcal{F}(1)$  の値も必要となる。これは  $\mathcal{F}(n)$  の決定の元になっている微分方程式が二階の微分方程式であることに対応する。

本当ならば、 $\mathcal{F}(1) = \sin 1$  としたいが、 $\sin 1$  の値は解らないので使えない。そこで、 $\mathcal{F}(1)$  については §2 で用いた関係式  $\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0) = \mathcal{C}(0)$  を利用し、 $\mathcal{F}(1) = \mathcal{C}(0) = 1$  とする。このとき、(3.8) より  $\mathcal{F}(n)$  の表示として、次を得る。

$$\mathcal{F}(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3}\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.9)$$



$\mathcal{S}(1)$  の決定の仕方に多少の不満が残るが,  $\mathcal{S}(1)$  を  $\mathcal{C}(0)$ ,  $\mathcal{S}(0)$  のみから再帰的に決定する方法としてはこの程度しか良い方法がない様に思う.

**$\mathcal{C}(n)$  の決定.**  $\mathcal{S}(n)$  の場合に倣って, 初期条件を  $\mathcal{C}(0) = 1, \mathcal{C}(1) = 1$  とする. このとき, (3.8) より,  $\mathcal{C}(n)$  の表示として

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(n) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{n}{3} \pi - \sin \frac{n-1}{3} \pi \right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{n}{3} \pi + \cos \left( \frac{n}{3} \pi + \frac{\pi}{6} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_0\end{aligned}\tag{3.10}$$

を得る. 最後の等式は加法定理から従う.

### 3.3. $\mathcal{C}(n), \mathcal{S}(n)$ の性質

本節で求めた  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は, 元の関数  $\sin x, \cos x$  の性質をどの程度反映しているであろうか. 以下, § 1.3 で述べた諸性質との対応を調べよう.

**微分方程式 (2.1) との対応.** 求めた  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は微分方程式 (2.1) に相当する関係式を満足するだろうか. (2.6) ではこの関係式が出発点であった.

まずは  $\Delta \mathcal{C}(n) = -\mathcal{S}(n)$  を検証しよう. (3.10) と正弦に対する加法定理より

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(n+1) - \mathcal{C}(n) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{n+1}{3} \pi - \sin \frac{n}{3} \pi \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{n}{3} \pi - \sin \frac{n-1}{3} \pi \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{n}{3} \pi \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{n}{3} \pi \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{n}{3} \pi \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin \frac{n}{3} \pi - \sin \frac{n}{3} \pi \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{n}{3} \pi \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3} \pi = \mathcal{S}(n)\end{aligned}$$

を得る. 以上により  $\Delta \mathcal{C}(n) = -\mathcal{S}(n)$  が確認された.

次に  $\Delta \mathcal{S}(n) = \mathcal{C}(n)$  を検証しよう. (3.9) と正弦に対する加法定理より,

$$\Delta \mathcal{S}(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n+1}{3} \pi - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3} \pi = \cos \frac{n}{3} \pi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3} \pi.$$

ゆえに (3.10) と余弦に対する加法定理より

$$\Delta \mathcal{S}(n) - \mathcal{C}(n) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3} \pi$$

を得る. 従って, 任意の  $n$  に対して,  $\Delta \mathcal{S}(n) = \mathcal{C}(n)$  は残念ながら満たされない.

それでは, 我々の構成した  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は  $D \sin x = \cos x$  に相当する関係式を全く満たさないのだろうか. 実は, そうではないのである. 上の計算によってわかったことは, 前進差分の意味では  $D \sin x = \cos x$  に相当する式を満たさない, ということに過ぎない. 本節に於いて, 微分作用素  $D$  に対応するもう一つの操作として後退差分演算子  $\nabla$  を用意した. そこで,  $\nabla \mathcal{S}(n) = \mathcal{C}(n)$  となるか調べてみよう. (3.9), (3.10) より

$$\nabla \mathcal{S}(n) = \mathcal{S}(n) - \mathcal{S}(n-1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3} \pi - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n-1}{3} \pi = \mathcal{C}(n)$$

を得る. 従って,  $\mathcal{S}(n)$  は  $\nabla \mathcal{S}(n) = \mathcal{C}(n)$  を満たす.

以上の議論を纏めると、本節に於いて構成された  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は微分方程式 (2.1) に対応する関係式を

$$\Delta \mathcal{C}(n) = -\mathcal{S}(n), \quad \nabla \mathcal{S}(n) = \mathcal{C}(n) \quad (3.11)$$

の形で満たす。

**周期性と定積分.** (3.9), (3.10) で定められた  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は周期性 (1.5) に相当する関係式を満たすだろうか。

(1.5) に注意すれば、任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\mathcal{S}(n+6) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n+6}{3}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n}{3}\pi + 2\pi\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n}{3}\pi = \mathcal{S}(n)$$

を得る。同様の計算から  $\mathcal{C}(n+6) = \mathcal{C}(n)$  もわかる。纏めると、(3.9), (3.10) で定めた  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は以下の周期性を持っていることがわかった。

$$\mathcal{S}(n+6) = \mathcal{S}(n), \quad \mathcal{C}(n+6) = \mathcal{C}(n). \quad (3.12)$$

**注意 3.2.** 以上の構成で周期性を持つ関数  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  を作ることが出来た。その仕組みの一つとして、既に述べた様に (3.6) の係数行列  $B$  の行列式が  $\det B = 1$  を満たすことが挙げられる。

周期性は三角関数の定積分に特別な性質を与える。(1.5) によって任意の  $\alpha \in \mathbb{R}$  に対して、 $\sin x, \cos x$  は次の関係式を満たす。

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \sin x \, dx = 0, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos x \, dx = 0. \quad (3.13)$$

(3.12) より、(3.9), (3.10) は周期 6 を持つから、(3.13) に類似した関係式を満たさないだろうか。離散系に於いて、積分と対応する概念は和をとることである (差分に対して**和分**という。詳しくは Graham, Knuth & Patashnik [1] を参照せよ)。そこで、任意の  $k \in \mathbb{Z}$  に対して  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  が

$$\sum_{n=k}^{k+5} \mathcal{S}(n) = 0, \quad \sum_{n=k}^{k+5} \mathcal{C}(n) = 0 \quad (3.14)$$

を満たすかどうかを確認しよう。

$n \in \mathbb{Z}$  を適当に選ぶ。このとき (3.9) と加法定理より

$$\mathcal{S}(n) + \mathcal{S}(n+3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n}{3}\pi + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n+3}{3}\pi = 0$$

を得る。同様に、

$$\mathcal{C}(n) + \mathcal{C}(n+3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin\frac{n}{3}\pi - \sin\frac{n-1}{3}\pi \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \sin\frac{n+3}{3}\pi - \sin\frac{n+2}{3}\pi \right) = 0.$$

ゆえに、和の順序を交換して

$$\sum_{n=k}^{k+5} \mathcal{S}(n) = \underbrace{\mathcal{S}(k) + \mathcal{S}(k+3)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{S}(k+1) + \mathcal{S}(k+4)}_{=0} + \underbrace{\mathcal{S}(k+2) + \mathcal{S}(k+5)}_{=0} = 0$$

を得る。同様にして、

$$\sum_{n=k}^{k+5} \mathcal{C}(n) = 0$$

もわかる。よって、 $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は和分に関して、(3.13) に相当する性質を持つことが示された。

**等距離性.** 次に, (1.6) に相当する関係を調べてみよう. (3.9), (3.10), (1.6) より

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(n)^2 + \mathcal{S}(n)^2 &= \frac{1}{3} \left( 4 - \cos \frac{2n}{3}\pi + \sqrt{3} \sin \frac{2n}{3}\pi \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 4 + 2 \sin \left( \frac{2n}{3}\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right)\end{aligned}\quad (3.15)$$

を得る. 最後の部分では, 加法定理から従う三角関数の合成公式を用いた. (3.15) の右辺から  $\mathcal{C}(n)^2 + \mathcal{S}(n)^2$  の周期は 3 であることがわかるので,  $n = 0, 1, 2$  について調べれば十分である. 実際に計算してみると,

$$\mathcal{C}(n)^2 + \mathcal{S}(n)^2 = \begin{cases} \frac{1}{3} \left( 4 + 2 \sin \left( 0 - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 1 & (n = 0), \\ \frac{1}{3} \left( 4 + 2 \sin \left( \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{1}{3} \left( 4 + 2 \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 & (n = 1), \\ \frac{1}{3} \left( 4 + 2 \sin \left( \frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 1 & (n = 2) \end{cases}\quad (3.16)$$

を得る. 従って, (3.15) の周期が 3 であることとあわせて  $j \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\mathcal{C}(n)^2 + \mathcal{S}(n)^2 = \begin{cases} 1 & (n = 3j), \\ 2 & (n = 3j + 1), \\ 1 & (n = 3j + 2) \end{cases}\quad (3.17)$$

を得た. 纏めれば, (3.9), (3.10) は  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  に相当する関係式をすべての  $n \neq 3j + 1$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) で満たす.

**奇関数・偶関数性.**  $\sin \theta$  が奇関数であることと, (3.9) より,

$$-\mathcal{S}(-n) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{(-n)}{3}\pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3}\pi = \mathcal{S}(n)$$

を得る. よって  $\mathcal{S}(n)$  は奇関数である. 一方, (3.10) と加法定理より,

$$\mathcal{C}(n) - \mathcal{C}(-n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n}{3}\pi$$

となるので, 任意の  $n$  に対して,  $\mathcal{C}(-n) = \mathcal{C}(n)$  とはならない. よって,  $\mathcal{C}(n)$  は偶関数ではない.

**加法定理.** (3.9), (3.10) で定めた  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は定理 1.2 に相当する関係式を満たすであろうか. 加法定理より, 任意の  $n, m \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\mathcal{S}(n+m) - (\mathcal{S}(n)\mathcal{C}(m) + \mathcal{C}(n)\mathcal{S}(m)) = -\frac{4}{3} \sin \frac{n}{3}\pi \sin \frac{m}{3}\pi,$$

$$\mathcal{S}(n-m) - (\mathcal{S}(n)\mathcal{C}(m) - \mathcal{S}(n)\mathcal{S}(m)) = 0,$$

$$\mathcal{C}(n+m) - (\mathcal{C}(n)\mathcal{C}(m) - \mathcal{S}(n)\mathcal{S}(m)) = 0,$$

$$\mathcal{C}(n-m) - (\mathcal{C}(n)\mathcal{C}(m) + \mathcal{S}(n)\mathcal{S}(m)) = -\frac{4}{3} \sin \left( \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{m}{3}\pi$$

を得る. 従って,  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は加法定理を部分的に満たす.

最後に,  $(\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n))$  を二次元平面上にプロットしたものを図 3.1 に,  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  のグラフを図 3.2 に示す.

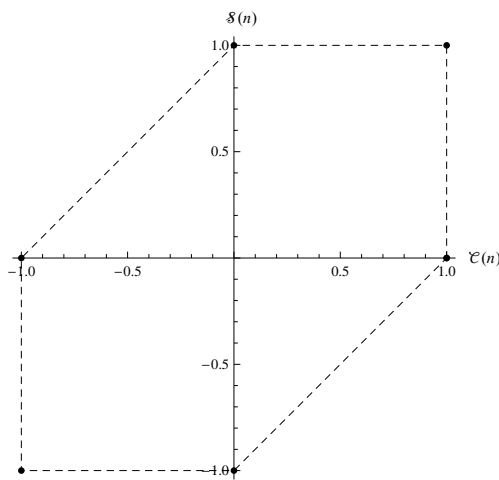


図 3.1.  $(\mathcal{C}(n), \mathcal{S}(n))$  の二次元平面上へのプロット

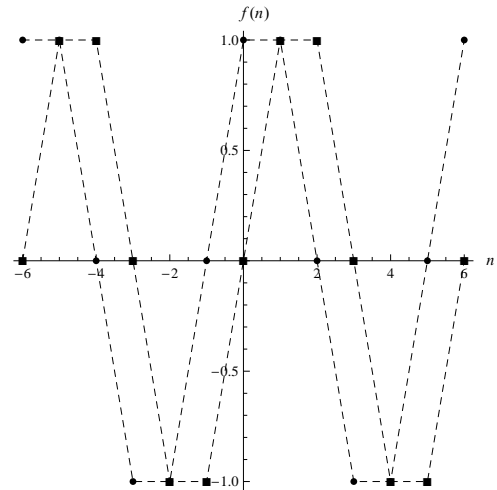


図 3.2.  $\mathcal{C}(n)$  (●),  $\mathcal{S}(n)$  (■) のグラフ ( $n = -6, -5, \dots, 6$ )

### 3.4. 周期性についての補足

最後に何故, 微分方程式 (3.1) を出発点とした際には話が上手く進んだのかその仕組みを構成の基となった微分方程式 (3.1) と対応する差分方程式 (3.5) の持つ保存量という観点から述べる. 差分方程式に於ける保存量について, 詳しくは, 広田・高橋 [2] を参照されたい.

まずは, 微分方程式 (3.1) に於ける保存則について述べる.  $u = u(t)$  を (3.1) の解であるとしよう.  $t$  を変数としたことは, この変数が時間変数を表すことを強調する為であって, それ以上の意味はない.  $u$  に対する汎関数  $E[u](t)$  を以下で定める.

$$E[u](t) = \frac{1}{2} ((Du)^2 + u^2).$$

$u(t)$  が時刻  $t$  に於ける位置を表すとき,  $E[u](t)$  は運動の全エネルギーを表わす. 即ち, 運動エネルギーと, 位置エネルギーの総和である.

$E[u](t)$  を  $t$  で微分すると,  $D^2u = -u$  より

$$DE[u](t) = D^2u \cdot Du + Du \cdot u = -u \cdot Du + Du \cdot u = 0 \quad (3.18)$$

を得る. (3.18) は汎関数  $E[u](t) = C$  (定数) を主張する. 従って,  $t = 0$  での全エネルギー  $E[u](0)$  が与えられているのであれば, 任意の  $t \geq 0$  に対して,  $E[u](t) \equiv E[u](0)$  を満たさなくてはならない (実際には, 単振動の方程式は  $t < 0$  の方向にも解くことが出来るので,  $t \in \mathbb{R}$  としても構わない). これはエネルギー保存則そのものであるが, この保存則の存在によって, (3.1) には周期解の存在が期待され, 確かにその様になっている.

上の議論では単振動の方程式に於けるエネルギー保存則が周期解を生み出す一つの要因になっていることを簡単に述べた. このエネルギー保存則と類似の構造を差分方程式 (3.5) が持っていることを述べよう.

$f(n)$  を差分方程式 (3.5) の解であるとする. このとき, 汎関数  $E_2[f](n)$  を以下で定める.

$$E_2[f](n) = f(n)^2 - f(n)f(n-1) + f(n-1)^2. \quad (3.19)$$

実は, この  $E_2[f](n)$  が差分方程式 (3.5) の保存量となっている. 今の場合, 保存量とは  $n$  に無関係な一定の量のことである. これは  $E[u](t)$  が  $t$  に無関係の量であったことを想起すれば, 自然な定義と言えよう.

$E_2[f](n)$  が保存量であることは、任意の  $n$  に対して  $E_2[f](n+1) - E_2[f](n) = 0$  が成り立つことを示せばよい。実際、(3.19) より

$$\begin{aligned} E_2[f](n+1) - E_2[f](n) &= f(n+1)^2 - f(n+1)f(n) + f(n)^2 \\ &\quad - (f(n)^2 - f(n)f(n-1) + f(n-1)^2) \\ &= f(n+1)^2 - f(n+1)f(n) + f(n)f(n-1) - f(n-1)^2 \\ &= (f(n+1) - f(n-1))(f(n+1) - f(n) + f(n-1)) = 0 \end{aligned}$$

を得る。従って、 $E_2[f](n)$  は差分の意味での保存量となっている。最後の等式で  $f(n)$  が (3.5) の解であることを用いた。

$E_2[f](n) = C$  ( $C$ : 定数) を満たす  $f(n)$  について、横軸を  $f(n-1)$ 、縦軸を  $f(n)$  として相図を考えてみよう。  $x = f(n-1)$ ,  $y = f(n)$  とすると  $E_2[f](n) = x^2 - xy + y^2$  となる。  $x, y$  が連続的に変化すると見做す。このとき、2次曲線の分類から、標準形を求めれば  $x^2 - xy + y^2 = C > 0$  を満たす曲線は楕円であることがわかる。従って、差分方程式 (3.5) の解  $f(n)$  は、この楕円軌道上を離散的に動く。この事実から、初期条件には無関係に差分方程式 (3.5) の解は周期性を持っていることがわかる。勿論、どの様な楕円軌道上を動くのかは初期エネルギーに相当する  $E_2[f](1)$  に応じて決まる。

いまの場合、 $\mathcal{S}(1) = 1, \mathcal{S}(0) = 0$  であったから  $E_2[\mathcal{S}](1) = \mathcal{S}(1)^2 - \mathcal{S}(1)\mathcal{S}(0) + \mathcal{S}(0)^2 = 1$  である。同様に、 $\mathcal{C}(1) = 1, \mathcal{C}(0) = 1$  であったから、 $E_2[\mathcal{C}](1) = \mathcal{C}(1)^2 - \mathcal{C}(1)\mathcal{C}(0) + \mathcal{C}(0)^2 = 1$  となる。従って、 $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  は相空間上では同一の楕円軌道上を動くことがわかる。また、その楕円軌道は上の議論から  $x^2 - xy + y^2 = 1$  に他ならない。

実際に、 $(\mathcal{S}(n-1), \mathcal{S}(n)), (\mathcal{C}(n-1), \mathcal{C}(n))$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) の相図と曲線  $x^2 - xy + y^2 = 1$  を重ねて描くと、以下の図 3.3 の様になる。

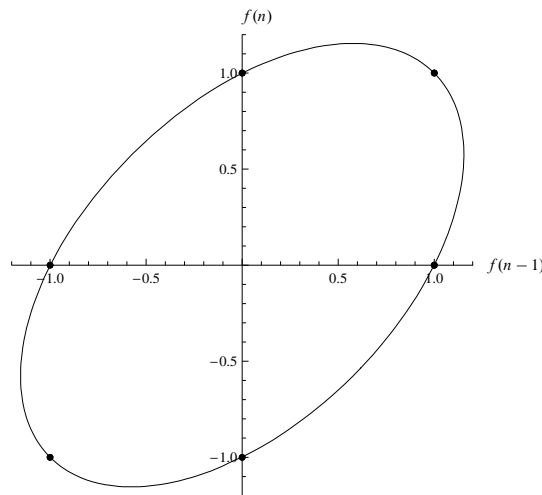


図 3.3.  $\mathcal{C}(n-1), \mathcal{C}(n)$  および  $\mathcal{S}(n-1), \mathcal{S}(n)$  の相図

#### §4. おわりに

本稿を終えるにあたり、今回構成した2つの離散系関数  $\{\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)\}$  と  $\{\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)\}$  の性質を比較しよう。

以下の表 4.1 に、 $\{\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)\}$  と  $\{\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)\}$  の性質を纏める。



	$\{S(n), C(n)\}$	$\{\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)\}$
微分方程式 (2.1) との対応	(2.2) の意味で満たす	(3.11) の意味で満たす
微分方程式 (3.2) との対応	$\Delta^2 f(n) = -f(n)$ の意味で満たす	$\nabla \Delta f(n) = -f(n)$ の意味で満たす
周期性	ない	周期 6 を持つ
積分 (3.13) との対応	ない	(3.14) の意味で満たす
$\cos^2 + \sin^2 = 1$ との対応	$C(n)^2 + S(n)^2 = 2^n$	$n = 3j + 1 (j \in \mathbb{Z})$ 以外で満たす
奇関数・偶関数性	ない	$\mathcal{S}(n)$ のみ奇関数
加法定理	部分的に満たす	部分的に満たす

表 4.1.  $S(n), C(n)$  と  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  の比較

表 4.1 の比較からもわかる様に, 単振動の方程式 (3.1) を出発点として三角関数を離散化したことにより, (2.1) を出発点とした場合よりも, 幾分か良い性質の関数  $\mathcal{S}(n), \mathcal{C}(n)$  を構成することが出来た. 特に周期 6 を持つ点が最大の特徴と言えよう. これは前進差分と後退差分を組み合わせ,  $\det B = 1$  となる様な差分方程式系 (3.6) を選んだことに起因する.

表 4.1 に於ける,  $S(n), C(n)$  と微分方程式 (3.2) との関係について補足を与え, 本稿を終えよう.  $S(n), C(n)$  は (2.3) を満たすので

$$\begin{aligned} \Delta^2 S(n) &= S(n+2) - 2S(n+1) + S(n) \\ &= S(n+2) - S(n+1) - (S(n+1) - S(n)) \\ &= C(n+1) - C(n) = -S(n). \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} \Delta^2 C(n) &= C(n+2) - C(n+1) - (C(n+1) - C(n)) \\ &= -S(n+1) + S(n) = -C(n). \end{aligned}$$

よって,  $S(n), C(n)$  は単振動の方程式に対応する差分方程式を  $\Delta^2 f(n) = -f(n)$  の形で満たすことがわかる.

## 参考文献

- [1] R. Graham, D.E. Knuth & O. Patashnik. “Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science”, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1994 年.
- [2] 広田良吾・高橋大輔. 『差分と超離散』, 共立出版, 2005 年.
- [3] 俣野博. 『常微分方程式入門』, 岩波書店, 2003 年.
- [4] W. Rudin “Principles of Mathematical Analysis”, 3rd Edition, McGraw Hill, 1976 年.
- [5] 柳田英二・栄伸一郎. 『常微分方程式論』, 朝倉書店, 2002 年.
- [6] 結城浩. 『離散系バージョンの関数探し』, <http://www.hyuki.com/story/diffsum2.pdf>, 2005 年.
- [7] 結城浩. 『数学ガール』, ソフトバンク・クリエイティブ, 2007 年.

(2009年11月19日受付)

(2009年12月22日受理)