

双曲型方程式の数値解析に対する高精度エルミート特性有限要素法

総合情報基盤センター 講師 奥村 弘

This paper presents a new characteristic finite element formulation, named semi-Lagrange Galerkin (SLG) method, on unstructure tetrahedral meshes to solve three-dimensional pure hyperbolic/advection equations. In the present method, the calculation procedure is divided into two phases which are advection and non-advection phases. The advection phase is computed by the semi-Lagrange procedure using a 20 degrees of freedom tetrahedral element which consists of complete cubic polynomials given by function values and first order derivatives on each vertex and a function value on barycenter of triangle surface. The non-advection phase is calculated by the Galerkin finite element procedure using the same 20 DOF tetrahedral element. Numerical experiments are investigated and some numerical results are shown.

Keywords : Semi-Lagrange Galerkin (SLG), CIP, Hermite element, cubic interpolation, advection equation

1. はじめに

本研究では、SLG (Semi-Lagrange Galerkin) 法⁽¹⁾ に基づいた3次元の双曲型方程式(純移流方程式)に対するエルミート要素を用いた特性有限要素法を開発し概要を述べる。SLG 法は Semi-Lagrange 法と Galerkin 法を組み合わせ合わせた手法であることから、Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法と呼ばれている⁽²⁾。SLG 法が与える2次元移流問題の精度は、粗い非構造格子においても高い精度を持ち、CIP 法⁽³⁾ から派生した不完全3次補間⁽⁴⁾ を用いる CIVA 法⁽⁵⁾ や三角形1次要素による SUPG 法と比較して、非常に高い精度であることが示されている⁽²⁾。SLG 法では、移流計算と非移流計算を分離する。Semi-Lagrange 法によって移流計算の精度を高めるために、完全3次三角形要素⁽⁶⁾ を用いる。完全3次三角形要素は、三角形要素の頂点での関数値とその1階導関数値、そして要素の重心での関数値を自由度とする10自由度から構成される。非移流計算においても、関数には移流計算と同じ完全3次三角形要素を適用している。これにより、SLG 法では非移流計算でも、移流計算で用いる高次要素をそのまま Galerkin 法に適用するため、精度が損なわれない。この方法によれば、関数における要素の自由度に1階導関数値が含まれるため、一般的な CIP 法と組み合わせた非移流計算法のように、支配方程式を1階微分した1階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がない。本報では、SLG 法のアルゴリズムをストレートフォワードに3次元の双曲型方程式である3次元の純移流問題へ拡張し、完全3次精度の有限要素近似を有するエルミート (Hermite) 型の四面体要素 (20自由度) を陽的な体積座標により表現される補間関数を導出する。また、数値実験により本手法の有効性を検証する。

2. エルミート特性有限要素法

2.1 移流方程式

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_{sd}}$ ($N_{sd} = 1, 2, 3$) において、スカラー関数 $u(\mathbf{x}, t)$ に関する移流方程式の初期値および境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $T > 0$ は時間、 \mathbf{a} は移流速度ベクトルであり、発散条件 $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ を満足するものとする。

2.2 特性法

時刻 t に位置 \mathbf{x} にある仮想流体粒子の時刻 τ での位置を $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau)$ とすると、粒子の軌跡は、以下のような常微分方程式によって表される。

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, t; t) = \mathbf{x} \quad (2)$$

このとき、方程式 (2) を用いることにより、式 (1) は以下に示す Lagrange 微分の形式で表すこともできる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = \frac{d}{d\tau} u(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau) \Big|_{\tau=t} \quad (3)$$

特性法⁽⁷⁾ では、時間増分を Δt 、時間ステップを n とし、移流項を次式に示す時間離散を行う。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u \right) \Big|_{t=t_{n+1}} \approx \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (4)$$

ここで、 $u^{n+1}(\mathbf{x})$ は時刻 $t^{n+1} (= (n+1)\Delta t)$ での未知量 u 、また、 $u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ は時刻 $t^n (= n\Delta t)$ での位置 \mathbf{x} を起点とした特性曲線上の上流点 $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ におけるスカラー関数 u であり、合成関数として表される。

$$u^{n+1}(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^{n+1}), t^{n+1}) \quad (5)$$

$$u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t^{n+1}; t^n), t^n) \quad (6)$$

上流点の位置は、常微分方程式 (2) によって求められる。本研究では、次式のような1次精度の Euler 法、または、2次精度の予測子・修正子法を適用する。

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{x}) \Delta t \\ \mathbf{X}_2^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{a} \circ \mathbf{X}_1^n(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{x})) \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (7)$$

なお、本研究では $\mathbf{a} \approx \mathbf{a}^n$ と時間方向に近似する。

SLG (Semi-Lagrange Galerkin) 法では、移流計算と非移流計算を分離する Semi-Lagrange 法を適用する。特性法による移流項の近似式 (4) の右辺を0とし、さらに移流計算による解の更新を u^{n+1} とすると、移流計算は式 (7) を用いて以下のように行われる。

$$u^{n+1}(\mathbf{x}) = u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \quad (8)$$

2.3 完全3次エルミート四面体要素による有限要素近似

本研究では、計算領域を四面体領域 K (要素 e) に分割し、有限要素近似を適用する。このとき、スカラー関数 u の補間には完全3次補間であるエルミート型の四面体要素を用いる (Fig. 1)。このエルミート要素は、四面体要素の頂点での関数値 u_i とその1階導関数値 $(\frac{\partial u}{\partial x}|_i, \frac{\partial u}{\partial y}|_i, \frac{\partial u}{\partial z}|_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$)、さらに4つの面 (三角形) の重心での関数値 $u_e|_i = u_{ei}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を自由度とする20自由度の四面体要素を用いる。四面体領

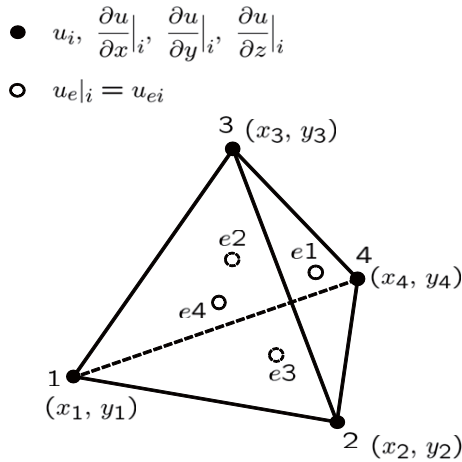


Fig. 1: Approximation with a complete cubic interpolated tetrahedral element for a scalar function $u_h|_K$

域 K における完全 3 次エルミート要素によるスカラー関数の有限要素近似 $u_h|_K$ は以下のように表される.

$$u_h|_K = \sum_{i=1}^4 \left(H_{0i} u_i + H_{xi} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + H_{yi} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_i + H_{zi} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_i \right) + \sum_{i=1}^4 H_{ei} u_{e|i} \quad (9)$$

ここで, $H_{0i}, H_{xi}, H_{yi}, H_{zi}, H_{ei}$ は補間関数であり, 体積座標 (L_1, L_2, L_3, L_4) の関数によって陽的に表される (付録 B 参照).

3. 数値実験および考察

本手法の検証のため, ベンチマーク問題⁽⁸⁾により 3 次元移流問題の数値実験を行う. 領域 $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)$ において, 流速場 $\mathbf{a} = (-2\pi y, 2\pi x, 0)$ に初期条件 (Fig.2) を与えたときの 1 周期 $T = 1$ 後における計算結果 ($z = 0$ 面における鳥瞰図) を示す. 時間増分量 $\Delta t = T/100$ を選び, クーラン数の最大値がおおよそ CFL = 2.5 になる. SLG 法との比較のため, 1 次要素を用いた SUPG 法 (時間積分には Crank-Nicolson) の結果も掲載したが, SLG 法の与える計算結果はわずかなオーバーシュート/アンダーシュートが発生しているものの厳密解 (初期条件) と非常に良い一致を示している.

参考文献

- (1) 奥村弘, 丸岡晃: 自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法の評価, 応用力学論文集, Vol.12, pp.155-162 (2009)
- (2) 丸岡晃, 小保内啓太, 奥村弘: 移流拡散方程式に対する Semi-Lagrange Galerkin 法, ながれ, Vol.27, pp.143-152 (2008)
- (3) 矢部 孝 他編: CIP 法 -原子から宇宙までを解くマルチスケール解法-, 森北出版 (2003) など
- (4) P.G.Ciarlet: The Finite Element Method for Elliptic Problems, SIAM (2001)
- (5) 田中 伸厚: 数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発, 機論 (B), 64-620, 1071-1078 (1998)
- (6) 鷺津 久一郎 他編: 有限要素ハンドブック I 基礎編, 培風館 (1981) など

- (7) O. Pironneau: Finite Element Methods for Fluids, John Wiley & Sons, Chichester (1989)
- (8) G.-S. JIANG and C.-W. SHU: Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes, J. Comput. Physics 126, 202.228 (1996)

付録 A. CIP 法と変分定式化の関係について

1 次元の移流速度 a が発散条件 $\partial a / \partial x = 0$ を満足するものとし, CIP 法による移流方程式の解法では以下の移流方程式とその空間 1 階微分された方程式を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{in } \Omega \subset \mathbf{R} \quad (11)$$

関数空間 $L^2(\Omega)$ を以下のように定義したとき,

$$L^2(\Omega) = \left\{ u = u(x) \mid \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < +\infty \right\}, \quad (12)$$

式 (10), (11) の解 u を満たすものの関数空間全体 X は以下のものでなければならない.

$$X = \left\{ u \in C^1(\Omega) \mid u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (13)$$

一方, Hilbert 空間 $H^1(\Omega)$ に対し, H^1 内積は以下のように定義される.

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2} \quad (14)$$

$$(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} u v dx$$

移流方程式の微分作用素 \mathcal{L} を以下のように定義すれば,

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \quad (15)$$

式 (10), (11) による CIP 法を考え方を変分定式化に適用すれば以下が得られる.

$$(\mathcal{L}u, v)_{H^1} = (f, v)_{H^1} \quad (16)$$

ここで,

$$\begin{cases} (\mathcal{L}u, v)_{H^1} = (\mathcal{L}u, v)_{L^2} + \left(\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2} \\ (f, v)_{H^1} = (f, v)_{L^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2} \quad \forall v, \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (17)$$

つまり, CIP 法は以下の変分問題と等価となりうる.

For all $(v, \partial v / \partial x)$, find $(u, \partial u / \partial x)$ such that

$$\begin{cases} (\mathcal{L}u, v)_{L^2} = (f, v)_{L^2}, \\ \left(\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{L^2} \end{cases} \quad (18)$$

このとき, 有限要素近似に空間 1 階微係数も未知量とするエルミート要素を適用し, 時間方向の離散化に特性法を用いれば Semi-Lagrange Galerkin 法となる.

付録 B. 完全 3 次補間のエルミート四面体要素 (3 次元)

エルミート型の完全 3 次要素は、四面体要素の頂点での関数値 u_i とその 1 階導関数値 $(\frac{\partial u}{\partial x}|_i, \frac{\partial u}{\partial y}|_i, \frac{\partial u}{\partial z}|_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) , さらに 4 つの面 (三角形) の重心での関数値 $u_e|_i = u_{ei}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を自由度とする 20 自由度の四面体要素である. 四面体領域 K における完全 3 次エルミート要素によるスカラー関数の有限要素近似 $u_h|_K$ は体積座標 (L_1, L_2, L_3, L_4) の関数によって以下のように陽的に表すことができる.

$$u_h|_K = \sum_{i=1}^4 \left(H_{0i} u_i + H_{xi} \frac{\partial u}{\partial x}|_i + H_{yi} \frac{\partial u}{\partial y}|_i + H_{zi} \frac{\partial u}{\partial z}|_i \right) + \sum_{i=1}^4 H_{ei} u_e|_i$$

ここで, $H_{0i}, H_{xi}, H_{yi}, H_{zi}, H_{ei}$ は以下に示す補間関数である.

$$H_{01} = L_1^2(3 - 2L_1) - 7L_1(L_2L_3 + L_2L_4 + L_3L_4)$$

$$H_{02} = L_2^2(3 - 2L_2) - 7L_2(L_1L_3 + L_1L_4 + L_3L_4)$$

$$H_{03} = L_3^2(3 - 2L_3) - 7L_3(L_1L_2 + L_1L_4 + L_2L_4)$$

$$H_{04} = L_4^2(3 - 2L_4) - 7L_4(L_1L_2 + L_1L_3 + L_2L_3)$$

$$H_{x1} = L_1L_2(2L_1 + L_2 - 1)x_{21} + L_1L_3(2L_1 + L_3 - 1)x_{31} + L_1L_4(2L_1 + L_4 - 1)x_{41}$$

$$H_{x2} = L_2L_1(2L_2 + L_1 - 1)x_{12} + L_2L_3(2L_2 + L_3 - 1)x_{32} + L_2L_4(2L_2 + L_4 - 1)x_{42}$$

$$H_{x3} = L_3L_1(2L_3 + L_1 - 1)x_{13} + L_3L_2(2L_3 + L_2 - 1)x_{23} + L_3L_4(2L_3 + L_4 - 1)x_{43}$$

$$H_{x4} = L_4L_1(2L_4 + L_1 - 1)x_{14} + L_4L_2(2L_4 + L_2 - 1)x_{24} + L_4L_3(2L_4 + L_3 - 1)x_{34}$$

$$H_{y1} = L_1L_2(2L_1 + L_2 - 1)y_{21} + L_1L_3(2L_1 + L_3 - 1)y_{31} + L_1L_4(2L_1 + L_4 - 1)y_{41}$$

$$H_{y2} = L_2L_1(2L_2 + L_1 - 1)y_{12} + L_2L_3(2L_2 + L_3 - 1)y_{32} + L_2L_4(2L_2 + L_4 - 1)y_{42}$$

$$H_{y3} = L_3L_1(2L_3 + L_1 - 1)y_{13} + L_3L_2(2L_3 + L_2 - 1)y_{23} + L_3L_4(2L_3 + L_4 - 1)y_{43}$$

$$H_{y4} = L_4L_1(2L_4 + L_1 - 1)y_{14} + L_4L_2(2L_4 + L_2 - 1)y_{24} + L_4L_3(2L_4 + L_3 - 1)y_{34}$$

$$H_{z1} = L_1L_2(2L_1 + L_2 - 1)z_{21} + L_1L_3(2L_1 + L_3 - 1)z_{31} + L_1L_4(2L_1 + L_4 - 1)z_{41}$$

$$H_{z2} = L_2L_1(2L_2 + L_1 - 1)z_{12} + L_2L_3(2L_2 + L_3 - 1)z_{32} + L_2L_4(2L_2 + L_4 - 1)z_{42}$$

$$H_{z3} = L_3L_1(2L_3 + L_1 - 1)z_{13} + L_3L_2(2L_3 + L_2 - 1)z_{23} + L_3L_4(2L_3 + L_4 - 1)z_{43}$$

$$H_{z4} = L_4L_1(2L_4 + L_1 - 1)z_{14} + L_4L_2(2L_4 + L_2 - 1)z_{24} + L_4L_3(2L_4 + L_3 - 1)z_{34}$$

$$H_{e1} = 27L_1L_2L_3$$

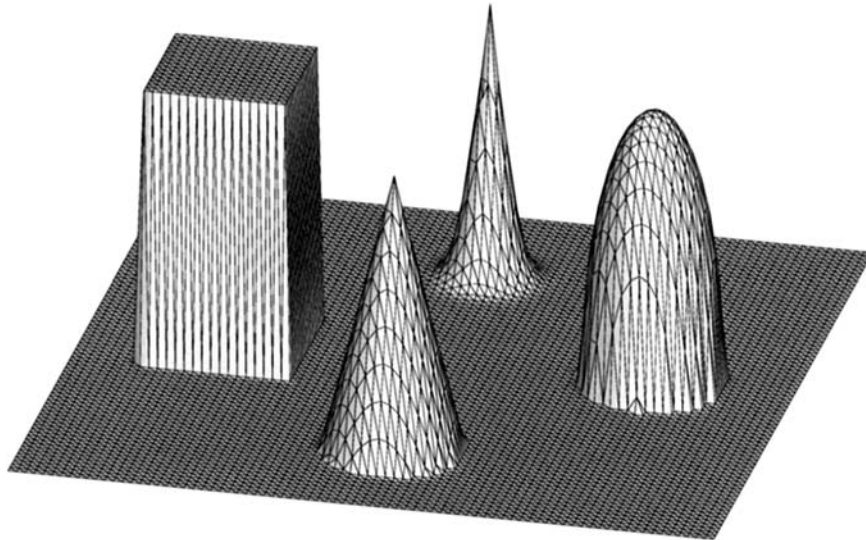
$$H_{e2} = 27L_1L_2L_4$$

$$H_{e3} = 27L_1L_3L_4$$

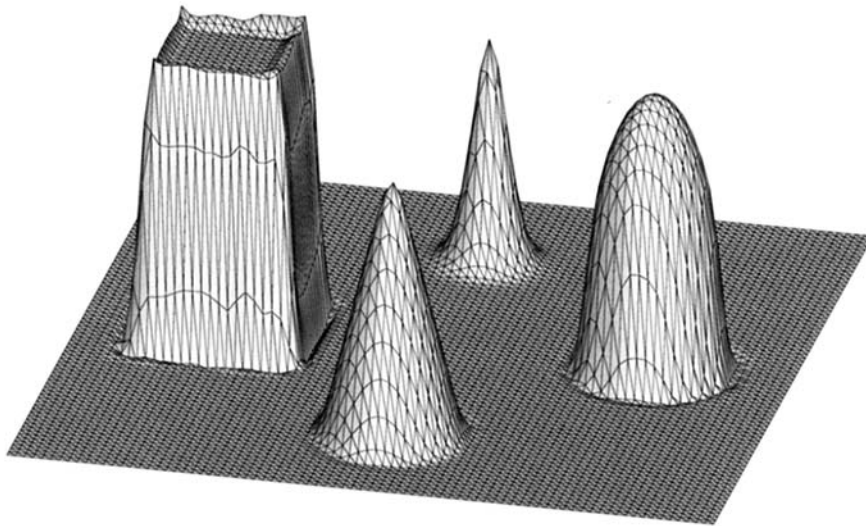
$$H_{e4} = 27L_2L_3L_4$$

ここで, (i, j) を $(1, 2, 3, 4)$ の偶置換とすれば, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} は以下のように定義することができる.

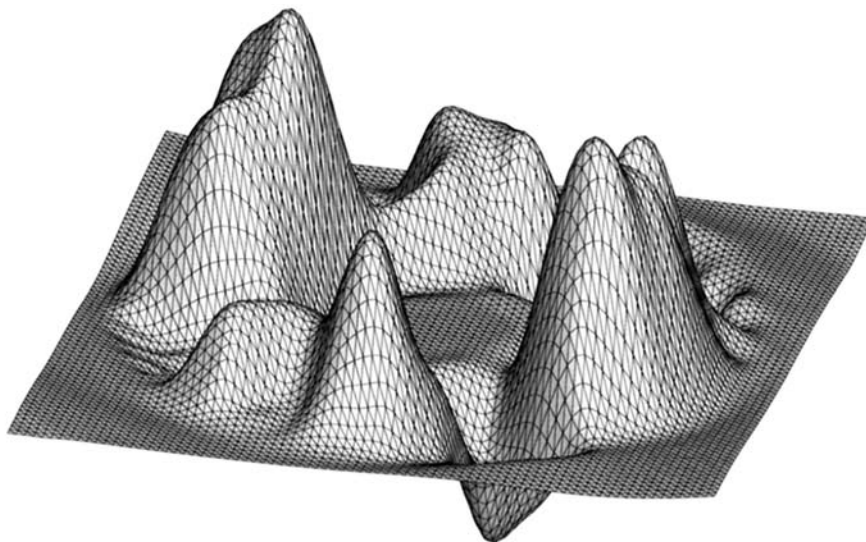
$$\begin{cases} x_{ij} = x_i - x_j \\ y_{ij} = y_i - y_j \\ z_{ij} = z_i - z_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$



厳密解 (初期条件)



SLG 法



SUPG 法

Fig. 2: 3次元移流問題の数値実験⁽⁸⁾により得られた計算結果
($z = 0$ 面での鳥瞰図; CFL ≈ 2.5)