富山大学教育学部紀要 No.58：193－206（平成16年）

部分多様体論における Simonsの等式およびRosの積分公式について

永井節夫
富山大学教育学部

On Simons' formulas and Ros' integral formulas in the theory of submanifolds

Setsuo Nagai

1　はじめに

微分幾何学において極小部分多様体の研究は大変興味深い対象のひとつである．それは「輪にした針金に石鹸膜を張るとどのような形の曲面になるか」という問題に象徴される．１９６８年 J. Simons は Annals の論文 [16] において，「球面内の極小部分多様体の中で全測地的な部分多様体はスカラー曲率の孤立点である」というセンセーショナルな結果をいわゆる Simons の等式とともに発表した．その証明の方法論は部分多様体上の第２基本形式の長さの２乗のラプラシアンの公式を用いた斬新なものであった．この公式が Simons の等式と呼ばれているものである．これはその後の極小部分多様体の研究に強力な道具を提供し，また今日でも提供し続けている．

ところで，平均曲率ベクトルが平行な部分多様体や平均曲率が一定な部分多様体に対しても Simons 型の等式が得られそれが有効に機能することが分かっている．それに関しては実空間型内の平均曲率一定超曲面の場合の Nomizu と Smyth の研究 [12]，実空間型や複素空間型内の平均曲率平行または平均曲率一定曲面に関する Yau の研究 [17]，実空間型内の平均曲率平行部分多様体及び複素空間型内の複素部分多様体と極小全実部分多様体に関する Yau の研究 [18] が有名である．

複素射影空間内の複素部分多様体は常に極小であるが，種々の曲率に制約のある複素部分多様体を決定するという問題すなわち曲率に関する挟撃問題については K. Ogiue による一連の予想 [13] がある．そのうちの殆どは解決されたが，その解決に用いられた手法は単位接バンドル上の発散定理を用いるもので Ros の積分公式と呼ばれている (cf. [10])．これら一連の結果については

K. Ogiue [15] に詳しい. Ros の積分公式は, これらの問題に対して Simons の等式よりも強力な道具を提供する.

Simons の等式は局所対称空間の極小部分多様体に対して, また Ros の積分公式はコンパクトな曲率不変極小部分多様体に対して有効に機能する. 複素空間型内の複素部分多様体または全実極小部分多様体を研究対象とする時には, 複素空間型は局所対称であり, また複素部分多様体も全実部分多様体も曲率不変部分多様体であるから, いずれも公式が有効であることがわかる.

本稿の目的の 1 つは, これら Simons の等式及び Ros の積分公式をより一般的な状況, すなわち単に Riemann 多様体の Riemann 部分多様体に対して定式化し, 特別な場合, 例えば複素空間型内の複素部分多様体の場合等, の公式がそこからどのようにして導かれていくかを示すことにある. というのは Simons の等式等は, より一般の部分多様体の研究においても有用であると考えられる事と, 一般的な状況で定式化した文献が見当たらないという事から, 公式化して提示することがこの方面の研究者に対して便宜を供するという点で意味があると考えたからである. 本稿の目的の 2 つ目は, Simons の等式を用いて筆者が最近得た 1 つの結果を説明することである.

最後に本稿における記述法についてひとこと述べておく. 微分幾何学における記述法および計算手法として代表的なものが 3 つある. 1 つはテンソル計算によるもの, 2 つ目は E. Cartan 流の動標構による微分形式を用いたもの, 3 つ目はいわゆる小林・野水方式とよばれる共変微分演算を用いたものである. これらの記述法および計算法には, 経験上それぞれに長所・短所があるのだが, 最近の部分多様体論の論文は多くが小林・野水方式で記述されている. 一方 Simons の等式を扱った代表的な論文の多く (例えば [7], [17], [18]) は, E. Cartan の微分形式による方法で記述されている. そこで本稿では最近の部分多様体論の記述法の主流が小林・野水方式であることに鑑みて, 各公式を全て小林・野水方式で記述した.

2 準備

この節では, 後に必要となる部分多様体に関する事項の説明と記号の定義をする. 以下では特に断らない限り多様体は連結で C^∞ 級であり, 全ての写像は C^∞ 級であるとする. また部分多様体とは, はめ込まれた部分多様体を意味するものとする.

$\overline{M}^{n+p}$ を n 次元 Riemann 多様体, M^n をその Riemann 部分多様体としてそれぞれの Riemann 計量を同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すことにする. $\overline{M}^{n+p}$, M^n の接バンドルをそれぞれ $T\overline{M}$, TM で表し, それらの Levi-Civita 接続をそれぞれ $\overline{\nabla}$, ∇ と書くことにする. また各 fiber を T_pM 等と表し, C^∞ 級切断の集合を $\Gamma(\cdot, TM)$ 等と表す. $\overline{M}^{n+p}$, M^n の曲率テンソル $\overline{R}$, R は次で定義される:

$$\overline{R}(X,Y) = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y - \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X - \overline{\nabla}_{[X,Y]},\ X, Y \in \Gamma(\overline{M}, T\overline{M}),$$

$$R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]},\ X,\,Y\in\Gamma(M,TM).$$

TM の $T\overline{M}$ における Riemann 計量に関する直交補空間を M の $\overline{M}$ における法バンドルと言い記号 $T^\perp M$ で表す. $T^\perp M$ の法接続 $\nabla^\perp$ 及び法曲率 $R^\perp$ を次で定義する:

$$\nabla^\perp_X\xi=(\overline{\nabla}_X\xi)^N,\ X\in\Gamma(M,TM),\ \xi\in\Gamma(M,T^\perp M),$$

$$R^\perp(X,Y)\xi=\nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi-\nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi-\nabla^\perp_{[X,Y]}\xi,\ X,\,Y\in\Gamma(M,TM),\ \xi\in\Gamma(M,T^\perp M),$$

ただし, $(\ )^N$ は $(\ )$ 内のベクトルの法方向への直交射影を表す.

部分多様体 M^n の第 2 基本形式 σ を次式で定義する:

$$\sigma(X,Y)=\overline{\nabla}_XY-\nabla_XY,\ X,\,Y\in\Gamma(M,TM).$$

p を M 上の点, $\{e_1,\dots,e_n\}$ を T_pM の正規直交基底とする. M の平均曲率ベクトル $\mathfrak{H}$ を次で定義する:

$$\mathfrak{H}(p)=\sum_{i=1}^n\sigma(e_i,e_i).$$

定義 2.1 M^n が点 p で極小であるとは $\mathfrak{H}(p)=0$ が成り立つことであると定義する. M^n が全ての点で極小であるとき単に極小と呼ぶ.

定義 2.2 M^n が $\overline{M}^{n+p}$ の曲率不変部分多様体であるとは, 任意の $p\in M^n$ と任意の $X,\,Y,\,Z\in T_pM$ に対して $\overline{R}(X,Y)Z\in T_pM$ が成り立つことであると定義する.

M の shape operator A, Ricci テンソル S, Ricci operator $\tilde{S}$ および $(1,1)$ 型対称テンソル L を次で定義する:

$$\langle A_\xi X,\,Y\rangle=\langle\sigma(X,Y),\,\xi\rangle,\ X,\,Y\in\Gamma(M,TM),\ \xi\in\Gamma(M,T^\perp M),\tag{2.1}$$

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^n\langle R(e_i,X)Y,\,e_i\rangle,\ X,\,Y\in\Gamma(M,TM),\tag{2.2}$$

$$\langle\tilde{S}X,\,Y\rangle=S(X,Y),\ X,\,Y\in\Gamma(M,TM),\tag{2.3}$$

$$LX=\sum_{i=1}^nA_{\sigma(e_i,X)}e_i,\ X\in\Gamma(M,TM).\tag{2.4}$$

Einstein 多様体の定義は次である.

定義 2.3 *Riemann* 多様体 M^n が *Einstein* 多様体であるとは, M^n 上に関数 ρ が存在して *Ricci* テンソル S が次の等式を満たすことである:

$$S(X,Y)=\frac{\rho}{n}\langle X,\,Y\rangle,\quad X,Y\in T_pM,\ p\in M.\tag{2.5}$$

注意 上で $n \geq 3$ の場合には ρ は定数になることが知られている.

部分多様体 M に対する Gauss, Codazzi, Ricci の方程式は次である:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,\, W\rangle = \;& \langle \overline{R}(X,Y)Z,\, W\rangle + \langle \sigma(Y,Z),\, \sigma(X,W)\rangle \\ & -\langle \sigma(X,Z),\, \sigma(Y,W)\rangle, \\ & X,Y,Z,W \in T_pM,\; p \in M,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}(\nabla'_X\sigma)(Y,Z) - (\nabla'_Y\sigma)(X,Z) = [\overline{R}(X,Y)Z]^N, \\ X,Y,Z \in T_pM,\; p \in M,\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\, \eta\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)\xi,\, \eta\rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X,\, Y\rangle, \\ X,Y \in T_pM,\; \xi,\eta \in T_p^{\perp}M,\; p \in M.\end{aligned} \tag{2.8}$$

ここに ∇' は, Van Der Waerden-Bortolotti 接続を表し, それは次で定義される:

$$\begin{aligned}(\nabla'_X\sigma)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(\sigma(Y,Z)) - \sigma(\nabla_XY,Z) - \sigma(Y,\nabla_XZ), \\ X,Y,Z \in TM.\end{aligned}$$

第 2 基本形式の 2 階共変微分を $X,Y,Z,W \in \Gamma(M,TM)$ に対して

$$(\nabla^2_{X,Y}\sigma)(Z,W) = (\nabla'_X(\nabla'_Y\sigma))(Z,W) - (\nabla'_{\nabla_XY}\sigma)(Z,W)$$

で定義するとき, Ricci の公式は次で与えられる:

$$\begin{aligned}& (\nabla^2_{X,Y}\sigma)(Z,W) - (\nabla^2_{Y,X}\sigma)(Z,W) \\ = \;& R^{\perp}(X,Y)\sigma(Z,W) - \sigma(R(X,Y)Z,W) - \sigma(Z,R(X,Y)W).\end{aligned} \tag{2.9}$$

断面曲率が一定 c の完備かつ単連結な実 $n+p$ 次元 Riemann 多様体を $n+p$ 次元実空間型と言い, 記号 $\overline{M}^{n+p}(c)$ で表す. また, 正則断面曲率が一定 $\tilde{c}$ の完備かつ単連結な複素 $n+p$ 次元 Riemann 多様体を $n+p$ 次元複素空間型と言い, 記号 $\overline{M}_{n+p}(\tilde{c})$ で表す.

$\overline{M}^{n+p}(c)$ の曲率テンソル $\overline{R}$ は次で与えられる:

$$\overline{R}(X,Y)Z = c(\langle Y,\, Z\rangle X - \langle X,\, Z\rangle Y),\quad X,Y,Z \in T_p\overline{M},\; p \in \overline{M}. \tag{2.10}$$

$\overline{M}_{n+p}(\tilde{c})$ の曲率テンソル $\overline{R}$ は次で与えられる:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z = \;& \tfrac{\tilde{c}}{4}\,(\langle Y,\, Z\rangle X - \langle X,\, Z\rangle Y \\ & +\langle JY,\, Z\rangle JX - \langle JX,\, Z\rangle JY - 2\langle JX,\, Y\rangle JZ), \\ & X,Y,Z \in T_p\overline{M},\; p \in \overline{M},\end{aligned} \tag{2.11}$$

ここに, J は $\overline{M}_{n+p}(\tilde{c})$ の複素構造を表す.

この節の最後に全実および Lagrangian 部分多様体の定義を述べておく.

定義 2.4 $\overline{M}_{n+p}$ を複素 $n+p$ 次元 *Kähler* 多様体, M^n をその実 n 次元部分多様体とする. M^n が $\overline{M}_{n+p}$ の全実部分多様体であるとは, 次が成り立つことを言う:

$$JTM \subset T^{\perp}M. \tag{2.12}$$

ただし, J は $\overline{M}_{n+p}$ の複素構造を表す. 特に $p=0$ のとき M^n は *Lagrangian* 部分多様体であるという.

3 Simons の等式

この節では, Simons の等式をまず一般的な場合から始めて, 実空間型内の部分多様体, 複素空間型内の複素部分多様体, 複素空間型内の全実部分多様体の場合の順で記述していく. 以下 n 次元 Riemann 多様体 M とその上の点 $p \in M$ に対して, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を T_pM の正規直交基底, $E_1, \ldots, E_n$ を p の近傍で定義された M 上の C^∞ 級ベクトル場で条件 $\nabla E_i(p) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものとする. また M^n が Riemann 多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の部分多様体であるとき, $p \in M$ に対して $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ を $T_p^{\perp}M$ の正規直交基底とし, 対応する shape operator A_{ξ_α} を A_α と記す.

まず一般に次が成り立つ.

命題 3.1 M^n を $n+p$ 次元リーマン多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元部分多様体とするとき, 第 2 基本形式の長さの平方の *Laplacian* に関して次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ & \|\nabla'\sigma\|^2 + \textstyle\sum_{j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_j}\nabla^{\perp}_{E_k}\mathfrak{H},\ \sigma(e_j, e_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}(E_i, E_j)E_k),\ \sigma(e_j, e_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_j}(\overline{R}(E_i, E_k)E_i)^N,\ \sigma(e_j, e_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle R^{\perp}(e_i, e_j)\sigma(e_i, e_k),\ \sigma(e_j, e_k)\rangle \\
& - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\sigma(R(e_i, e_j)e_i, e_k),\ \sigma(e_j, e_k)\rangle \\
& - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\sigma(e_i, R(e_i, e_j)e_k),\ \sigma(e_j, e_k)\rangle.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

証明　まず Codazzi の方程式 (2.7) を用いると次が得られる:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\nabla_{E_i}\|\sigma\|^2 = \ & \textstyle\sum_{j,k}\langle(\nabla'_{E_i}\sigma)(E_j, E_k),\ \sigma(E_j, E_k)\rangle \\
= \ & \textstyle\sum_{j,k}\langle(\nabla'_{E_j}\sigma)(E_i, E_k),\ \sigma(E_j, E_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{j,k}\langle\overline{R}(E_i, E_j)E_k,\ \sigma(E_j, E_k)\rangle.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Laplacian の定義および (3.2) を用いて $\triangle\|\sigma\|^2$ を計算すると次が得られる:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ & \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j,k}\nabla_{e_i}\nabla_{E_i}\|\sigma\|^2 \\
= \ & \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\nabla_{e_i}(\nabla'_{E_j}\sigma)(E_i, E_k),\ \sigma(E_j, E_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle(\nabla'_{e_j}\sigma)(E_i, E_k),\ (\nabla'_{e_i}\sigma)(E_j, E_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}(E_i, E_j)E_k),\ \sigma(E_j, E_k)\rangle \\
& + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(E_i, E_j)E_k,\ (\nabla'_{e_i}\sigma)(e_j, e_k)\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3) の 2 番目の等号後の第 1 項に Ricci の公式 (2.9), 第 2 項に Codazzi の方程式 (2.7) を適用して計算することによって求める等式が得られる. ∎

ここで, M^n の平均曲率が平行であるという仮定をつけると次が導かれる.

命題 3.2 M^n を $n+p$ 次元リーマン多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元部分多様体で平均曲率が平行であるとするとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \;& \|\nabla'\sigma\|^2 + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}(E_i,E_j)E_k),\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_j}(\overline{R}(E_i,E_k)E_i)^N,\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)\sigma(e_i,e_k),\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_i,\,A_{\sigma(e_j,e_k)}e_k\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_k,\,A_{\sigma(e_j,e_k)}e_i\rangle \\ & + \textstyle\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\,(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\,A_\alpha A_\beta)^2 \\ & + \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}_{\mathfrak{H}}\mathrm{L},\end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし, Tr は *trace* を取ることを意味する.

上の式から特に次が導かれる. これがいわゆる Simons の等式と呼ばれるものと等価である.

命題 3.3 ([16], Theorem 4.2.1) M^n を $n+p$ 次元リーマン多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元極小部分多様体とするとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \;& \|\nabla'\sigma\|^2 + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}(E_i,E_j)E_k),\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_j}(\overline{R}(E_i,E_k)E_i)^N,\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)\sigma(e_i,e_k),\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_i,\,A_{\sigma(e_j,e_k)}e_k\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_k,\,A_{\sigma(e_j,e_k)}e_i\rangle \\ & + \textstyle\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\,(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\,A_\alpha A_\beta)^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

さらにこれから次が得られる.

命題 3.4 ([7]) M^n を $n+p$ 次元局所対称リーマン多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元極小部分多様体とするとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \;& \|\nabla'\sigma\|^2 - \textstyle\sum_{i,k}\langle Le_k,\,\overline{R}(e_i,e_k)e_i\rangle \\ & + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)\sigma(e_i,e_k),\,\sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_i,\,A_{\sigma(e_j,e_k)}e_k\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle\overline{R}(e_i,e_j)e_k,\,A_{\sigma(e_j,e_k)}e_i\rangle \\ & + \textstyle\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\,(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\,A_\alpha A_\beta)^2\end{aligned} \tag{3.6}$$

証明　$\overline{M}^{n+p}$ が局所対称であることから次の 2 式が得られる:

$$\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}(E_i,E_j)E_k) = (\overline{\nabla}_{e_i}\overline{R})(e_i,e_j)e_k = 0, \tag{3.7}$$

$$\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}(E_i, E_k)E_i)^N = -\overline{\nabla}_{e_j}(\overline{R}(E_i, E_k)E_i)^T, \tag{3.8}$$

ただし, $(\ )^T$ は $(\ )$ 内のベクトルの TM 方向への直交射影を表す.
(3.8) より次を得る:

$$\begin{aligned} & \langle \overline{\nabla}_{e_j}(\overline{R}(E_i, E_k)E_i)^N,\, \sigma(e_j, e_k)\rangle \\ = \ & -\langle \overline{\nabla}_{e_j}(\overline{R}(E_i, E_k)E_i)^T,\, \sigma(e_j, e_k)\rangle \\ = \ & -\langle \sigma(e_j, (\overline{R}(E_i, E_k)E_i)^T),\, \sigma(e_j, e_k)\rangle \\ = \ & -\langle A_{\sigma(e_j,e_k)}e_j,\, \overline{R}(E_i, E_k)E_i\rangle. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.7), (3.9) を (3.5) の右辺に代入して (2.4) を用いれば求める等式が得られる. ∎

また, 曲率不変部分多様体の場合

命題 3.5 M^n を $n+p$ 次元局所対称リーマン多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元曲率不変部分多様体で平均曲率が平行であるとするとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ & \|\nabla'\sigma\|^2 + \textstyle\sum_{i,j,k}\langle \overline{R}(e_i, e_j)\sigma(e_i, e_k),\, \sigma(e_j, e_k)\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle \overline{R}(e_i, e_j)e_i,\, A_{\sigma(e_j,e_k)}e_k\rangle \\ & - \textstyle\sum_{i,j,k}\langle \overline{R}(e_i, e_j)e_k,\, A_{\sigma(e_j,e_k)}e_i\rangle \\ & + \textstyle\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}\,(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\,A_\alpha A_\beta)^2 \\ & + \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}_{\mathfrak{H}}\mathrm{L}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

ambient space と部分多様体を特定すると, それぞれ以下の公式が導かれる.

実空間型内の部分多様体に対しては次の命題が導かれる.

命題 3.6 ([16], [7]) M^n を断面曲率 c をもつ $n+p$ 次元実空間型 $\overline{M}^{n+p}(c)$ 内の n 次元部分多様体とするとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ & \|\nabla'\sigma\|^2 + \textstyle\sum_{j,k}\langle \overline{\nabla}_{e_j}\nabla^{\perp}_{E_k}\mathfrak{H},\, \sigma(e_j, e_k)\rangle \\ & + cn\|\sigma\|^2 - c\langle \mathfrak{H},\, \mathfrak{H}\rangle + \textstyle\sum_{j,k}\langle A_{\mathfrak{H}}e_j,\, A_{\sigma(e_j,e_k)}e_k\rangle \\ & + \textstyle\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 - \sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\,A_\alpha A_\beta)^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

証明　命題 3.1 に対して, (2.10), (2.6) および (2.8) を用いれば得られる. ∎

複素空間型内の複素部分多様体に対しては次が得られる.

命題 3.7 ([14]) M_n を正則断面曲率 $\tilde{c}$ をもつ複素 $n+p$ 次元複素空間型 $\overline{M}_{n+p}(\tilde{c})$ 内の n 次元複素部分多様体とするとき, 次の等式が得られる:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ & \|\nabla'\sigma\|^2 + \tfrac{(n+2)}{2}\tilde{c}\|\sigma\|^2 - 8\mathrm{Tr}\,(\textstyle\sum_{t=1}^{p} A_t^2)^2 \\ & - \textstyle\sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\,A_\alpha A_\beta)^2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ただし, 添字 t に関する和は $T^{\perp}M$ の *unitary frame* に渡る和を意味し, 添字 α, β に関する和は $T^{\perp}M$ の正規直交基底に渡る和を意味する.

証明　命題 3.4 に対して, (2.11), (2.6) および (2.8) を用いれば得られる. ∎

複素空間型内の全実部分多様体については、次が得られる.

命題 3.8 ([1], Proposition 3.5) M^n を正則断面曲率 $\tilde{c}$ をもつ複素 $n+p$ 次元複素空間型 $\overline{M}_{n+p}(\tilde{c})$ 内の実 n 次元全実部分多様体とするとき、次の等式が得られる:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ & \|\nabla'\sigma\|^2 + \textstyle\sum_{j,k}\langle\overline{\nabla}_{e_j}\nabla^{\perp}_{E_k}\mathfrak{H},\, \sigma(e_j,e_k)\rangle \\ & + \tfrac{(n+1)}{4}\tilde{c}\|\sigma\|^2 - \tfrac{\tilde{c}}{2}\langle\mathfrak{H},\, \mathfrak{H}\rangle \\ & + \textstyle\sum_{j,k}\langle A_{\mathfrak{H}}e_j,\, A_{\sigma(e_j,e_k)}e_k\rangle + \sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Tr}(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)^2 \\ & - \textstyle\sum_{\alpha,\beta}(\mathrm{Tr}\, A_\alpha A_\beta)^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

証明　命題 3.1 に対して, (2.11), (2.6) および (2.8) を用いれば得られる. ∎

4　Ros の積分公式

この節では A. Ros の積分公式 [10] について説明する. Riemann 多様体 M に対して, その単位接バンドルすなわち長さが 1 の接ベクトル全体の集合を UM で表すことにする. 基本原理は次である.

命題 4.1 *M を n 次元コンパクト Riemann 多様体とするとき, k 次共変テンソル F に対して次の等式が成立する:*

$$\int_{UM}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}F)(e_i,v,\cdots,v)\right\}dv = 0, \tag{4.1}$$

ただし dv は UM 上の体積要素を表す.

M^n が Riemann 多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の部分多様体であるとき, $T^{\perp}M$ 上の対称双 1 次形式 T を $T(\xi,\eta) = \mathrm{Tr}\, A_\xi A_\eta,\ \xi, \eta \in T_p^{\perp}M,\ p \in M$ で定義する. M 上の 5 次共変テンソル $F(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5) = \langle(\nabla_{v_1}\sigma)(v_2,v_3),\, \sigma(v_4,v_5)\rangle$ に対して命題 4.1 を適用することにより次が得られる:

命題 4.2 *M^n を $n+p$ 次元 Riemann 多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元コンパクト部分*

多様体とするとき, 次の等式が得られる:

$$
\begin{aligned}
0 = \ & \tfrac{n+4}{3}\int_{UM}\|(\nabla'_v\sigma)(v,v)\|^2dv + \int_{UM}\langle\nabla^{\perp}_v(\nabla^{\perp}_V\mathfrak{H}),\ \sigma(v,v)\rangle dv \\
& + \int_{UM}\langle\textstyle\sum_{i=1}^n \nabla^{\perp}_v(\overline{R}(E_i,V)E_i)^N,\ \sigma(v,v)\rangle dv \\
& -\tfrac{2}{3}\int_{UM}\langle\nabla^{\perp}_v\mathfrak{H},\ (\nabla'_v\sigma)(v,v)\rangle dv \\
& -\tfrac{2}{3}\int_{UM}\langle\textstyle\sum_{i=1}^n(\overline{R}(e_i,v)e_i)^N,\ (\nabla'_v\sigma)(v,v)\rangle dv \\
& -\tfrac{2}{3}\int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^n\langle(\nabla'_{e_i}\sigma)(v,v),\ (\overline{R}(v,e_i)v)^N\rangle dv \\
& + \int_{UM}\langle\textstyle\sum_{i=1}^n \nabla^{\perp}_{e_i}(\overline{R}(E_i,V)V)^N,\ \sigma(v,v)\rangle dv \\
& +(n+4)\int_{UM}\|A_{\sigma(v,v)}v\|^2dv - 4\int_{UM}\langle Lv,\ A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv \\
& + \int_{UM}\langle A_{\mathfrak{H}}v,\ A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv - 2\int_{UM}T(\sigma(v,v),\sigma(v,v))dv \\
& + \int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)\sigma(e_i,v),\ \sigma(v,v)\rangle dv \\
& +2\int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)v,\ A_{\sigma(e_i,v)}v\rangle dv,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

ただし, V は各点 $p\in M$ の近傍で定義された単位接ベクトル場で $V(p)=v$, $\nabla V(p)=0$ を満たすものとする.

証明　Codazzi の方程式 (2.7) および Ricci の方程式 (2.8) を用いると次が得られる:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{e_i}F)(e_i,v,v,v,v) = \ & \|(\nabla'_{e_i}\sigma)(v,v)\|^2 \\
& +\langle\nabla^{\perp}_v((\nabla'_V\sigma)(E_i,E_i)),\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +\langle\nabla^{\perp}_v(\overline{R}(E_i,V)E_i)^N,\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +\langle\nabla^{\perp}_{e_i}(\overline{R}(E_i,V)V)^N,\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +\langle R^{\perp}(e_i,v)\sigma(e_i,v),\ \sigma(v,v)\rangle \\
& -\langle\sigma(R(e_i,v)e_i,v),\ \sigma(v,v)\rangle \\
& -\langle\sigma(e_i,R(e_i,v)v),\ \sigma(v,v)\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

(4.3) の右辺第 5 項に Ricci の方程式 (2.8), 第 6 項と第 7 項に Gauss の方程式 (2.6) を適用することにより次を得る:

$$
\begin{aligned}
& \textstyle\sum_{i=1}^n(\nabla_{e_i}F)(e_i,v,v,v,v) \\
= \ & \textstyle\sum_{i=1}^n\|(\nabla'_{e_i}\sigma)(v,v)\|^2 \\
& +\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\nabla^{\perp}_v((\nabla'_V\sigma)(E_i,E_i)),\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\nabla^{\perp}_v(\overline{R}(E_i,V)E_i)^N,\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\nabla^{\perp}_{e_i}(\overline{R}(E_i,V)V)^N,\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)\sigma(e_i,v),\ \sigma(v,v)\rangle \\
& +2\textstyle\sum_{i=1}^n\langle A_{\sigma(v,v)}e_i,\ A_{\sigma(v,e_i)}v\rangle \\
& -\langle Lv,\ A_{\sigma(v,v)}v\rangle + \langle\tilde{S}v,\ A_{\sigma(v,v)}v\rangle \\
& -\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)v,\ A_{\sigma(v,v)}e_i\rangle \\
& -T(\sigma(v,v),\sigma(v,v)).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

U_pM 上の 1-form $\alpha_v(e) = \langle A_{\sigma(v,v)}e,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle$ に発散定理を適用すると次が得られる:

$$\begin{aligned} & 2\int_{U_pM}\sum_{i=1}^n \langle A_{\sigma(v,v)}e_i,\, A_{\sigma(e_i,v)}v\rangle dv_p \\ = \; & (n+4)\int_{U_pM}\|A_{\sigma(v,v)}v\|^2 dv_p - 2\int_{U_pM}\langle Lv,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv_p \\ & -\int_{U_pM} T(\sigma(v,v),\, \sigma(v,v))dv_p. \end{aligned} \tag{4.5}$$

また $\beta_v(e) = \langle(\nabla'_e\sigma)(v,v),\, (\nabla'_v\sigma)(v,v)\rangle$ に発散定理を適用すると:

$$\begin{aligned} & \int_{U_pM}\sum_{i=1}^n \|(\nabla'_{e_i}\sigma)(v,v)\|^2 dv_p \\ = \; & \tfrac{n+4}{3}\int_{U_pM}\|(\nabla'_v\sigma)(v,v)\|^2 dv_p - \tfrac{2}{3}\int_{U_pM}\langle\nabla^\perp_v\mathfrak{H},\, (\nabla'_v\sigma)(v,v)\rangle dv_p \\ & -\tfrac{2}{3}\int_{U_pM}\langle\textstyle\sum_{i=1}^n(\overline{R}(e_i,v)e_i)^N,\, (\nabla'_v\sigma)(v,v)\rangle dv_p \\ & -\tfrac{2}{3}\int_{U_pM}\textstyle\sum_{i=1}^n\langle(\nabla'_{e_i}\sigma)(v,v),\, (\overline{R}(v,e_i)v)^N\rangle dv_p. \end{aligned} \tag{4.6}$$

さらに $\gamma_v(e) = \langle\overline{R}(e,v)v,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle$ に発散定理を適用すると:

$$\begin{aligned} & 2\int_{U_pM}\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)v,\, A_{\sigma(e_i,v)}v\rangle dv_p \\ = \; & -\int_{U_pM}\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)e_i,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv_p \\ & -\int_{U_pM}\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)v,\, A_{\sigma(v,v)}e_i\rangle dv_p. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Gauss の方程式 (2.6) から:

$$\begin{aligned} & \langle\tilde{S}v,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle \\ = \; & \sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(v,e_i)e_i,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle \\ & +\langle A_{\mathfrak{H}}v,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle - \langle Lv,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle. \end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.4) に (4.5), (4.6), (4.7) および (4.8) を代入することによって求める等式が得られる. ∎

M が曲率不変部分多様体の場合には命題 4.2 から次が導かれる:

命題 4.3 M^n を $n+p$ 次元 *Riemann* 多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元コンパクト曲率不変部分多様体とするとき, 次の等式が得られる:

$$\begin{aligned} 0 = \; & \tfrac{n+4}{3}\int_{UM}\|(\nabla'_v\sigma)(v,v)\|^2 dv + \int_{UM}\langle\nabla^\perp_v(\nabla^\perp_V\mathfrak{H}),\, \sigma(v,v)\rangle dv \\ & -\tfrac{2}{3}\int_{UM}\langle\nabla^\perp_v\mathfrak{H},\, (\nabla'_v\sigma)(v,v)\rangle dv \\ & +(n+4)\int_{UM}\|A_{\sigma(v,v)}v\|^2 dv - 4\int_{UM}\langle Lv,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv \\ & +\int_{UM}\langle A_{\mathfrak{H}}v,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv - 2\int_{UM}T(\sigma(v,v),\sigma(v,v))dv \\ & +\int_{UM}\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)\sigma(e_i,v),\, \sigma(v,v)\rangle dv \\ & +2\int_{UM}\sum_{i=1}^n\langle\overline{R}(e_i,v)v,\, A_{\sigma(e_i,v)}v\rangle dv. \end{aligned} \tag{4.9}$$

ここからさらに次が導かれる:

命題 4.4 M^n を $n+p$ 次元 *Riemann* 多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元コンパクト曲率不変部分多様体で平均曲率が平行であるとするとき, 次の等式が得られる:

$$\begin{aligned}0 = \;& \tfrac{n+4}{3}\int_{UM}\|(\nabla'_v\sigma)(v,v)\|^2dv + (n+4)\int_{UM}\|A_{\sigma(v,v)}v\|^2dv \\ & -4\int_{UM}\langle Lv,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv + \int_{UM}\langle A_{\mathfrak{H}}v,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv \\ & -2\int_{UM}T(\sigma(v,v),\sigma(v,v))dv \\ & +\int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(e_i,v)\sigma(e_i,v),\, \sigma(v,v)\rangle dv \\ & +2\int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(e_i,v)v,\, A_{\sigma(e_i,v)}v\rangle dv.\end{aligned} \tag{4.10}$$

次が, いわゆる Ros の積分公式と呼ばれるものである.

命題 4.5 ([10], Proposition 1) M^n を $n+p$ 次元 *Riemann* 多様体 $\overline{M}^{n+p}$ の n 次元コンパクト曲率不変極小部分多様体とするとき, 次の等式が得られる:

$$\begin{aligned}0 = \;& \tfrac{n+4}{3}\int_{UM}\|(\nabla'_v\sigma)(v,v)\|^2dv + (n+4)\int_{UM}\|A_{\sigma(v,v)}v\|^2dv \\ & -4\int_{UM}\langle Lv,\, A_{\sigma(v,v)}v\rangle dv \\ & -2\int_{UM}T(\sigma(v,v),\sigma(v,v))dv \\ & +\int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(e_i,v)\sigma(e_i,v),\, \sigma(v,v)\rangle dv \\ & +2\int_{UM}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(e_i,v)v,\, A_{\sigma(e_i,v)}v\rangle dv.\end{aligned} \tag{4.11}$$

これらを特定の ambient space 内の部分多様体に適用することによって, さらに様々な公式が派生する (cf. [10]).

5 応用

この節では, Simons の等式の 1 つの応用として筆者が最近得た結果 [11] について説明する. 定理は次である:

定理 5.1 M^n $(n \geq 3)$ を正則断面曲率非負一定 $\tilde{c} \geq 0$ の n 次元複素空間型 $\overline{M}_n(\tilde{c})$ 内の実 n 次元完備 *Lagrangian Einstein* 部分多様体で平均曲率が平行なものとすると, M^n は全測地的であるか $\mathbb{C}^n$ 内の $S^1(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ に合同である (λ の定義は定義 5.1 を参照).

この定理の証明の概要を述べる前に, 問題の背景を述べることにする. 「複素空間型内の Lagrangian 部分多様体で Einstein であるものを決定せよ」という問題は重要な未解決問題である. 非平坦な複素空間型内の Lagrangian 部分多様体で全斉的なものは全測地的なもの以外に無いという事が知られている [1]. そこで, B. Y. Chen は次に簡単な部分多様体として H-umbilical 部分多様体という概念を導入した.

定義 5.1 ([4]) 複素空間型 $\overline{M}_n(\tilde{c})$ 内の *Lagrangian* 部分多様体 M^n が *H-umbilical* であるとは, M^n の各点の近傍に関数 $\lambda,\ \mu$ と局所正規直交標構場

$e_1, \ldots, e_n$ が存在して, M^n の第2基本形式 σ に対して次の式が成り立つことを言う:

$$\begin{aligned} &\sigma(e_1,e_1) = \lambda J e_1,\ \sigma(e_2,e_2) = \cdots = \sigma(e_n,e_n) = \mu J e_1, \\ &\sigma(e_1,e_j) = \mu J e_j,\ \sigma(e_j,e_k) = 0,\ j \neq k,\ j,\, k = 2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

H-umbilical 部分多様体の典型的な例として複素射影空間 $\mathbb{C}P_2(\tilde{c})$ 内の flat-torus がある [9]. これに対しては $\lambda = \frac{\sqrt{\tilde{c}}}{2\sqrt{2}}$, $\mu = -\frac{\sqrt{\tilde{c}}}{2\sqrt{2}}$ である. また複素空間型内の H-umbilical 部分多様体は B. Y. Chen によって完全に分類されている (cf. [3], [4], [5]). そこで, 我々は手始めに H-umbilical 部分多様体の中で Einstein であるものを決定しようと考えた.

定理 5.1 の証明の概要 M^n が Einstein であるという仮定から, (2.5) と (5.1) を用いると $\mu \equiv 0$ または, $\lambda = 2\mu$ かつ λ は定数, であることが導かれる. $\mu \equiv 0$ の場合には命題 3.8 を用いると次の等式が導かれる:

$$0 = \frac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \frac{\tilde{c}}{4}(n-1)\lambda^2 + \|\nabla'\sigma\|^2.$$

したがって, $\tilde{c} > 0$ の場合には $\lambda \equiv 0$ が導かれて M^n は全測地的であることが分かる. また $\tilde{c} = 0$ の場合には $\nabla'\sigma \equiv 0$ から M^n は $\mathbb{C}^n$ の平行部分多様体であることが分かり, したがって Ferus [8] による分類定理から M^n は $S^1(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ に合同であることが分かる. さらに, $\lambda = 2\mu \neq 0$ かつ定数とすると命題 3.8 から次の等式が導かれる:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{1}{2}\triangle\|\sigma\|^2 = \ &(n^2-1)\mu^2(\tfrac{\tilde{c}}{4} + \mu^2) + \|\nabla'\sigma\|^2 \\ &+ \textstyle\sum_{i,j,k}\langle \overline{\nabla}_{e_j}((\nabla'_{E_k}\sigma)(E_i,E_i)), \sigma(e_j,e_k)\rangle. \end{aligned}$$

しかしながらこの等式は平均曲率が平行であることと矛盾する. したがってこの場合は起こらないことがわかる. 以上によって定理が証明された. ∎

最後に Ogiue 予想 [13] のうち未解決の問題を揚げておく.

問題 M_n を複素射影空間 $\mathbb{C}P_{n+p}$ 内の n 次元完備複素部分多様体とする. もし断面曲率 $K > 0$ かつ $p < \frac{n(n+1)}{2}$ であるならば M_n は全測地的か?

参考文献

[1] B. Y. Chen and K. Ogiue, *On totally real submanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **193**(1974), 257–266.

[2] B. Y. Chen and K. Ogiue, *Two theorems on Kaehler manifolds*, Michigan Math. J. **21**(1974), 225–229.

[3] B. Y. Chen, *Complex extensors and Lagrangian submanifolds in complex euclidean spaces*, Tôhoku Math. J. **49**(1997), 277-297.

[4] B. Y. Chen, *Interaction of Legendre curves and Lagrangian submanifolds*, Israel J. Math. **99**(1997), 69–108.

[5] B. Y. Chen, *Intrinsic and extrinsic structures of Lagrangian surfaces in complex space forms*, Tsukuba J. Math. **22**(1998), 657-680.

[6] S. S. Chern, *Minimal submanifolds in a riemannian manifold*, Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kansas (1968).

[7] S. S. Chern, M. Do Carmo and S. Kobayashi, *Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length*, Functional Analysis and Related Fields, Springer, Berlin (1970), 59–75.

[8] D. Ferus, *Symmetric Submanifolds of Euclidean Space*, Math. Ann. **247**(1980), 81–93.

[9] G. D. Ludden, M. Okumura and K. Yano, *A totally real surface in CP^2 that is not totally geodesic*, Proc. Amer. Math. Soc. **53**(1975), 186–190.

[10] S. Montiel, A. Ros and F. Urbano, *Curvature pinching and eigenvalue rigidity for minimal submanifolds*, Math. Z. **191**(1986), 537–548.

[11] S. Nagai, *Einstein H-umbilical submanifolds with parallel mean curvatures in complex space forms*, Nihonkai Math. J. **14**(2003), 77–82.

[12] K. Nomizu and B. Smyth, *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geom. **3**(1969), 367–377.

[13] K. Ogiue, *Differential geometry of Kaehler submanifolds*, Advances in Math. **13**(1974), 73–114.

[14] K. Ogiue, *Positively curved complex submanifolds immersed in a complex projective space*, J. Differential Geom. **11**(1976), 613–615.

[15] K. Ogiue, *Some recent topics in the theory of submanifolds*, Sugaku Exposition **4**(1991), 21–41.

[16] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math. **89**(1968), 62–105.

[17] S. T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature I*, Amer. J. Math. **96**(1974), 346–366.

[18] S. T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature II*, Amer. J. Math. **97**(1975), 76–100.