

# 質量保存型有限要素法による自由界面流れ解析

総合情報基盤センター 講師 奥村 弘

okumura@cns.toyama-u.ac.jp

教育学部 教授 大森 克史

ohmori@edu.toyama-u.ac.jp

In the numerical simulation for the free interface flow problems, it is important to capture the interface sharply and to ensure the mass conservation of both fluids as precisely as possible. Introducing a *flux functional* on the interface, the *mass conservation constraint* is included in the variational formulation for the Navier-Stokes equations. Then we define a mass conservative finite element scheme based on the *Eulerian* approach for immiscible incompressible two-fluid flows by using the *Lagrange multiplier* technique. In order to show the effectiveness of our scheme we give sloshing simulations as a numerical experiment.

**Key Words :** *Free interface problem, mass conservative finite element method, Lagrange multiplier, Eulerian approach, incompressible Navier-Stokes equation*

## 1. はじめに

河川や海洋の流れなどに見られるように、流体が空気と接触している場合、その接触面は自由表面 (free surface) といい、その運動は流体力学的に自由表面流れ (free surface flow) 問題と呼ばれている。また、流体が空気と接触している場合だけでなく、ある流体が別の流体と接触して界面 (interface) を有する運動は、自由界面 (free interface) あるいは移動界面 (moving interface) 流れ問題と呼ばれ、加振された容器内の液体振動 (スロッシング; sloshing) やインクジェットプリンター技術におけるナノスケールの液体噴流現象に至るまで様々な工学プロセスにおいても見ることができる。また、昨年多発した石油コンビナート火災の原因が、地震の揺れにより誘発されたスロッシングによるものといわれており、防災工学の分野においても注目が集まっている。これら自由表面と自由界面を有する流れ問題はより広義の意味において、移動境界 (moving boundary) 問題と呼ばれている。なお、本報では自由界面流れ問題を議論の対象として話を進める。

自由界面問題における数値シミュレーションでは、界面の数値的再現と数値的収束など、界面の評価が極めて重要である<sup>1)</sup>。界面の数値的取り扱い方法としては、オイラーの方法 (Eulerian) およびラグランジュの方法 (Lagrangian) に大別することができる。オイラーの方法の特徴としては、固定メッシュを用いることができることから計算アルゴリズムの構築が容易である。しかしながら、界面を陰的に捕獲しなければならないため、VOF (Volume of Fluid) 関数<sup>2)</sup> やレベルセット関数<sup>3)</sup> および擬密度 (pseudo density) 関数<sup>1)</sup> などにより界面を表現しなければならない。一方、ALE (Arbitrary

Lagrangian-Eulerian) 法<sup>4)</sup> に代表されるラグランジュの方法ではメッシュ移動により界面の表現が容易であるが、界面の現象が複雑になると過度のメッシュ変形により計算が破綻するため、複雑な流れを対象とした工学的アプリケーションには適していない。また、これを回避するためにメッシュ再分割 (remeshig) や再配分 (rezoning) が必要であるため計算負荷の面で課題が残されている<sup>5)</sup>。

自由界面問題の数値シミュレーションにおいて、他の重要な問題としては流体の質量保存性があげられる<sup>1)</sup>。例えば、非圧縮性を有する混ざり合わない (immiscible) 2流体流れ問題の場合では、各流体の質量は保存されなければならない。しかしながら、数値シミュレーションでは、近似問題における非圧縮性の欠如により質量が減少あるいは増加することが知られている<sup>1)</sup>。

このような背景のもと、自由界面流れ問題の数値シミュレーションにおいて質量保存性を高める研究が盛んに行われている<sup>6)</sup>。損失した質量を復元する方法が多く提案されているが、流体力学的に整合性が取れていない場合には正確な界面の挙動を追うことは難しい<sup>1)</sup>。Formaggia らはラグランジュの方法により質量保存を拘束条件とする有限要素法を提案した<sup>7)</sup>。また、Ohmori らはオイラーの方法による質量保存型有限要素法を提案している<sup>8)</sup>。この中で、フラックス汎関数 (flux functional)<sup>7)</sup> と呼ばれる汎関数を界面上で定義することにより界面を通過する流速フラックスが0となる拘束条件をラグランジュ乗数を用いて変分定式化を行っている。本報では、工学的アプリケーションに優れたオイラーの方法に基づく質量保存型有限要素法<sup>8)</sup> を解説し、いくつかの数値シミュレーションにより質量保存性を検証する。

## 2. ラグランジュ乗数を用いた変分定式化

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$  を有界領域とし, その境界を  $\Gamma = \partial\Omega$  とする.  $\Omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) を密度  $\rho_\alpha$ , 粘性  $\mu_\alpha$  の非圧縮性流体 *fluid # $\alpha$*  で占められる  $\Omega$  の部分領域とし,  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  を満たすとする. ここで, 2つの流体の界面を  $\Sigma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$  とする. さらに各流体は混ざらない (*immiscible*) ものとし, 次の支配方程式を考える.

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1)$$

ただし,  $\nu = \mu/\rho$  は動粘性係数,  $\mathbf{f} = \mathbf{F}/\rho$  は外力である. ここで  $\mathbf{u}^{(\alpha)} = \mathbf{u}|_{\Omega_\alpha}$ ,  $p^{(\alpha)} = p|_{\Omega_\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ) とする. また, 密度および粘性係数は各流体で一定とする.

$$\nu = \begin{cases} \nu_1 = \mu_1/\rho_1 & \text{in } \Omega_1, \\ \nu_2 = \mu_2/\rho_2 & \text{in } \Omega_2. \end{cases} \quad (2)$$

連続問題においては,  $0 < t_1 < t_2$  に対して,

$$\begin{aligned} & \operatorname{meas}(\Omega_\alpha(t_2)) - \operatorname{meas}(\Omega_\alpha(t_1)) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_\alpha(t)} \operatorname{div} \mathbf{u}^\alpha \, dx \, dt = 0 \end{aligned}$$

より, 各流体の質量は保存される. しかしながら近似問題では  $\int_{\Omega_\alpha(t)} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^\alpha \, dx = 0$  を実現することの困難さから, これを期待するのは難しい. しかしながら, もし

$$\int_{\Sigma(t)} \mathbf{u}_h^\alpha \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = 0$$

を制約条件として課すことができれば, 質量保存性が期待される<sup>7) 8)</sup>.

このとき, (E) に対するラグランジュ乗数を用いた変分定式化を以下のように定義する:

Find  $(\mathbf{u}, p, \lambda) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{R}$  for  $t > 0$  s.t.

$$(II) \begin{cases} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ \quad + \lambda \langle \phi, \mathbf{v} \rangle_\Sigma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ (q, \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ \langle \phi, \mathbf{u} \rangle_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (3)$$

ただし,  $\langle \phi, \mathbf{u} \rangle_\Sigma$  はフラックス汎関数<sup>7)</sup>と呼ばれ次式で定義される.

$$\langle \phi, \mathbf{v} \rangle_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 \quad (4)$$

ここで,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^{(1)}$  は界面  $\Sigma$  における *fluid#1* から *fluid#2* に向かう単位法線ベクトルである ( $\mathbf{n}^{(2)} = -\mathbf{n}^{(1)}$ ).

また, 界面の挙動は VOF 関数  $\varphi$  に関する以下の移流方程式で記述される<sup>2)</sup>.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \quad (5)$$

ここで, VOF 関数  $\varphi$  は *fluid#1* で 1, *fluid#2* で 0, 界面上で 0.5 とする. また, 界面  $\Sigma$  上の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は以下のように求められる.

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \quad \text{on } \Sigma. \quad (6)$$

## 3. 質量保存型有限要素スキーム

ターゲット方程式である (II) に対し MINI 要素<sup>9)</sup> による有限要素スキームを提案する. まず, 有限要素近似空間としては以下に定義する 1 次要素の有限要素空間  $\bar{V}_h$ ,  $Q_h$  と気泡関数<sup>10)</sup> の空間  $V'_h$  を用いる.

$$\begin{cases} \bar{V}_h = \{ \bar{v}_h \in C(\Omega), \bar{v}_h|_K \in P_1(K) \\ \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \\ V'_h = \{ v'_h \in C_0(\Omega), v'_h|_K = b_K v'_K, \\ \quad v'_K \in \mathbf{R} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}, \\ Q_h = \{ q_h \in C(K), q_h|_K \in P_1(K) \\ \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \int_\Omega q_h \, dx = 0 \}, \end{cases} \quad (7)$$

ただし,  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  は  $\bar{\Omega}$  の正則な三角形分割族とする. ここで,  $b_K \in H_0^1(K)$  は要素領域  $K$  をコンパクトな台とする気泡関数であり,  $V'_h$  は気泡関数による近似空間に対応している. 次に  $\Delta t > 0$  を時間ステップ幅とし, 時間変数の一様メッシュを  $t_n = n\Delta t$  for  $n = 0, 1, 2, \dots, [T/\Delta t]$ , とする. このとき, 有限要素近似空間として流速場に  $(V_h)^2 = (\bar{V}_h)^2 \oplus (V'_h)^2$  を, 圧力場に  $Q_h$  を用いることにより 次の有限要素スキームを考える. ただし,  $\mathbf{u}_h^n, p_h^n, \lambda_h^n$  はそれぞれ速度  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ , 圧力  $p(\mathbf{x}, t_n)$ , ラグランジュ乗数  $\lambda(t_n)$  の近似を表す.

$$(II_h^n) \begin{cases} \left( \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) + (\mathbf{u}_h^* \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2}, \mathbf{v}_h) \\ \quad - (p_h^{n+1}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1/2}, \nabla \mathbf{v}_h) \\ \quad = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) + \lambda_h^{n+1} \langle \phi, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in (V_h)^2, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \\ \langle \phi, \mathbf{u}_h^{n+1} \rangle_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (8)$$

ここで, 移流速度  $\mathbf{u}_h^*$  は 2 次精度 Adams-Bashforth 公式  $\mathbf{u}_h^* = \frac{1}{2}(3\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1})$  により準線形化している. このとき, 有限要素スキーム  $(II_h^n)$  は時間ステップ幅  $\Delta t$

に対して2次精度を有する線形スキーム<sup>11)</sup>となっている。また、気泡関数には関数形状を形状パラメータで制御することができるP型正規化気泡関数<sup>12)</sup>を用いることで、流速場と圧力場に対して適切な安定化効果を与えることができる<sup>13)</sup>。

#### 4. 界面の移流方程式に対する有限要素スキーム

移流方程式(5)に対する有限要素近似としてはP型正規化気泡関数<sup>4)</sup>による気泡関数要素  $V_h = \bar{V}_h \oplus V'_h$  を使い、時間方向に対しては2次精度の有限要素スキーム<sup>3)</sup>を以下のように考える。ただし、 $\varphi_h^n$ はVOF関数  $\varphi(x, t_n)$  の近似を表す。

$$\left(\frac{\varphi_h^{n+1} - \varphi_h^n}{\Delta t}, v_h\right) + (u_h^* \cdot \nabla \varphi_h^{n+1/2}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \quad (9)$$

なお、上式の近似問題に対する数値安定性については、他の文献<sup>14)15)</sup>を参考にされたい。

#### 5. 数値実験および考察

本手法の質量保存性を検証するために、スロッシング問題<sup>7)</sup>を取り上げる。解析モデルはFig.1に示すような  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  の正方矩形領域に各流体が同じ質量で満たされているものと仮定する。この領域をFig.2で示すような3角形要素で  $20 \times 20$  分割し ( $h = \sqrt{2}/20$ )、各流体の密度、粘性をそれぞれ  $\rho_1 = 0.91$ ,  $\rho_2 = 1.0$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.005$  とする。そして、流体に  $f = (f_1, f_2) = (a g \sin(2\pi\beta t), -g)$  で表される加速度を与え、 $t = 0$ における質量  $meas(\Omega_1) = meas(\Omega_2) = 0.5$  の時間変化を調べた。ここで、 $a = 0.05$ ,  $g = 9.8$ ,  $\beta = 0.0625$  である。時間ステップ幅としては  $\Delta t = 0.01$  を選んだ。

Fig.3は界面右端における変動の様子を示したものである。フラックス汎関数を有する本手法 (With Flux) と用いない手法 (Without Flux) とを比較すると同一の現象を再現していることが分かる。このことは、フラックス汎関数を有する手法が、再現する現象に対して制約を与えないことを意味している。また、Fig.4の相対質量の時間変化より、フラックス汎関数を用いない方法 (Without flux) に比べ、フラックス汎関数を有する方法 (With flux) の方が、質量保存性が高いことが分かる。

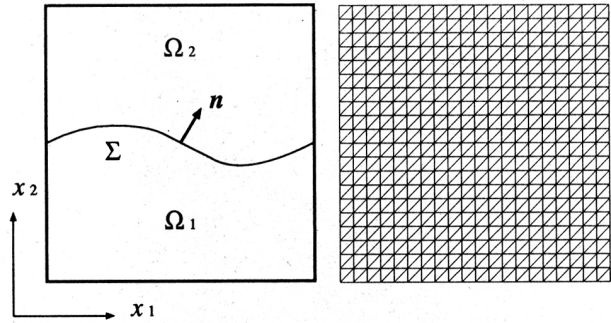


Fig.1 解析モデル

Fig.2 有限要素分割

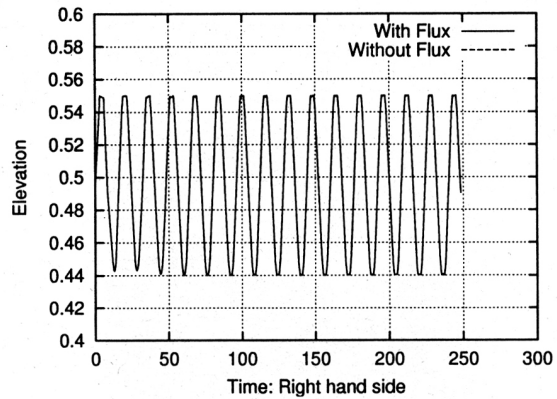


Fig.3 界面変動 (右端)

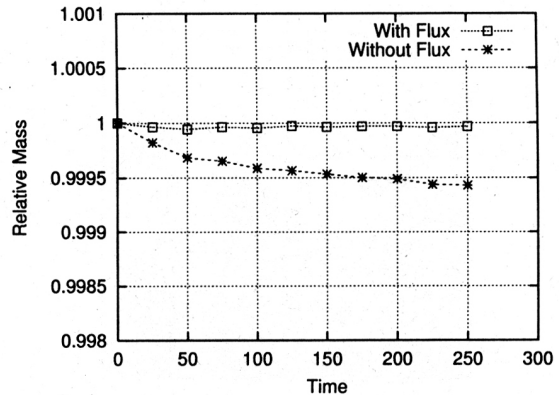
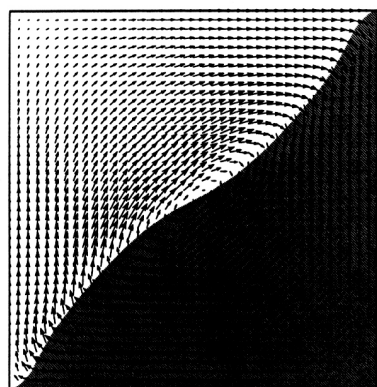
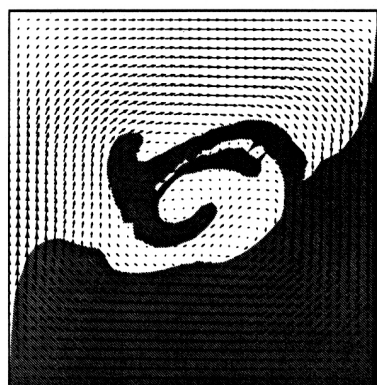


Fig.4 相対質量変化

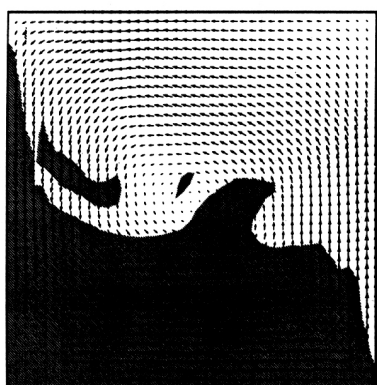
別の数値実験として高レイノルズ数流れにおけるスロッシング問題を取り上げる。解析モデルはFig.1と同じである。有限要素分割はFig.2をさらに2倍に分割したものを用いる ( $40 \times 40$  分割,  $h = \sqrt{2}/40$ )。粘性係数を  $\mu_1 = \mu_2 = 0.001$ , 加速度を  $a = 0.8$ ,  $\beta = 0.1$  として、 $T = 2500$  まで質量の変化を調べた。本手法における質量減衰率は  $8.0 \times 10^{-5}$  であり、フラックス汎関数を用いない手法では  $4.1 \times 10^{-4}$  であったことから、本手法は高レイノルズ数の複雑な流れ場においても高い質量保存性を有する手法であるといえる。また、Fig.5に示すように複雑な界面の挙動を正確に追跡していることが分かる。



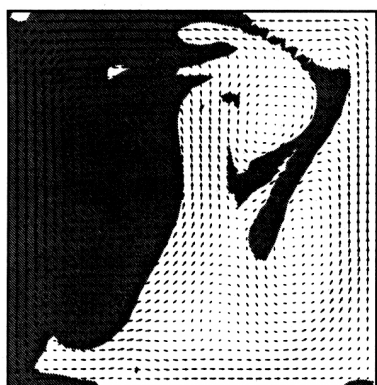
$t = 0.5$



$t = 1.5$



$t = 2.0$



$t = 4.0$

Fig. 5 界面の様子と流速ベクトル

## 6. おわりに

本報では質量保存型有限要素法を紹介し、数値実験としてスロッシング問題を取り上げた。質量保存型有限要素法は複雑な移動界面流れ問題も正確に解くことができ、さらに質量保存性が非常に高い手法であることが分かった。今後は、ここで提案したスキームを実問題の実験結果と比較し、本スキームの有効性を検証したい。

### 参考文献

- 1) K. Ohmori, Convergence of the interface in the finite element approximation for two-fluid flows, R.Salvi. ed., *the Navier-Stokes equations: theory and numerical methods*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Vol.223 (2002), pp.279-293.
- 2) T. Nakayama and M. Shibata: A finite element technique combined with gas-liquid two-phase flow calculation for unsteady free surface flow problems, *Comput. Mechanics*, 22, pp.194-202, 1998. No.56-531, pp.2348-3256, 1990.
- 3) M. Sussman, P. Smereca and S. Osher: A level set approach for computing solutions for incompressible two-phase flow, *J. Comput. Physics*, 144, pp.146-159, 1994.
- 4) T. Nomura: ALE finite element computation of fluid-structure interaction problems, *Comput. Meth. Appl. Eng.*, 112, pp.291-308, 1994.
- 5) 桜庭 雅明, 田中 聖三, 榎山 和男: PC クラスタを用いた ALE 並列有限要素法による非線形自由表面流れ解析, *応用力学論文集*, Vol.4, pp.113-120, 2001.
- 6) 桜庭 雅明, 弘崎 聡, 榎山 和男: 自由表面流れ解析のための CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕獲法の構築, *非線形自由表面流れ解析, 応用力学論文集*, Vol.6, pp.215-222, 2003.
- 7) L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile and A. Quarteroni, Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier-Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.40(2002), No.1, pp.376-401.
- 8) 大森 克史, 奥村 弘, ラグランジュ乗数を用いた質量保存型有限要素法による移動界面問題の解析, 第 17 回数値流体力学シンポジウム, 2003.
- 9) D.N. Arnold, F. Brezzi and M. Fortan: A stable finite element for the Stokes equation, *Calcolo* 23, pp.337-344, 1984.
- 10) F. Brezzi and M. Fortan: *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.
- 11) J.C. Simo, F. Armero and C. Taylor: Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advection dominated flows, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.38 (1995), pp.1475-1506.
- 12) T. Yamada: A bubble element for inviscid flow, *Finite Elements in Fluids*, Vol.9, pp.1567-1576, 1995.
- 13) H. Okumura and M. Kawahara, A new stable bubble element for incompressible fluid flow based on a mixed Petrov-Galerkin finite element formulation, *IJCFD*, August 2003 Vol.17(4), pp.275-282.
- 14) T. Yamada: A bubble element for the compressible Euler equations, *IJCFD*, Vol.9, pp.273-283, 1998.
- 15) 奥村 弘, 川原 睦人: 気泡関数要素を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する Petrov-Galerkin 有限要素法, *応用力学論文集*, Vol. 4, pp.121-126, 2001.