氏名	こぎえ　あつこ 漕江　厚子
学位の種類	博　　士（理学）
学位記番号	富理工博甲第 67 号
学位授与年月日	平成 26 年 3 月 21 日
専攻名	数理・ヒューマンシステム科学専攻
学位授与の要件	富山大学学位規則第 3 条第 3 項該当
学位論文題目	A GENERALIZATION OF WEIERSTRASS '$\wp$-FUNCTION TO QUASI-ABELIAN VARIETIES （準アーベル多様体へのワイエルシュトラスの $\wp$関数の一般化）
論文審査委員	
（主査）	濱名　正道
	阿部　幸隆
	藤田　景子
	栗本　猛

学位論文の要旨

学位論文題目　A GENERALIZATION OF WEIERSTRASS' $\wp$-FUNCTION TO QUASI-ABELIAN VARIETIES
(準アーベル多様体へのワイエルシュトラスの $\wp$ 関数の一般化)

数理・ヒューマンシステム科学専攻

氏名　漕江厚子

For a given lattice Γ Weierstrass constructed a doubly periodic meromorphic function on $\mathbb{C}$ with period Γ. We call it Weierstrass' $\wp$-function. It was generalized on abelian varieties by Zappa in 1983. Let $T^n = \mathbb{C}^n/\Gamma$ be an n-dimentional complex torus. Γ-invariant $\overline{\partial}$-closed $(0, n-1)$-forms on $\mathbb{C}^n/\Gamma$ are considered as representatives of classes in $H^{n-1}(T^n \setminus \{0\}, \mathcal{O})$. First, Zappa constructed a Γ-invariant $\overline{\partial}$-closed $(0, n-1)$-form $\wp^i$, and then gave a $\overline{\partial}$-closed $(n-1, n-1)$-form $\wp^{ij}$ on $T^n \setminus \{0\}$ with the following property:
If T^n is an abelian variety and Θ is a divisor on T^n defined by a theta function θ, then we have

$$\int_{\Theta} \wp^{ij}(z-p) = -\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \log\theta\Big|_p + \text{constant}.$$

In the case of one variable, this is just the relation between Weierstrass' $\wp$-function and a theta function.

The purpose of this paper is to give a further generalization of Zappa's result. We show that we can construct a similar $(n-1, n-1)$-form $\wp^{ij}$ even for a non-compact quasi-abelian variety.

This paper consists of three chapters. In Chapter 1, we explain in detail a part of the theory of Andreotti-Norguet which is the basis of our argument.

We think that our proofs are more explicit and comprehensible than the original ones.

In Chapter 2, we state Zappa's result. Several lemmas and propositions are stated in more general setting in order to use them later.

In Chapter 3, Weierstrass' $\wp$-function is generalized on quasi-abelian varieties. Let $X = \mathbb{C}^n/\Gamma$ be a toroidal group. We can construct a Γ-invariant $\overline{\partial}$-closed $(n-1, n-1)$-form $\wp^{ij}$ on X in the same manner as in the case of complex tori. But when we consider a positive divisor Θ on X, we do not know in general the convergence of the integral of $\wp^{ij}$ on Θ, because Θ is not compact. Even if it converges, we are not able to apply the same argument as in the case of abelian varieties. We suppose that X is a quasi-abelian variety of kind 0 with the standard compactification $\overline{X}$. We further assume that a positive divisor Θ on X is holomorphically extendable to $\overline{X}$. Then we can prove that $\wp^{ij}$ is integrable on Θ and a similar equation as the case of abelian varieties is obtained (Theorem 3.7 in Chapter 3). To prove it, we first take a family of relatively compact subdomains in X. We give formulas on these subdomains. As the limit of them we obtain the expected formula.

[論文審査の結果の要旨]

当博士論文審査委員会は、当該論文を詳細に査読するとともに、平成２６年１月２８日（火）に学位論文公聴会を開催し、詳細な質疑応答により、慎重に審査した。以下に審査結果の要旨を記す。

本論文において、Weierstrass の $\wp$ 関数が準アーベル多様体に対して一般化された。これは、Zappa によるアーベル多様体への一般化を更に拡張した結果である。コンパクトな対象であるアーベル多様体から非コンパクトな準アーベル多様体への拡張には、技術的な困難がある。それを、相対コンパクトな部分領域で近似し、極限操作を行うという方法で克服している。

本論文は３つの章から構成されている。各章の概要は次の通りである。

第１章では、本論文における考察の基礎となる穴のあいた多重円板のコホモロジー群と一般化された Martinelli の公式が述べられている。そして、原論文の証明に比べてより明示的な証明がそれらに与えられている。

第２章の中で、Zappa によるアーベル多様体への一般化が詳述されている。ここでの議論は、本論文を理解する上で、その助けとなるものである。特に、その中で、級数で与えられた微分形式の収束性を示すために必要な補題が、第３章で適用できるように、より一般的な設定で述べられ、証明されている。また、Zappa による一連の論文は、すべてイタリア語で発表されているため、英語による詳細な記述自体にもその価値があると考えられる。

第３章において、Zappa の結果は準アーベル多様体へと一般化される。まず、Zappa が構成したような $(n-1, n-1)$ 型 $\overline{\partial}$ 閉形式 $\wp^{ij}$ をトロイダル群上に構成する。ここでは、第１章の結果と第２章の級数の収束に関する補題が重要な役割を果たしている。ついで、$\wp^{ij}$ を正因子上で積分するわけであるが、トロイダル群は一般に非コンパクトであるため、可積分性は不明である。また、Stokes の定理も適用できない。ここに、この研究における困難さがある。それを克服するために、相対コンパクトな部分領域で近似するという方法がとられている。各々の部分領域では、Poincaré-Lelong 方程式、Stokes の定理が機能し、部分領域上で $\wp^{ij}$ の積分に関する公式が導かれる。その極限を考えることで主結果を得ている。

第３章第１節にトロイダル群、準アーベル多様体の定義と本論文で用いる性質がまとめられている。

第３章第２節では、$\wp^{ij}$ をコホモロジー類に対応する $\overline{\partial}$ 閉形式から構成するため、穴のあいたトロイダル群のコホモロジー群を、第１章の結果、Mayer-Vietoris の定理、トロイ

ダル群のコホモロジー群に関する既知の結果を用いて得ている。

第３章第３節で $\wp^{ij}$ が定義される。トロイダル群 X は $\mathbb{C}^n/\Gamma$ と同一視できる。ただし、Γ は $\mathbb{C}^n$ のある種の条件を満たす離散部分群である。$\mathcal{O}$ を X の複素構造層とする。前節の結果から明確になった $(n-1)$ 次コホモロジー群 $H^{n-1}(X\setminus\{0\}),\mathcal{O})$ の生成元から、Γ 不変な $(0,n-1)$ 形式を、まず形式的に級数の形で構成している。この級数が収束することを第２章の補題を用いて示している。その後、この $(0,n-1)$ 形式から $\overline{\partial}$ 閉である $(n-1,n-1)$ 形式 $\wp^{ij}$ が定義される。そのとき、一般化された Martinelli の公式の持つ性質がそのまま $\wp^{ij}$ に受け継がれる。ここまでの構成は一般のトロイダル群で可能である。次節以降では、X は種数 0 の準アーベル多様体であることが仮定されている。

第３章第４節で X 上の正因子についての基本的事項と X の相対コンパクトな部分領域の構成が述べられ、主結果への準備がなされる。

第３章第５節において、前節で定義された部分領域上での公式が証明されている。X 上の正因子を部分領域に制限したカレントに対し Poincaré-Lelong 方程式が成り立つこと、$\wp^{ij}$ の持つ一般化された Martinelli の公式と同様な性質及び Stokes の定理を巧みに用いて部分領域上の公式が得られている。

第３章第６節で主結果が証明されている。種数 0 の準アーベル多様体 X は標準的なコンパクト化 $\overline{X}$ を持つ。主結果は、X 上の正因子 $\Theta=\{\theta=0\}$ が $\overline{X}$ まで正則に拡張できるとき、$\wp^{ij}$ は Θ 上可積分であり、関係式

$$\int_{\Theta}\wp^{ij}(z-p)=-\left.\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\log\theta\right|_p+\text{定数}$$

が成り立つことである。これは、１変数における Weierstrass の $\wp$ 関数とテータ関数との関係の一般化に相当する。

本論文の主結果は英文論文として纏められ、既に学術誌に掲載されている。

以上を総合して判断した結果、本審査委員会は、本論文を博士（理学）の学位を授与するに十分値する論文であると認め、合格と判定した。