

導電性円柱材料内部の電位

山下正人

(1995年10月19日受理)

Electric Potential in Cylindrical Conductor

Masato YAMASHITA

キーワード: 電位, 電流源, ポアソン方程式, グリーン関数, 鏡像法

Key words: Electric potential, Current source, Current sink, Poisson's equation, Green's function, Image method

1. まえがき

導電性材料内部の電位は, 一般にポアソン (Poisson) 方程式を満たす。直方体材料や円板材料に対する電位については, 既に述べられている。^{1,2)} ここではポアソン方程式は, 主として変数分離法によって解かれた。この論文では, 有限長の円柱材料の表面上の一点から電流を流し込み, 他の表面上の一点から流し出すとき, 材料内部の電位がどのように記述されるかについて論ずる。まず最初に, 無限長の円柱材料の問題を取り扱い, 次に有限長の円柱材料の問題を, 鏡像法を応用して無限長の円柱材料の問題に変換して取り扱う。ポアソン方程式の解は, グリーン (Green) 関数を用いる方法によって導く。

2. 無限長の円柱材料内部の電位

Fig. 1 は導電性のある円柱材料と先端をとがらせた2本の金属針 (探針と呼ぶ) からなる系の概略図である。材料の半径は a で, 長さ b である。2本の探針は円柱の表面上の任意の点で材料と接触している。この解析では電流 I を探針Aから流し込み, 探針Bから流し出す場合を取り扱う。材料は絶縁体 (たとえば空気) 中に置かれており, その抵抗率は一様とする。

材料内部の任意の点 $P (r, \theta, z)$ の電位 $\Phi (r, \theta, z)$ は, 次の Poisson 方程式を満足する。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

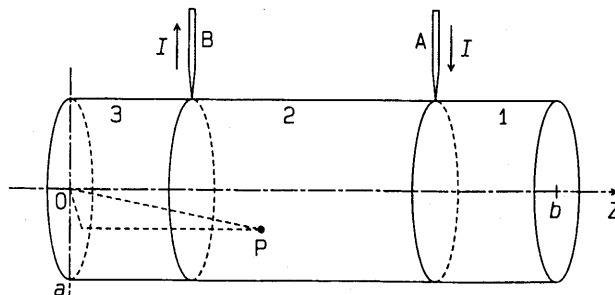


Fig. 1 導電性円柱材料と二本の探針からなる系の概略図。材料の半径は a で, 長さ b である。電流 I は探針Aから流れ込み, 探針Bから流れ出す。

$$= \frac{2 \rho I}{r} \delta(r-a) \times$$

$$[\delta(\theta - \theta_B) \delta(z - z_B)$$

$$- \delta(\theta - \theta_A) \delta(z - z_A)] \dots (1)$$

ここで、探針Aと探針Bが材料と接触する点の座標をそれぞれ (a, θ_A, z_A) , (a, θ_B, z_B) としている。 ρ は材料の抵抗率であり、 $\delta(\theta - \theta_A)$, $\delta(z - z_A)$ …などはデルタ関数である。式(1)は探針Aから流れ込む電流と探針Bから流れ出す電流による材料内の電位を記述したものであるが、重ねの理を考慮するとそれぞれの電流による電位を別々に求め、後でこれらの電位をたし合わせても同一の結果が得られる筈である。そこで式(1)を二つの式に分けることにする。

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_A}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial z^2}$$

$$= - \frac{2 \rho I}{r} \delta(r-a) \delta(\theta - \theta_A) \times$$

$$\delta(z - z_A) \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_B}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi_B}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial z^2}$$

$$= \frac{2 \rho I}{r} \delta(r-a) \delta(\theta - \theta_B) \times$$

$$\delta(z - z_B) \dots (3)$$

ここで、 Φ_A は探針Aから流れ込む電流による電位であり、 Φ_B は探針Bから流れ出す電流による電位を意味している。ところで式(3)は式(2)において、 I を $-I$ に置き換え、 θ_A, z_A をそれぞれ θ_B, z_B に置き換えたものになっているので、式(2)だけを解けばよいことになる。簡単のため式(2)の両辺を $2 \rho I$ で割り、 $\Phi_A / 2 \rho I$ を G_A と置き換えると式(2)は次のようになる。

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left(r \frac{\partial G_A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 G_A}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G_A}{\partial z^2}$$

$$= - \frac{1}{r} \delta(r-a) \delta(\theta - \theta_A) \times$$

$$\delta(z - z_A) \dots (4)$$

ところで δ 関数の性質を考慮すると、式(4)の

右辺の $\delta(r-a)/r$ は次のように表わされる。^{3,4)}

$$\frac{\delta(r-a)}{r} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \gamma_{ns}^2}{a^2 (\gamma_{ns}^2 - n^2)} \times$$

$$\frac{J_n(r \gamma_{ns}/a)}{J_n(\gamma_{ns})} \dots (5)$$

ここで、 $J_n(x)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。また γ_{ns} は $d J_n(x)/dx = 0$ の根である。さらに、式(4)の $\delta(\theta - \theta_A)$ と $\delta(z - z_A)$ はそれぞれ次のように表される。

$$\delta(\theta - \theta_A)$$

$$= \frac{1}{2 \pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[i n (\theta - \theta_A)]$$

$$= \frac{1}{2 \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos[n(\theta - \theta_A)]$$

$$(\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2, n = 1, 2, 3, \dots) \dots (6)$$

$$\delta(z - z_A) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i k (z - z_A)] dk$$

$$(-\infty < z, z_A < \infty) \dots (7)$$

ここで、 i は虚数単位である。

そこで、式(5), (6), (7)を用いると式(4)の右辺は

$$-\frac{1}{r} \delta(r-a) \delta(\theta - \theta_A) \delta(z - z_A)$$

$$= \frac{1}{2 \pi^2 a^2} \times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_n \cos[n(\theta - \theta_A)] \times$$

$$\frac{\gamma_{ns}^2 J_n(r \gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times$$

$$\exp[i k (z - z_A)] dk \dots (8)$$

となる。いまグリーン関数 G_A を式(8)と同様な形式の展開

$$G_A(r, \theta, z; a, \theta_A, z_A) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ns}(k) \epsilon_n \times$$

$$\cos[n(\theta - \theta_A)] J_n(r \gamma_{ns}/a) \times$$

$$\exp[i k (z - z_A)] dk \dots (9)$$

に仮定すると式(4)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ns}(k) \varepsilon_n \cos [n(\theta - \theta_A)] \\ & \times \left\{ \frac{d^2 J_n(r \gamma_{ns}/a)}{dr^2} + \right. \\ & \left. \frac{d J_n(r \gamma_{ns}/a)}{r dr} - \right. \\ & \left. \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) J_n \left(\gamma_{ns} \frac{r}{a} \right) \right\} \times \\ & \exp [ik(z - z_A)] dk = - \frac{1}{2\pi^2 a^2} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \cos [n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \frac{\gamma_{ns}^2 J_n(r \gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \exp [ik(z - z_A)] dk \dots (10) \end{aligned}$$

ところで、式 (10) の左辺の { } の中は

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 J_n(r \gamma_{ns}/a)}{dr^2} + \\ & \frac{d J_n(r \gamma_{ns}/a)}{r dr} - \\ & \left(k^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) J_n \left(\gamma_{ns} \frac{r}{a} \right) = \\ & - \left(k^2 + \frac{\gamma_{ns}^2}{a^2} \right) J_n \left(\gamma_{ns} \frac{r}{a} \right) \dots (11) \end{aligned}$$

となるので、式 (10) は次のように整理される。

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ns}(k) \varepsilon_n \times \\ & \cos [n(\theta - \theta_A)] \left(k^2 + \frac{\gamma_{ns}^2}{a^2} \right) \times \\ & J_n \left(\gamma_{ns} \frac{r}{a} \right) \times \\ & \exp [ik(z - z_A)] dk = - \frac{1}{2\pi^2 a^2} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \cos [n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \frac{\gamma_{ns}^2 J_n(r \gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \exp [ik(z - z_A)] dk \dots (12) \end{aligned}$$

したがって、式 (12) から関数 $g_{ns}(k)$ が求められる。

$$g_{ns}(k) = \frac{\gamma_{ns}^2}{2\pi^2 a^2 (\gamma_{ns}^2 - n^2)} \times \frac{1}{(k^2 + \gamma_{ns}^2/a^2) J_n(\gamma_{ns})} \dots (13)$$

そこで式 (13) を式 (9) に代入するとグリーン関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} G_A(r, \theta, z; a, \theta_A, z_A) = & \frac{1}{2\pi^2 a^2} \frac{J_0(r \gamma_{01}/a)}{J_0(\gamma_{01})} \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [ik(z - z_A)]}{k^2 + \gamma_{01}^2/a^2} dk + \\ & \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 a^2} \frac{J_0(r \gamma_{0s}/a)}{J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [ik(z - z_A)]}{k^2 + \gamma_{0s}^2/a^2} dk + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 a^2} \varepsilon_n \cos [n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \frac{\gamma_{ns}^2 J_n(r \gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [ik(z - z_A)]}{k^2 + \gamma_{ns}^2/a^2} dk \dots (14) \end{aligned}$$

ところでベッセル関数 $J_0(x)$ の一次導関数の根のうち一番目の根 γ_{01} はゼロであるから⁵⁾、式 (14) の右辺の第1番目の積分は

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [ik(z - z_A)]}{k^2} dk \\ & = -2\pi(z - z_A) \quad (z > z_A) \\ & = 0 \quad (z \leq z_A) \dots (15) \end{aligned}$$

となる。また、第三番目の積分は

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp [ik(z - z_A)]}{k^2 + \gamma_{ns}^2/a^2} dk \\ & = \frac{\pi a}{\gamma_{ns}} \exp [-k(z - z_A) \gamma_{ns}/a] \\ & \quad (z > z_A) \\ & = \frac{\pi a}{\gamma_{ns}} \exp [(z - z_A) \gamma_{ns}/a] \\ & \quad (z \leq z_A) \dots (16) \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (15) と式 (16) を用いると探針Aから流れ込む電流による電位 Φ_A は、 z と z_A の大小関係により次のようになる。

(ア) $z > z_A$ の領域における電位

$$\begin{aligned} \Phi_A(r, \theta, z) = & 2\rho I G_A = \\ & -\frac{2\rho I}{\pi a^2}(z-z_A) + \\ & \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \exp[-(z-z_A)\gamma_{0s}/a] + \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r\gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \cos[n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \exp[-(z-z_A)\gamma_{ns}/a] \dots (17) \end{aligned}$$

(イ) $z \leq z_A$ の領域における電位

$$\begin{aligned} \Phi_A(r, \theta, z) = & 2\rho I G_A = \\ & \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \exp[(z-z_A)\gamma_{0s}/a] + \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r\gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \cos[n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \exp[(z-z_A)\gamma_{ns}/a] \dots (18) \end{aligned}$$

一方、探針Bから流れ出す電流による電位を求めるには、式 (17), (18) において $I \rightarrow -I$ 、添え字A \rightarrow Bに置き換えればよいので次のようになる。

(ウ) $z > z_B$ の領域における電位

$$\begin{aligned} \Phi_B(r, \theta, z) = & -2\rho I G_B = \\ & \frac{2\rho I}{\pi a^2}(z-z_B) - \\ & \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \exp[-(z-z_B)\gamma_{0s}/a] - \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r\gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \cos[n(\theta - \theta_B)] \times \\ & \exp[-(z-z_B)\gamma_{ns}/a] \dots (19) \end{aligned}$$

(エ) $z \leq z_B$ の領域における電位

$$\begin{aligned} \Phi_B(r, \theta, z) = & -2\rho I G_B = \\ & -\frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \exp[(z-z_B)\gamma_{0s}/a] - \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r\gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \cos[n(\theta - \theta_B)] \times \\ & \exp[(z-z_B)\gamma_{ns}/a] \dots (20) \end{aligned}$$

材料内部の任意の点P(r, θ, z)の電位は、重ねの理によりそれぞれの領域に対する式 (17)-(20)の和によって表される。すなわち

(オ) $z > z_A$ の領域 (領域1と呼ぶ) における電位を Φ_1 とすると

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, \theta, z) = & \text{式 (17) + 式 (19)} \\ & = \frac{2\rho I}{\pi a^2}(z_A - z_B) + \\ & \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \{ \exp[-(z-z_A)\gamma_{0s}/a] - \\ & \exp[-(z-z_B)\gamma_{0s}/a] \} + \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r\gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \{ \cos[n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \exp[-(z-z_A)\gamma_{ns}/a] - \\ & \cos[n(\theta - \theta_B)] \times \\ & \exp[-(z-z_B)\gamma_{ns}/a] \} \dots (21) \end{aligned}$$

となる。また、

(カ) $z_B < z \leq z_A$ の領域 (領域2) における電位 Φ_2 は

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, \theta, z) = & \text{式 (18) + 式 (19)} \\ & = \frac{2\rho I}{\pi a^2}(z-z_B) + \\ & \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \{ \exp[(z-z_A)\gamma_{0s}/a] - \\ & \exp[-(z-z_B)\gamma_{0s}/a] \} + \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r\gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \{ \cos[n(\theta - \theta_A)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \exp [(z - z_A) \gamma_{ns}/a] - \\ & \cos [n(\theta - \theta_B)] \times \\ & \exp [-(z - z_B) \gamma_{ns}/a] \} \dots (22) \end{aligned}$$

となる。さらに、

(*) $z \leq z_B$ の領域 (領域3) における電位 Φ_3 は

$$\begin{aligned} \Phi_3(r, \theta, z) &= \text{式 (18)} + \text{式 (20)} \\ &= \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r \gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \{ \exp [(z - z_A) \gamma_{0s}/a] - \\ & \exp [(z - z_B) \gamma_{0s}/a] \} + \\ & \frac{2 \rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r \gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \{ \cos [n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \exp [(z - z_A) \gamma_{ns}/a] - \\ & \cos [n(\theta - \theta_B)] \times \\ & \exp [(z - z_B) \gamma_{ns}/a] \} \dots (23) \end{aligned}$$

となる。

3. 有限長の円柱材料内部の電位

有限長の円柱材料のばあい、Fig. 2 に示されるように電流源の鏡像を考える。このようにすると有限長の問題は無限長の問題に帰着し、前節で導いた式を用いることができる。Fig. 2 の+記号は材料に流れ込む電流、⊕記号はその鏡像を表し、-記号は材料から流れ出す電流、⊖記号はその鏡像を表している。材料内部の電位は、電流源とその全ての鏡像による電位をたし合わせることで求むることができる。

まず、材料に流れ込む電流 I による領域 1 の電

位 Φ_1^+ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(r, \theta, z) &= \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (17) \quad z_A \rightarrow -2mb - z_A \quad + \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (17) \quad z_A \rightarrow -2mb + z_A \quad + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} (18) \quad z_A \rightarrow 2mb - z_A \quad + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} (18) \quad z_A \rightarrow 2mb + z_A \quad \dots (24) \end{aligned}$$

ここで、たとえば (17) $z_A \rightarrow -2mb - z_A$

は式 (17) の z_A に $-2mb - z_A$ を代入することを意味している。同様に、領域 2 の電位 Φ_2^+ は

$$\begin{aligned} \Phi_2^+(r, \theta, z) &= \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (17) \quad z_A \rightarrow -2mb - z_A \quad + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} (17) \quad z_A \rightarrow -2mb + z_A \quad + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} (18) \quad z_A \rightarrow 2mb - z_A \quad + \\ & \sum_{m=0}^{\infty} (18) \quad z_A \rightarrow 2mb + z_A \quad \dots (25) \end{aligned}$$

となる。また領域 3 の電位 Φ_3^+ は次のようになる。

$$\Phi_3^+(r, \theta, z) = \Phi_2^+(r, \theta, z) \quad \dots (26)$$

同様に、材料から流れ出す電流 $-I$ による各領域の電位は次のようになる。

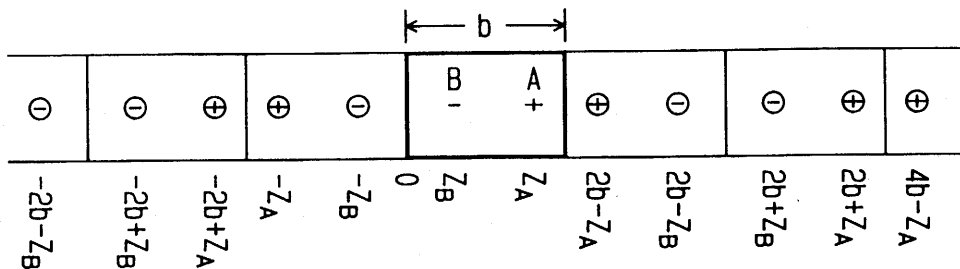


Fig. 2 円柱材料が有限長の場合に考えられる電流源の鏡像。⊕記号は材料に流れ込む電流の鏡像であり、⊖記号は材料から流れ出す電流の鏡像である。

$$\begin{aligned}
\Phi_1^-(r, \theta, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} (19) z_B \rightarrow -2mb - z_B + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} (19) z_B \rightarrow -2mb + z_B + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} (20) z_B \rightarrow 2mb - z_B + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} (20) z_B \rightarrow 2mb + z_B
\end{aligned} \quad \dots (27)$$

$$\Phi_2^-(r, \theta, z) = \Phi_1^-(r, \theta, z) \quad \dots (28)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3^-(r, \theta, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} (19) z_B \rightarrow -2mb - z_B + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} (19) z_B \rightarrow -2mb + z_B + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} (20) z_B \rightarrow 2mb - z_B + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} (20) z_B \rightarrow 2mb + z_B
\end{aligned} \quad \dots (29)$$

したがって、流れ込む電流と流れ出す電流の両者が存在する場合、電位は重ねの理により次のように表される。

領域1の電位 Φ_1 は

$$\begin{aligned}
\Phi_1(r, \theta, z) = & \Phi_1^+(r, \theta, z) + \Phi_1^-(r, \theta, z) \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} F(z - z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z + z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z - z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z + z_A, \theta_A) - \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z - z_B, \theta_B) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z + z_B, \theta_B) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z - z_B, \theta_B) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z + z_B, \theta_B)
\end{aligned} \quad \dots (30)$$

領域2の電位 Φ_2 は

$$\begin{aligned}
\Phi_2(r, \theta, z) = & \Phi_2^+(r, \theta, z) + \Phi_1^-(r, \theta, z) \\
= & \frac{2\rho I}{\pi a^2} (z - z_A) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z + z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(z - z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(-z + z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z - z_A, \theta_A) - \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z - z_B, \theta_B) - \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z + z_B, \theta_B) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z - z_B, \theta_B) - \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(-z + z_B, \theta_B)
\end{aligned} \quad \dots (31)$$

領域3の電位 Φ_3 は

$$\begin{aligned}
\Phi_3(r, \theta, z) = & \Phi_2^+(r, \theta, z) + \Phi_3^-(r, \theta, z) \\
= & \frac{2\rho I}{\pi a^2} (z_B - z_A) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(z + z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=1}^{\infty} F(z - z_A, \theta_A) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} F(-z + z_A, \theta_A) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} F(-z - z_A, \theta_A) - \\ & \sum_{m=0}^{\infty} F(z + z_B, \theta_B) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} F(z - z_B, \theta_B) - \\ & \sum_{m=0}^{\infty} F(-z + z_B, \theta_B) - \\ & \sum_{m=1}^{\infty} F(-z - z_B, \theta_B) \\ & \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

ここで、 $F(z, \theta_A)$ は次のような関数である。

$$\begin{aligned} F(z, \theta_A) = & \frac{\rho I}{\pi a} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{J_0(r \gamma_{0s}/a)}{\gamma_{0s} J_0(\gamma_{0s})} \times \\ & \exp[-(2mb + z) \gamma_{0s}/a] + \\ & \frac{2\rho I}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\gamma_{ns} J_n(r \gamma_{ns}/a)}{(\gamma_{ns}^2 - n^2) J_n(\gamma_{ns})} \times \\ & \cos[n(\theta - \theta_A)] \times \\ & \exp[-(2mb + z) \gamma_{ns}/a] \end{aligned}$$

4. むすび

電位は、材料内部の電界分布や電流分布を明らかにするときに必要な基本的な量である。この論文では、有限長の円柱材料を取り上げ、その電位をグリーン関数を用いる方法によって導いた。その際、有限長の円柱を電流の鏡像を考えることによって無限長の円柱の問題に帰着した。

今回導いた電位は、材料の抵抗率を4探針法によって測定するときに必要な補正係数を求める問題に応用できる。すなわち、二本の電流探針の内側にもう二本の電圧探針を置いたとすると、電圧探針は領域2に存在することになるので、その電位は $\Phi_2(r, \theta, z)$ に電圧探針の座標を代入することによって求められる。このようにして得られた補正係数は、変数分離法によって導かれた電位を用いて求めた補正係数と数値の上で一致することが確認できた。

参考文献

- 1) M.Yamashita and M.Agu : Jpn.J.Appl. Phys. 23 (1984) 1499.
- 2) M.Yamashita : Jpn.J.Appl.Phys. 26 (1987) 1550.
- 3) 寺沢寛一 : 自然科学者のための数学概論 応用編 (岩波書店 1973).
- 4) ジョージ・アルフケン : 特殊関数と積分方程式 (講談社 1994).
- 5) M.Abramowitz and I.A.Stegun : HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK, 1970).