

歯車歯面の表示法とその精度に関する研究

桐 昭弘, LIM YEW CHEW, 伊藤 紀男

1. はじめに

一般に、歯車歯面は歯面上の考察点を通る法線とその点における接平面を基準面にして、無限高次の曲面として表示される。しかし、実際の歯車加工においては、歯切り理論が厳密であっても、実際には歯面の接触を二次曲面どうしの接触として考察しているため、歯面表示の精度の違いがそのまま加工上の難しさとなって残ることになる。

本研究は、歯面を二次曲面で表示して接触を論じるのでは不十分であると考え、歯面を従来より高次の曲面で表示して接触を論じ、より精密な歯車の設計、歯切りに応用しようとするものである。本報告では、まず、従来の二次曲面に関する理論について述べ、次に、高次曲面による歯面の表示法について述べる。最後に、具体的な計算例として、歯車歯面として利用される円錐面を取り上げ、その円錐面の表示法と精度の関係について検討を行う。

2. 二次曲面による曲面の表示

一般に、一つの曲面が空間を運動すると、その曲面によって別の曲面が創成面、あるいは包絡面として描かれる。それら二つの曲面は瞬間的に線接触をなす。曲面を二次曲面によって表示する方式については、M.L.Baxterの論文がある¹⁾。その論文では、曲面を次のように定義している。

図1のように、曲面上の点Pを考察点とし、その点における曲面の法線方向にz軸、接平面上にx, y軸をとる。 \bar{n} は曲面の法線ベクトルである。このとき曲面は、次のように表される。

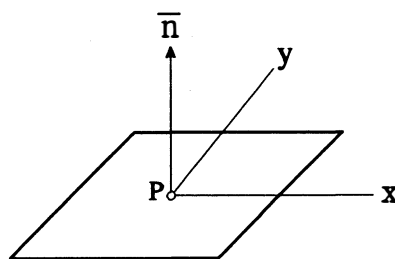


図1 接平面座標

$$z=z(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

これを展開して、二次の項までを用いて近似すると、次のように表される。

$$z=\frac{1}{2}ax^2+bxy+\frac{1}{2}cy^2 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 a, b, c は二次曲面の係数を表す。このとき曲面を s とすると、 s は次の行列で表すことができる。

$$(s) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、二つの二次曲面を z_1, z_2 とし、その和を z_3 とすると、任意の点 (x, y) における二つの曲面の和は、次のように定義することができる。

$$z_1 = \frac{1}{2} a_1 x^2 + b_1 xy + \frac{1}{2} c_1 y^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} a_2 x^2 + b_2 xy + \frac{1}{2} c_2 y^2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1}{2} (a_1 + a_2) x^2 + (b_1 + b_2) xy \\ &\quad + \frac{1}{2} (c_1 + c_2) y^2 \\ &= \frac{1}{2} a_3 x^2 + b_3 xy + \frac{1}{2} c_3 y^2 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

これより、次の関係が得られる。

$$a_3 = a_1 + a_2, \quad b_3 = b_1 + b_2, \quad c_3 = c_1 + c_2 \quad \dots (7)$$

これは行列の定義に一致するので、 z_1, z_2, z_3 の曲面を $(s)_1, (s)_2, (s)_3$ とすると、次のように表すことができる。

$$(s)_3 = (s)_1 + (s)_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad \dots (8)$$

したがって、式(2)より、任意の二次曲面は、次の三つの基本曲面の和として考えられる。

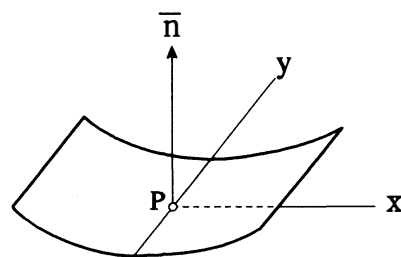
$$z_1 = \frac{1}{2} a x^2, \quad z_2 = b x y, \quad z_3 = \frac{1}{2} c y^2$$

すなわち、次のように表される。

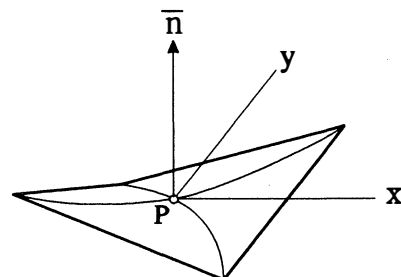
$$\begin{aligned} (s)_1 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (s)_2 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \\ (s)_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ (s) &= (s)_1 + (s)_2 + (s)_3 \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

図2は、二次曲面の三つの基本曲面を示したものである。

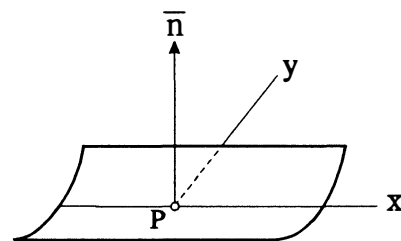
図2(a)、(c)は円筒面を、図2(b)は直線部分をもつねじれ面を表している。



(a) $z_1 = \frac{1}{2} a x^2$



(b) $z_2 = b x y$



(c) $z_3 = \frac{1}{2} c y^2$

図2 二次曲面の基本曲面

3. 高次曲面による曲面の表示

次に、高次曲面による曲面の表示法について述べる。

図3は、ベクトル表示された曲面 x を表す。考察点 P を通る曲面の接平面を yz 平面とし、法線方向を x 軸とする。曲面には互いに直交する二つの主方向があり、それら主方向に沿って s', s'' 座標軸をとれば、 s', s'' 軸は接平面上にある。接平面上の y 軸、 z 軸は、それぞれ s' 軸、 s'' 軸に対して δ なる傾きをもつものとする。 s' 軸方向の原点 P における主曲率半径を ρ' 、 s'' 軸方向の主曲率半径を ρ'' とする。曲面上にあって点 P の近傍の点を Q とし、点 Q から接平面に下した垂線の足を点 Q' とする。 $\overline{QQ'}$ の長さを f 、原点から点 Q' までの長さを r とし、線分 PQ' と z 軸のなす角を θ とする。これより曲面上

には、 $P-x's's''$ 直交座標系、 $P-xyz$ 直交座標系、および $P-xr\theta$ 円柱座標系の三つの座標系が得られることになる。

3. 1 $P-x's's''$ 座標系による曲面の表示

P 点の近傍において曲面 x は s', s'' の関数として、次のように表示することができる。

$$\mathbf{x}(s', s'') = \begin{bmatrix} -f(s', s'') \\ s' \\ s'' \end{bmatrix} \dots\dots (10)$$

ここで、 $\mathbf{x}(s', s'')$ の x 軸方向の成分 $-f(s', s'')$ は、曲面 $\mathbf{x}(s', s'')$ の原点 P における単位法線ベクトルを \mathbf{n}_0 とすると、次のように表される。

$$-f(s', s'') = \mathbf{x}(s', s'') \cdot \mathbf{n}_0 \dots\dots\dots (11)$$

右辺の $\mathbf{x}(s', s'')$ の項を展開すると、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} -f(s', s'') = & \{ \mathbf{x}(0, 0) + \frac{1}{1!} \left(s' \frac{\partial}{\partial s'} + s'' \frac{\partial}{\partial s''} \right) \mathbf{x}(s', s'') \\ & + \frac{1}{2!} \left(s' \frac{\partial}{\partial s'} + s'' \frac{\partial}{\partial s''} \right)^2 \mathbf{x}(s', s'') + \frac{1}{3!} \left(s' \frac{\partial}{\partial s'} + s'' \frac{\partial}{\partial s''} \right)^3 \mathbf{x}(s', s'') \\ & + \dots\dots\dots \} \cdot \mathbf{n}_0 \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

簡単のために、 $\frac{\partial \mathbf{x}(s', s'')}{\partial s'} = \mathbf{x}'_s, \frac{\partial \mathbf{x}(s', s'')}{\partial s''} = \mathbf{x}''_s, \dots\dots\dots$ のように表示すると、

式(12)は次のように表される。

$$\begin{aligned} -f(s', s'') = & \{ \mathbf{x}(0, 0) + (s' \mathbf{x}'_s + s'' \mathbf{x}''_s) + \frac{1}{2} (s'^2 \mathbf{x}''_s + 2s' s'' \mathbf{x}'''_s + s''^2 \mathbf{x}^{(4)}_s) \\ & + \frac{1}{6} (s'^3 \mathbf{x}^{(3)}_s + 3s'^2 s'' \mathbf{x}^{(4)}_s + 3s' s''^2 \mathbf{x}^{(5)}_s + s''^3 \mathbf{x}^{(6)}_s) \\ & + \frac{1}{24} (s'^4 \mathbf{x}^{(4)}_s + 4s'^3 s'' \mathbf{x}^{(5)}_s + 6s'^2 s''^2 \mathbf{x}^{(6)}_s + 4s' s''^3 \mathbf{x}^{(7)}_s + s''^4 \mathbf{x}^{(8)}_s) \\ & + \dots\dots\dots \} \cdot \mathbf{n}_0 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{x}(0, 0) \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad \mathbf{x}'_s \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{x}''_s \cdot \mathbf{n}_0 = 0, \quad \mathbf{x}'_s s' \cdot \mathbf{n}_0 = 0$$

であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_s s' \cdot \mathbf{n}_0 &= \frac{1}{\rho'}, & \mathbf{x}''_s s'' \cdot \mathbf{n}_0 &= \frac{1}{\rho''} \\ \mathbf{x}'_s s' s' \cdot \mathbf{n}_0 &= G, & \mathbf{x}'_s s'' s'' \cdot \mathbf{n}_0 &= L \\ \mathbf{x}'_s s' s'' \cdot \mathbf{n}_0 &= H, & \mathbf{x}''_s s'' s'' \cdot \mathbf{n}_0 &= M \\ \mathbf{x}'_s s' s' s' \cdot \mathbf{n}_0 &= P, & \mathbf{x}'_s s' s' s'' \cdot \mathbf{n}_0 &= Q \end{aligned}$$

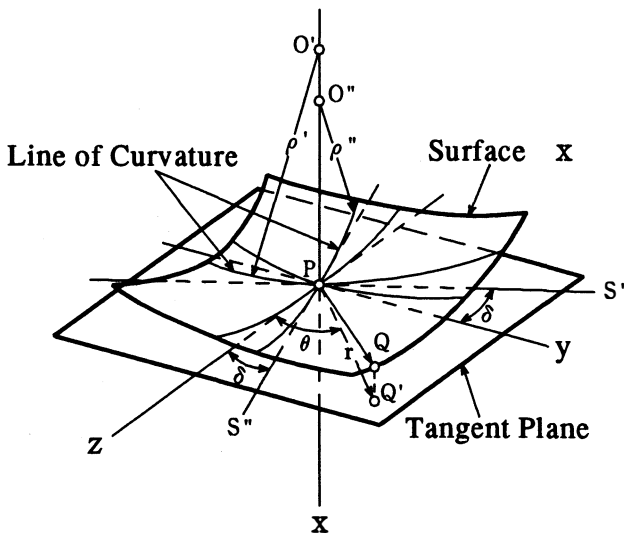


図3 曲面の表示と座標系

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_s \mathbf{s}'_s \mathbf{s}''_s \cdot \mathbf{n}_0 &= T, & \mathbf{x}'_s \mathbf{s}''_s \mathbf{s}''_s \cdot \mathbf{n}_0 &= U \\ \mathbf{x}''_s \mathbf{s}'_s \mathbf{s}''_s \cdot \mathbf{n}_0 &= V \end{aligned}$$

とおくと、 $f(s', s'')$ は四次の項までの式で表示すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} f(s', s'') &= \frac{1}{2} \left(\frac{s'^2}{\rho'} + \frac{s''^2}{\rho''} \right) + \frac{1}{6} (Gs'^3 + 3Hs'^2s'' + 3Ls's''^2 + Ms''^3) \\ &+ \frac{1}{24} (Ps'^4 + 4Qs'^3s'' + 6Ts'^2s''^2 + 4Us's''^3 + Vs''^4) \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

3. 2 P-xyz座標系による曲面の表示

式(10)の曲面 $\mathbf{x}(s', s'')$ をP-xyz座標系へ座標変換を行う。図3の接平面上でz軸と s'' 軸、y軸と s' 軸とのなす角は δ であるから、x軸の右まわり方向を正として、次の関係がある。

$$\begin{bmatrix} s' \\ s'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

したがって、曲面 $\mathbf{x}(y, z)$ は、次の式で表示される。

$$\mathbf{x}(y, z) = \begin{bmatrix} -f(y, z) \\ y \\ z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} f(y, z) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(y \cos \delta + z \sin \delta)^2}{\rho'} + \frac{(-y \sin \delta + z \cos \delta)^2}{\rho''} \right\} \\ &+ \frac{1}{6} \{ G(y \cos \delta + z \sin \delta)^3 + 3H(y \cos \delta + z \sin \delta)^2(-y \sin \delta + z \cos \delta) \\ &+ 3L(y \cos \delta + z \sin \delta)(-y \sin \delta + z \cos \delta)^2 + M(-y \sin \delta + z \cos \delta)^3 \} \\ &+ \frac{1}{24} \{ P(y \cos \delta + z \sin \delta)^4 + 4Q(y \cos \delta + z \sin \delta)^3(-y \sin \delta + z \cos \delta) \\ &+ 6T(y \cos \delta + z \sin \delta)^2(-y \sin \delta + z \cos \delta)^2 + 4U(y \cos \delta + z \sin \delta) \\ &\times (-y \sin \delta + z \cos \delta)^3 + V(-y \sin \delta + z \cos \delta)^4 \} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

3. 3 P-xrθ円柱座標系による曲面の表示

式(16)の曲面 $\mathbf{x}(y, z)$ を (x, r, θ) の円柱座標系へ座標変換する。 $y = -r \sin \theta$ 、 $z = r \cos \theta$ であるから、次の式が得られる。ただし、 θ はx軸の右まわり方向を正とする。

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \begin{bmatrix} -f(r, \theta) \\ -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(-r \sin \theta \cos \delta + r \cos \theta \sin \delta)^2}{\rho'} + \frac{(r \sin \theta \sin \delta + r \cos \theta \cos \delta)^2}{\rho''} \right\} \\ &+ \frac{1}{6} \{ G(-r \sin \theta \cos \delta + r \cos \theta \sin \delta)^3 \\ &+ 3H(-r \sin \theta \cos \delta + r \cos \theta \sin \delta)^2(r \sin \theta \sin \delta + r \cos \theta \cos \delta) \\ &+ 3L(-r \sin \theta \cos \delta + r \cos \theta \sin \delta)(r \sin \theta \sin \delta + r \cos \theta \cos \delta)^2 \\ &+ M(r \sin \theta \sin \delta + r \cos \theta \cos \delta)^3 \} \\ &+ \frac{1}{24} \{ P(-r \sin \theta \cos \delta + r \cos \theta \sin \delta)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+4Q(-r\sin\theta\cos\delta+r\cos\theta\sin\delta)^3(r\sin\theta\sin\delta+r\cos\theta\cos\delta) \\
 &+6T(-r\sin\theta\cos\delta+r\cos\theta\sin\delta)^2(r\sin\theta\sin\delta+r\cos\theta\cos\delta)^2 \\
 &+4U(-r\sin\theta\cos\delta+r\cos\theta\sin\delta)(r\sin\theta\sin\delta+r\cos\theta\cos\delta)^3 \\
 &+V(r\sin\theta\sin\delta+r\cos\theta\cos\delta)^4 \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

これを整理すると、 $f(r, \theta)$ は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta) &= \frac{r^2}{2}V(\theta) + \frac{r^3}{6}Xs(\theta), \\
 V(\theta) &= \frac{\sin^2(\theta - \delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\theta - \delta)}{\rho''} \\
 Xs(\theta) &= -G\sin^3(\theta - \delta) + 3H\sin^2(\theta - \delta)\cos(\theta - \delta) - 3L\sin(\theta - \delta)\cos^2(\theta - \delta) \\
 &+ M\cos^3(\theta - \delta) + \frac{r}{4}\{P\sin^4(\theta - \delta) - 4Q\sin^3(\theta - \delta)\cos(\theta - \delta) \\
 &+ 6T\sin^2(\theta - \delta)\cos^2(\theta - \delta) - 4U\sin(\theta - \delta)\cos^3(\theta - \delta) + V\cos^4(\theta - \delta) \dots (20)
 \end{aligned}$$

この式を用いると、M.L.Baxter氏による二次曲面 $f_2(r, \theta)$ の表示は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
 f_2(r, \theta) &= \frac{r^2}{2}V(\theta) \\
 V(r, \theta) &= \frac{\sin^2(\theta - \delta)}{\rho'} + \frac{\cos^2(\theta - \delta)}{\rho''}
 \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

4. 円錐面の表示とその精度の検討

曲面の表示法によって、曲面の精度がどのように変化するかを検討する。ここでは、かさ歯車やハイポイドギヤの歯面として利用される円錐面を例に取り上げて、検討を試みる。

4.1 円錐面の表示

図4のように、円錐面を歯車歯面として、 $x_2(v, u)$ で表示する。円錐半角を ϕ_B 、円錐軸の点Oを通る軸直角断面の半径を r_0 、そのときの円錐上の1点を原点Pとする。P点を通る母線を v 軸、母線を含む接平面上で v 軸に直交する座標軸を u 軸、P点の法線方向を x 軸とする。原点Pにおける u 方向の主曲率半径を ρ_2'' とする。また、点Pを原点として、円錐の半径方向に x' 軸、それに垂直に円錐軸に平行に v' 軸を考える。円錐面上で、点Pの近傍の任意の点をQとし、点Qを通る円錐軸に垂直な断面である円の半径を r とする。図4より、次の式が成立する。

$$u^2 + (r_0 + x')^2 = (r_0 - v' \tan \phi_B)^2 \dots\dots\dots (22)$$

P- xvu 直角座標系とP- $x'v'u$ 直角座標系との間には、次の関係が成立する。

$$\begin{bmatrix} v' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\phi_B) & -\sin(-\phi_B) \\ \sin(-\phi_B) & \cos(-\phi_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

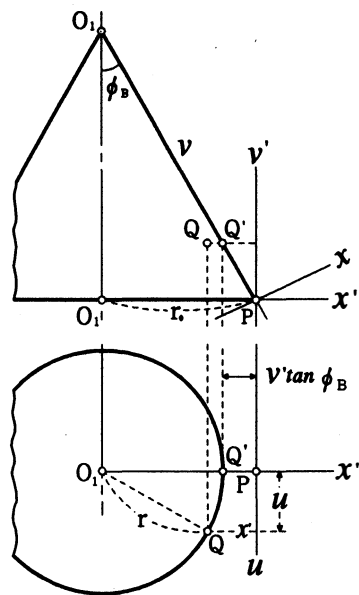


図4 円錐面の座標系

ここで、

$$\left. \begin{aligned} x' - v' \tan \phi_B &= \sec \phi_B (x \cos 2\phi_B - v \sin 2\phi_B) \\ x' + v' \tan \phi_B &= x \sec \phi_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

であるから、これらを式(22)に代入すると、次式を得る。

$$u^2 + \sec^2 \phi_B \{x^2 \cos 2\phi_B - vx \sin 2\phi_B\} + 2r_0 x \sec \phi_B = 0 \dots\dots\dots (25)$$

これを x で整理し、 x について解くと、次のように求められる。

$$x = \frac{-(2r_0 \cos \phi_B - v \sin 2\phi_B) \pm \sqrt{(2r_0 \cos \phi_B - v \sin 2\phi_B)^2 - 4u^2 \cos^2 \phi_B \cos 2\phi_B}}{2 \cos 2\phi_B} \dots\dots (26)$$

ここで、 $2r_0 \cos \phi_B - v \sin 2\phi_B = a$ とすると、式(26)の右辺の平方根 A は、 v, u がともに微小な値であるから、次のように書き換えることができる。

$$A = a - \frac{2u^2 \cos^2 \phi_B \cos 2\phi_B}{a} - \frac{2u^4 \cos^4 \phi_B \cos^2 \phi_B}{a^3} \dots\dots\dots (27)$$

これより、式(26)を整理し、四次の項まで用いて表すと、次のようになる。

$$x = -\frac{u^2}{2} \frac{1}{r_0 \sec \phi_B - v \tan \phi_B} - \frac{u^4}{8} \frac{1 - \tan^2 \phi_B}{(r_0 \sec \phi_B - v \tan \phi_B)^3} \dots\dots\dots (28)$$

したがって、円錐面 $\mathbf{x}_2(v, u)$ は、次のように表示できる。

$$\mathbf{x}_2(v, u) = \begin{bmatrix} -f(v, u) \\ v \\ u \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

ここに

$$f(v, u) = \frac{u^2}{2} \frac{1}{r_0 \sec \phi_B - v \tan \phi_B} - \frac{u^4}{8} \frac{1 - \tan^2 \phi_B}{(r_0 \sec \phi_B - v \tan \phi_B)^3} \dots\dots\dots (30)$$

4. 2 円錐面の微係数

式(14)より、曲面 $\mathbf{x}(v, u)$ を微分幾何学的に三次式で表示すると、次のようになる。

$$\mathbf{x}(v, u) = \begin{bmatrix} -f(v, u) \\ v \\ u \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned} f(v, u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{\rho'} + \frac{u^2}{\rho''} \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} (Gv^3 + 3Hv^2u + 3Lvu^2 + Mu^3) \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここで、 $f(v, u)$ の二次および三次の微分係数の原点 P における値を求める。まず、二次の微係数については、次のようになる。

$$\begin{aligned} f_{vv} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(v, u) = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v}{\rho'} + \frac{1}{6} (3Gv^2 + 6Hvu + 3Lu^2) \right\} \\ &= \frac{1}{\rho'} + Gv + Hu \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

原点 P では、 $v=0, u=0$ であるから、次のようになる。

$$[f_{vv}]_P = \frac{1}{\rho'} \dots\dots\dots (34)$$

同様にして、

$$f_{vu} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} f(v, u) = Hv + Lu \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$[f_{vu}]_P = 0 \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$f_{uu} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(v, u) = \frac{1}{\rho''} Lv + Mu \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$[f_{uu}]_P = \frac{1}{\rho''} \quad \dots\dots\dots (38)$$

次に、三次の微係数については、次のように求められる。

$$f_{vvv} = \frac{\partial^3}{\partial v^3} f(v, u) = G \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$[f_{vvv}]_P = G \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$f_{vvu} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(v, u) = H \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$[f_{vvu}]_P = H \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$f_{vuu} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(v, u) = L \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$[f_{vuu}]_P = L \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$f_{uuu} = \frac{\partial^3}{\partial u^3} f(v, u) = M \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$[f_{uuu}]_P = M \quad \dots\dots\dots (46)$$

曲面 $x(v, u)$ が円錐面の場合について、その円錐面の二次、および三次の微係数を原点 P において求める。式 (29), (30) より、次のように得られる。

$$[f_{vv}]_P = \frac{1}{\rho'} = 0 \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$f_{uu} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(v, u) = \frac{1}{r_0 \sec \phi_B - v \tan \phi_B} \text{ であるから,}$$

$$[f_{uu}]_P = \frac{1}{\rho''} = \frac{\cos \phi_B}{r_0} \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$[f_{vv}]_P = G = 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$[f_{vvu}]_P = H = 0 \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$[f_{uuu}]_P = M = 0 \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$f_{vuu} = - \frac{(-\tan \phi_B)}{(r_0 \sec \phi_B - v \tan \phi_B)^2} \text{ であるから,}$$

$$[f_{vuu}]_P = L = \frac{\tan \phi_B}{(r_0 \sec \phi_B)^2} = \frac{\tan \phi_B}{\rho''^2} \quad \dots\dots\dots (52)$$

これらの結果より、 $-f(v, u)$ は、次のように表示される。

$$-f(v, u) = - \left(\frac{u^2}{2\rho''} + \frac{Lv u^2}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (53)$$

よって、円錐面を三次式で表示すると、次式を得る。

$$x(v, u) = \begin{bmatrix} - \left(\frac{u^2}{2\rho''} + \frac{Lvu^2}{2} \right) \\ v \\ u \end{bmatrix}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \rho'' &= r_0 \sec \phi_B \\ L &= \frac{\tan \phi_B}{(r_0 \sec \phi_B)^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (54)$$

式(53)を円柱座標系で表示すると、次のようになる。

$$f_3(r, \theta) = \frac{(r \cos \theta)^2}{2} \frac{\cos \phi_B}{r_0} - \frac{r^3}{2} L \sin \theta \cos^2 \theta \dots\dots\dots (55)$$

これより、二次式で表示した場合は、次のように表示できる。

$$f_2(r, \theta) = \frac{(r \cos \theta)^2}{2} \frac{\cos \phi_B}{r_0} \dots\dots\dots (56)$$

式(26)を円柱座標系で表示したものを $f_c(r, \theta)$ とすると、次のように表される。

$$f_c(r, \theta) = \frac{1}{2 \cos 2\phi_B} \left\{ a - \sqrt{a^2 - 4r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi_B \cos 2\phi_B} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

ここに、 $a = 2r_0 \cos \phi_B + r \sin \theta \sin 2\phi_B$ である。これが円錐面の厳密式となる。

4. 3 精度の検討

前節までに得られた関係式を用いて、円錐面の三次曲面による表示と二次曲面による表示の間の精度を、円錐面の法線方向であるx軸方向の隙間 δf を求めて表すことにする。三次曲面表示の精度を δf_3 、二次曲面表示の精度を δf_2 とすると、それぞれ次の式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \delta f_3 &= f_c(r, \theta) - f_3(r, \theta) \\ \delta f_2 &= f_c(r, \theta) - f_2(r, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

ここで、定数として、原点における円錐半径を $r_0 = 95.25\text{mm}$ 、円錐角を $\phi_B = 20^\circ$ として計算を行う。精度を表す曲線は、 θ の範囲を $0^\circ \sim 180^\circ$ とし、その範囲を 15° 間隔の12分割して表す。また、そのときの r の値は $-20\text{mm} \sim +20\text{mm}$ の範囲で調べることとする。

その結果を、図5～11に示す。図5は $\theta = 0^\circ (180^\circ)$ の場合で、三次曲面、二次曲面ともに全く同じ値となり、 $r = \pm 8\text{mm}$ では $\delta f_{3,2} = 4.3 \times 10^{-4}\text{mm}$ で、約 $0.4\mu\text{m}$ の誤差を生じることとなる。

図6は、 $\theta = 15^\circ (165^\circ)$ の場合を示す。この場合は三次と二次の精度は明らかに違いを示す。三次の式では $r = \pm 8\text{mm}$ のとき、 $\delta f_3 = \text{約} 3.8 \times 10^{-4}\text{mm}$ となる。

図7は、 $\theta = 30^\circ (150^\circ)$ の場合を示す。 θ がこの位置になると、さらに三次曲面の精度の良さがはっきりすることがわかる。三次曲面の式で、 $r = \pm 8\text{mm}$ のとき、 $\delta f_3 = \text{約} 3.0 \times 10^{-4}\text{mm}$ となっている。

図8は、 $\theta = 45^\circ (135^\circ)$ の場合である。 θ がこの位置では、三次曲面の精度の良さが二次曲面のものより、さらに良くなることわかる。三次曲面の式で、 $r = \pm 8$

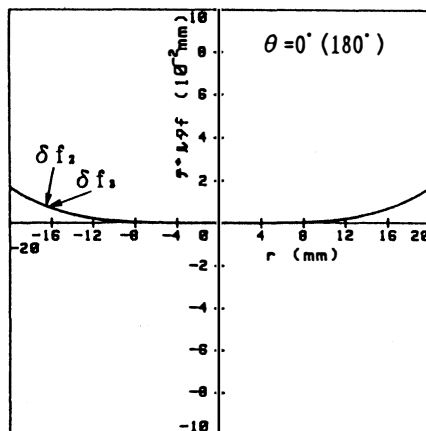


図5 精度の検討 ($\theta = 0^\circ$ の場合)

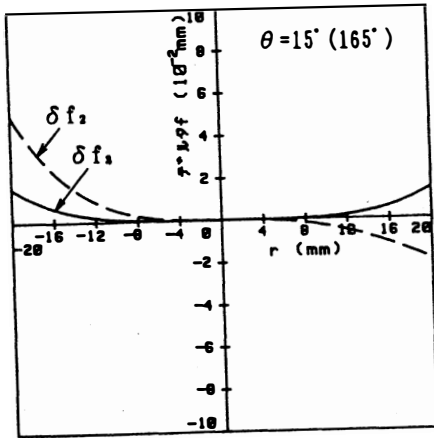


図6 精度の検討 ($\theta = 15^\circ$ の場合)

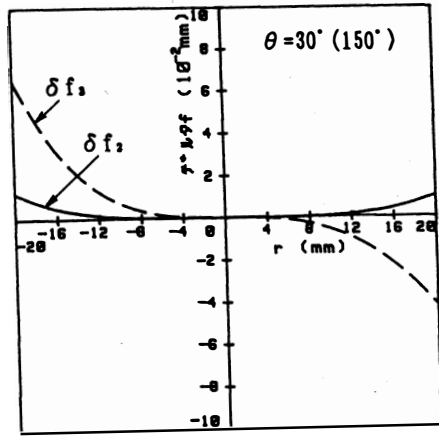


図7 精度の検討 ($\theta = 30^\circ$ の場合)

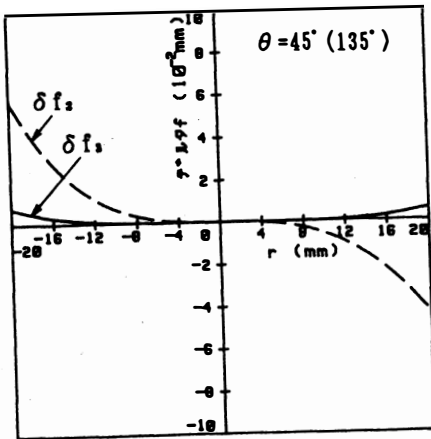


図8 精度の検討 ($\theta = 45^\circ$ の場合)

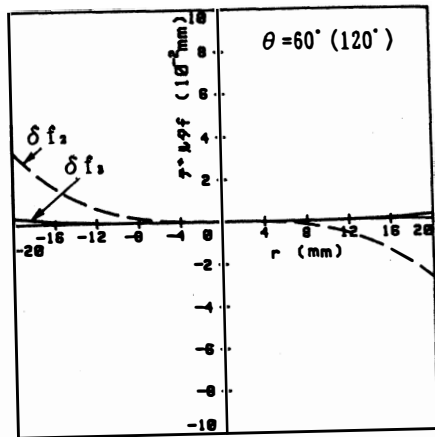


図9 精度の検討 ($\theta = 60^\circ$ の場合)

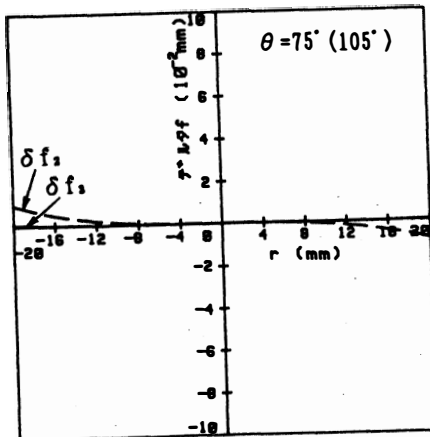


図10 精度の検討 ($\theta = 75^\circ$ の場合)

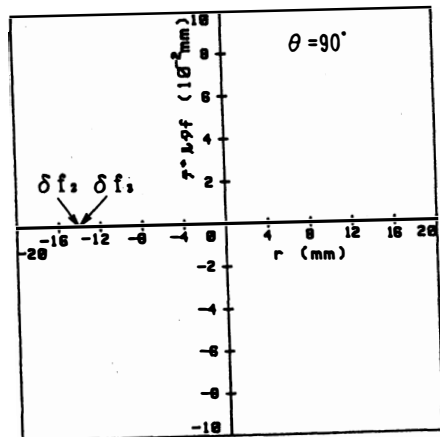


図11 精度の検討 ($\theta = 90^\circ$ の場合)

mm のとき, $\delta f_3 = \text{約} 1.8 \times 10^{-4} \text{mm}$ となっている。

図 9, 10 は, θ が 60° (120°), 75° (105°) の場合である。三次, および二次曲面ともに $\theta = 45^\circ$ の場合に比べ, 精度が良くなっている。

図 11 は, $\theta = 90^\circ$ の場合である。ここでは, 二次曲面, 三次曲面とも $\delta f_{2,3}$ はほとんど 0 に近く, $-20 \text{mm} < r < 20 \text{mm}$ では, $\text{約} -1.3 \times 10^{-9} < \delta f_{2,3} < 1.3 \times 10^{-9} \text{mm}$ となっている。

5. 結 論

歯車曲面を三次曲面で表示した場合と二次曲面で表示した場合の精度に関し, 歯車歯面に利用される円錐面を例に取り上げて検討を試みた。その結果, 円錐面においては, θ のどの方向位置においても, 三次曲面による表示ははるかに精度がよいことがわかる。したがって, まがりばかき歯車やハイポイドギアのように, その品質が歯当たりによって決定されるような歯車においては, 歯車歯面をより高次の曲面で表示することが, 正確な歯当りを求めるためには不可欠なことといえる。したがって, 従来の二次曲面による表示ではなく, 少なくとも三次曲面による表示によって歯面の接触を論じることが必要である。

終わりに, 本研究を遂行するに当たり, ご指導いただいた元富山大学教授 高橋幸一氏 (ハイポイド高橋技研所長) に謝意を表します。

参考文献

- 1) M.L.Baxter, ASME Paper No.61-MD-20(1951).
- 2) K.Takahashi, N.Ito, ASME Paper No.108-MECH-263(1986).

Representation and Accuracy of Gear Tooth Surface

Akihiro KIRI, LIM YEW CHEW, Norio ITO

Generally, a gear tooth surface moving in space generates or envelops another conjugate surface with line contact at any instant between generating member and generated member. These surfaces can treat mathematically by the expression of a infinite series. In the conventional theory for hypoid gears tooth surface are represented by a second-order surface. However, for developing an excellent tooth bearing, this theory is not accurate enough because higher-order surfaces are required. This paper investigates the difference in accuracy between a second-order and a third-order surface, as the case of a cylindrical surface.

〔英文和訳〕

歯車歯面の表示法とその精度に関する研究

桐 昭弘, LIM YEW CHEW, 伊藤 紀男

一般に、空間を運動する一つの歯車歯面は、共役な曲面を創成、あるいは包絡する。その際、創成面と被創成面は、瞬間的に線接触を構成している。これらの曲面は数学的には無限級数によって表示できる。しかし、これまでの歯面の取り扱いには二次曲面によって表されてきた。しかしながら、より優れた歯当たり改善への要求にともない、高次曲面による表示が必要となってきた。本論文では、より高次曲面である三次曲面で歯車歯面を表示した場合の曲面の精度を、従来の二次曲面との比較において論じ、円筒面を具体例としてその精度を検討する。