

ISSN 0387-1339

# 富山大学工学部紀要

第44卷

**Bulletin of**  
**Faculty of Engineering**  
**Toyama University**  
**Vol. 44**

1 9 9 3



# 目 次

1. 「退官記念論文」  
空気圧管路系の動特性と等価性 .....松本幸生..... 1
2. 大電流母線の熱伝達係数と放射効率  
.....池田長康, 北村岩雄, 後藤清治, 山崎登志成, 高橋隆一, 澤田邦男  
橋本吉昭, 河村晃一..... 5
3. 昆虫運動解析による歩行ロボットの運動パターン  
.....三宅和哉, 北村岩雄, 山崎登志成, 高橋隆一, 稲垣征司, 池田長康..... 11
4. 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について( I ) P-N 項法  
.....松田秀雄, 宮腰 隆, 畠山豊正..... 21
5. 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について( II ) P-N 項法の改良  
.....宮腰 隆, 松田秀雄, 大澤一人, 畠山豊正..... 31
6. シュレディンガー固有値問題のドレッシング法 ( 英文 )  
.....川田 勉..... 41
7. パンルベ型方程式とその線形化 ( 英文 )  
.....川田 勉..... 53
8. クラッド短円柱の非定常熱応力  
.....五嶋孝仁..... 65
9. ギ酸の接触分解に関する研究  
.....中村優子, 蓮覚寺聖一, 井上正美, 西部慶一..... 73
10. ポアソン過程よりみたクロマト分離の移動単位数  
.....田中久弥, 川崎博幸, 山本辰美..... 81
11. パラジウム分散電極を用いた桂皮酸類の水素化  
.....森田晃弘, 佐山三千雄, 石塚仍康, 井上正美, 中村優子  
蓮覚寺聖一, 西部慶一..... 89
12. 平成3年度修士論文概要一覧 ..... 95



## 空気圧管路系の動特性と等価性

松本 幸生

直管をはじめとして途中に分岐や合流のある各種の管路系における周波数特性と過渡特性の解析結果と実験結果を Fig. 1 ~ Fig. 13 に示す。(ただし Fig. 3 ~ Fig. 8 についてはゲイン特性のみとした。)

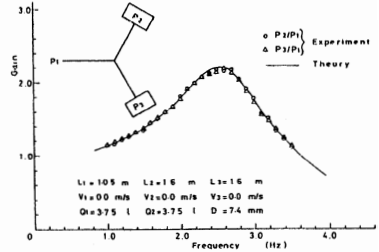
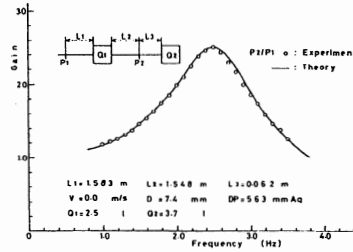
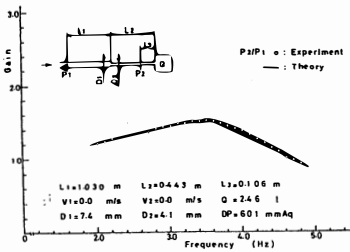
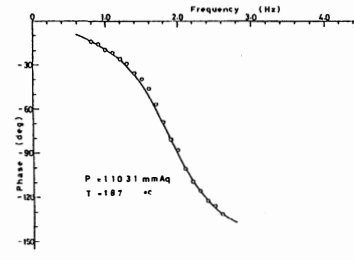
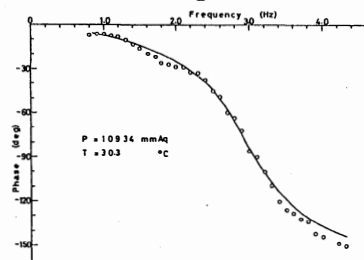
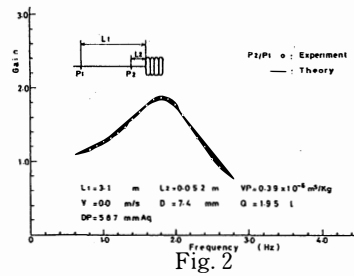
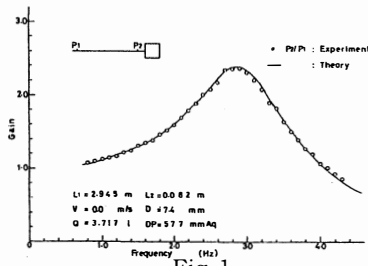


Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

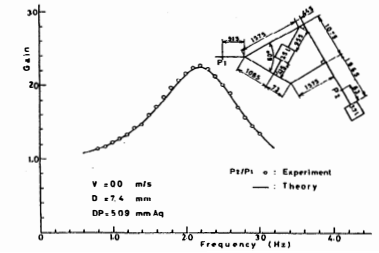
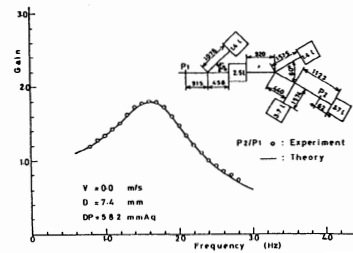
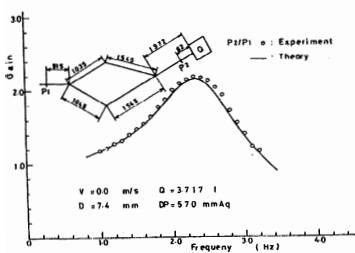


Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

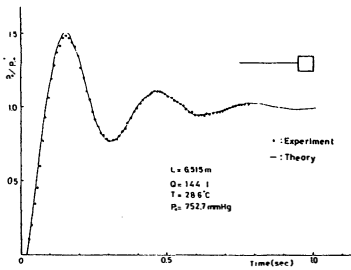


Fig. 9

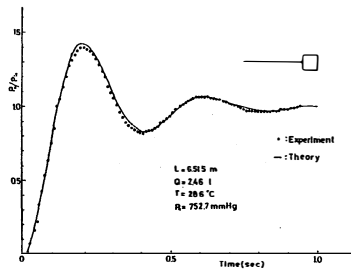


Fig. 10

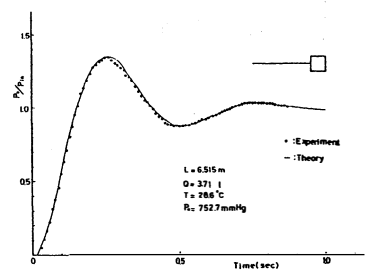


Fig. 11

これらのうち管路系の構成は異なるものの単一な管路系と極めてよく似た特性を示すものの一例として Fig. 6 の管路系に注目するものとすれば、管路内流体に関する基礎方程式から得られるつぎの管路マトリクス方程式

$$\begin{pmatrix} P(0, s) \\ M(0, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \Gamma x & Zc \sinh \Gamma x \\ \frac{1}{Zc} \sinh \Gamma x & \cosh \Gamma x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x, s) \\ M(x, s) \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

を適用することにより入力信号  $P_1$  に対する出力信号  $P_2$  の関係は

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 + \frac{Zc_2}{Zr_1} \sinh \Gamma_1 L_1} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_2 L_2 + \frac{Zc_2}{Zr_2} \sinh \Gamma_2 L_2} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_4 L_4 + \frac{Zc_4}{Zr_4} \sinh \Gamma_4 L_4} \quad (2)$$

と表わされる。

分岐数を  $k$  とすれば分岐点のインピーダンス  $Zr_1$  は(1)式を用いて

$$Zr_1 = \frac{1}{\sum_{j=1}^k \frac{Zc_j \cosh \Gamma_j L_j + Zr_j \sinh \Gamma_j L_j}{Zr_j \cosh \Gamma_j L_j + Zc_j \sinh \Gamma_j L_j} \cdot \frac{1}{Zc_j}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となり、合流点のインピーダンス  $Zr_i$  は合流数が  $k$  の場合に同様の手順で

$$Zr_i = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{Zc_i \sinh \Gamma_i L_i}{Zc_j \sinh \Gamma_j L_j}}{\frac{Zr_{k+1} \sinh \Gamma_{k+1} L_{k+1} + Zc_{k+1} \cosh \Gamma_{k+1} L_{k+1}}{Zr_{k+1} \cosh \Gamma_{k+1} L_{k+1} + Zc_{k+1} \sinh \Gamma_{k+1} L_{k+1}} \cdot \frac{1}{Zc_{k+1}} + \sum_{j=1}^k \frac{\cosh \Gamma_j L_j - \cosh \Gamma_i L_i}{Zc_j \sinh \Gamma_j L_j}} \quad (4)$$

と求められる。分岐数が 2 でそれぞれの管路仕様が等しい Fig. 6 の場合に(2), (3), (4)式から得られる関係式に振動性 2 次系を得る手法を適用することにより

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma \bar{L} + \frac{Zc}{Zr} \sinh \Gamma \bar{L}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{ただし } \frac{Zc}{Zr} = \frac{\bar{Q}}{\pi a^2 \bar{L}} \Gamma \bar{L}, \quad \bar{Q} = \frac{L_1 + \frac{1}{2} L_2 + L_4}{\bar{L}} Q$$

と表わされるが、上式は  $\bar{Q} = \frac{L_1 + \frac{1}{2} L_2 + L_4}{\bar{L}} Q$  の容量を末端にもつ管路長さ  $\bar{L}$  の単一な管路系にお

ける信号伝送の状況を示すものであり、したがって(6)式の単一な管路系を分岐・合流を含む Fig. 6 と等価な管路系とすることができる。

Fig. 6 の系の過渡特性と  $Q = \bar{Q}$  として得られる等価管路長さとはほぼ等しい長さをもつ単一な管路系における過渡特性を Fig. 12, Fig. 13 に比較して示す。

つぎに Fig. 5 の分岐点を含む管路系における入力信号  $P_1$  に対する出力信号  $P_2$  の関係は

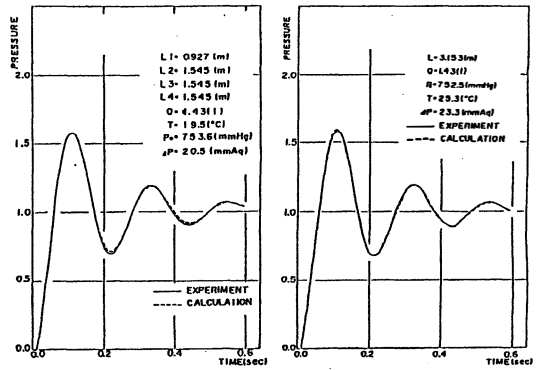


Fig. 12

Fig. 13

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 + \frac{ZC_1}{Zr_1} \sinh \Gamma_1 L_1} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma_2 L_2 + \frac{ZC_2}{Zr_2} \sinh \Gamma_2 L_2} \dots \dots \dots (6)$$

と表わされ、これを書き換えて

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 \left( \cosh \Gamma_2 L_2 + \frac{ZC_2}{Zr_2} \sinh \Gamma_2 L_2 \right) + 2 \sinh \Gamma_1 L_1 \left( \sinh \Gamma_2 L_2 + \frac{ZC_2}{Zr_2} \cosh \Gamma_2 L_2 \right)} (7)$$

が得られる。さきの Fig. 6 の場合と同様にして  $\bar{Q}$  を求めれば  $\bar{Q} = \frac{2L_1 + L_2}{L} Q$  となるが一般に(5)式を用いて  $\bar{Q} = \frac{\sum k_i L_i}{L} Q$  を定めることは容易ではない。ここでは2次系を得る過程に着目して  $\bar{Q}$  における  $k_i$  を伝達関数から読み取ることによれば、超越関数の積に  $ZC/Zr$  のかかるものうち  $(\sinh \Gamma_i L_i)^2$  に含まれる  $L_i$  の係数から等価容量  $\bar{Q}$  にかかわる  $L_i$  の重み  $k_i$  の値が求められることが分かる。

Fig. 6 の系は(2)式を書き直して

$$\begin{aligned} 1/\frac{P_2}{P_1} = & \cosh \Gamma_1 L_1 \cdot \cosh \Gamma_2 L_2 \cdot \cosh \Gamma_4 L_4 + 2 \sinh \Gamma_1 L_1 \cdot \sinh \Gamma_2 L_2 \cdot \cosh \Gamma_4 L_4 \\ & + \frac{1}{2} \cosh \Gamma_1 L_1 \cdot \sinh \Gamma_2 L_2 \cdot \sinh \Gamma_4 L_4 + \sinh \Gamma_1 L_1 \cdot \cosh \Gamma_2 L_2 \cdot \sinh \Gamma_4 L_4 \\ & + \frac{ZC_4}{Zr_4} \left\{ \sinh \Gamma_1 L_1 \cdot \cosh \Gamma_2 L_2 \cdot \cosh \Gamma_4 L_4 + 2 \sinh \Gamma_1 L_1 \cdot \sinh \Gamma_2 L_2 \cdot \sinh \Gamma_4 L_4 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cosh \Gamma_1 L_1 \cdot \sinh \Gamma_2 L_2 \cdot \cosh \Gamma_4 L_4 + \cosh \Gamma_1 L_1 \cdot \cosh \Gamma_2 L_2 \cdot \sinh \Gamma_4 L_4 \right\} \end{aligned} (8)$$

となるので上式の第5項から  $k_1 = 1$ ，第7項から  $k_2 = \frac{1}{2}$ ，第8項から  $k_4 = 1$ ，したがって

$$\bar{Q} = \frac{L_1 + \frac{1}{2}L_2 + L_4}{L} Q \text{ が求められる。}$$

Fig. 5 の管路系については(7)式から

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 L_1 \cdot \cosh \Gamma_2 L_2 + 2 \sinh \Gamma_1 L_1 \cdot \sinh \Gamma_2 L_2 + \frac{ZC_2}{Zr_2} \left( 2 \sinh \Gamma_1 L_1 \cdot \cosh \Gamma_2 L_2 + \cosh \Gamma_1 L_1 \cdot \sinh \Gamma_2 L_2 \right)} (9)$$

となりこの式の第3項から  $k_1 = 2$ ，第4項から  $k_2 = 1$  となるので  $\bar{Q} = \frac{2L_1 + L_2}{L} Q$  が得られる。





# 大電流母線の熱伝達係数と放射効率

富山大学工学部 池田 長康, 北村 岩雄, 後藤 清治  
山崎登志成, 高橋 隆一  
別川製作所 澤田 邦男, 橋本 吉昭, 河村 晃一

## 1. ま え が き

近年、工場のFA化に伴い電気需要が増加し、それと共に受電設備と各配電盤が必要であり、これらのコンパクト化が進められている。その結果、配電盤内の母線間の距離、各母線の温度上昇などが問題となる。

母線の温度上昇は熱伝達による母線から周囲の空気への熱の移動、その空気の対流、拡散による熱の移動、それに母線から直接放射によるものなど伝熱の問題は極めて複雑である。しかしながら、最終的に落ち着く温度を知ること大電流を扱う電気設備からは設計にとっても、設備の安全性、維持管理の上からも極めて重要である。我々はまず、配電盤内各部品の配置設計に役立つよう母線の温度上昇について実験的に調べ、次に、解析的に検討し、母線の温度の熱伝達係数と放射効率を明らかにした。

## 2. 実験装置と温度計測

### 2.1 大電流電源

500A から 1 kA のような大電流電源を考える場合、大抵の負荷抵抗は極めて小さいので電源の内部抵抗を小さくしなければ電源の内部での大きい発熱のため、種々のトラブルの原因になる。

われわれは表1に示す仕様の大電流用トランスを設計し、製作した。負荷を含めた回路は図1に示す。

このトランスからの負荷への接続は6並列の2次側トランス端子から6本の電線を並列に接続板まで持ってきて負荷に接続している。

表1 大電流用変圧器

型 式	乾式自冷	1次電圧	200V
相 数	1P	2次電圧	5V, 6並列
容 量	5kVA	2次電流	1000A
周波数	60Hz	出力側抵抗	4.3mΩ
寸 法	300×300 ×260m	重 量	50kg

### 2.2 供試用大電流母線

この実験に用いた大電流母線は純銅の3mm×30mmの断面をもつもので、負荷としては図1に示すように、全長6.8mである。母線は図2に示すようにこの断面を立てた場合と横にした場合について実験を行った。

### 2.3 温度計測

アルメル・クロメル熱電対を用い、図1および図2に示すような配置で、18点同時に計測している。

### 3. 実験とその結果

基本的なデータを取るために、まず、図1で示すような母線配置で電流をパラメータとして、温度計測を行った。

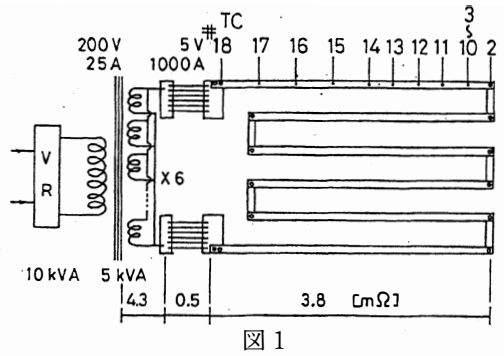


図1

#### 3.1 母線を横に配置した場合

この場合の母線上側温度の時間推移を電流をパラメータとして、示した結果が図3である。

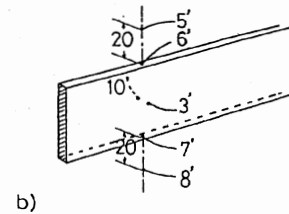
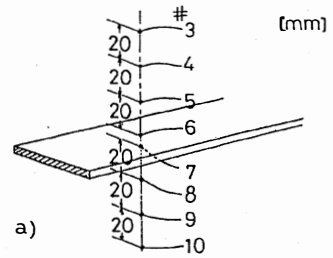


図2

#### 3.2 母線を縦に配置した場合

この場合も母線上側温度の時間推移を電流をパラメータとして測定を行った。図4には電流700Aの場合の温度の時間推移を示す。同時に横配置の場合の結果も同時に示す。この図から縦に配置の場合は横配置の場合に比べ、平衡温度が少し低いことが分かる。縦に配置の場合の方が母線周囲の気流が流れ易く熱の除去に効果的であるためと考えられる。

### 4. 熱伝達係数と放射効率

熱の逸散過程は温度差に比例する熱伝達による部分と絶対温度の4乗に比例する放射による部分とがある。しかし、温度が低い場合は放射を無視することが出来ると考え、温度差に比例する熱伝達係数についてのみ、まず、考えることにする。

#### 4.1 放射過程を無視した場合<sup>1)</sup>

この場合、入った電気エネルギーは母線の温度上昇と温度に比例した放熱過程の損失との和で表される。すなわち、

$$C\rho V \frac{dT}{dt} + \zeta ST = I_0^2 r_0 (1 + \alpha T) \quad \dots\dots\dots (1)$$

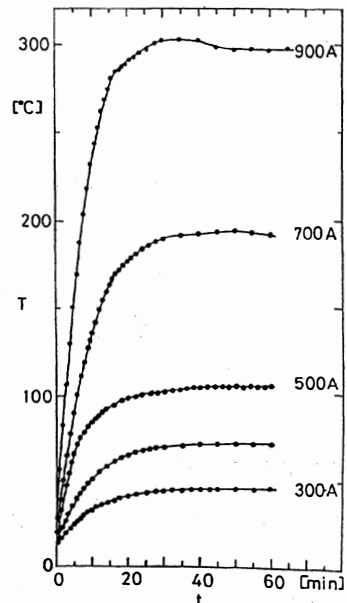


図3

となる。ここで、 $T$  および  $I_0$  は母線の温度とその中を流れる電流、 $C$ 、 $\rho$ 、 $V$  はそれぞれ母線の比熱、密度、単位長さ当たりの体積を表し、 $\zeta$ 、 $S$  は表面からの熱伝達係数と単位長さ当たりの表面積を表す。 $r_0$  は基準抵抗で、 $\alpha$  は抵抗の温度係数である。

今、 $\tau$ 、 $H$ 、 $A$  をそれぞれ

$$\tau = \frac{C\rho V}{\zeta S}, \quad H = \frac{I_0^2 r_0}{\zeta S}, \quad A = \frac{I_0^2 r_0}{C\rho V} \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおくと、(1)式は

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau}(1 - \alpha H)T = A \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。この式は簡単にとくことができ、

$$T = \frac{H}{1 - \alpha H} \left[ 1 - \exp\left\{ \frac{-t}{\tau_T} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ただし、 $\tau_T$  は母線の温度上昇の時定数で、

$$\tau_T = \frac{H}{A(1 - \alpha H)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

で表される。

伝熱に関わる $\zeta$ 値を求める方法は

- 1) (3)式において、 $dT/dt=0$  において、 $T(t \rightarrow \infty) = T_\infty$  の値から求める。
- 2) (5)式の温度上昇の時定数  $\tau_T$  の値から求める、

の2つの方法がある。

- 1) の方法での $\zeta$ 値

(3)式において、 $t \rightarrow \infty$  の時、 $dT/dt=0$  であるから、

$$T_\infty = \frac{H}{1 - \alpha H} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。(2)式と(6)式から、 $\zeta$ 値は

$$\zeta = \frac{I_0^2 r_0}{S} \frac{1 + \alpha T_\infty}{T_\infty} \quad [\text{W/m}^2 \text{K}] \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。 $r_0$ 、 $\alpha$ 、および  $I_0$  と  $T_\infty$  を実験より求め、 $\zeta$ 値の電流依存性を調べると、図5において○および×で示すように、一定値ではなく、非直線特性を示す。

- 2) の方法での $\zeta$ 値

この場合は(5)式の温度上昇時定数の式より、 $\zeta$ 値を求めると

$$\zeta = \frac{1}{S\tau_T} (C\rho V + \alpha I_0^2 r_0 \tau_T) \quad [\text{W/m}^2 \text{K}] \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。この式の  $\tau_T$  を実験より求め、電流依存性を調べると、図5に●および▲で示すように、これも一定値ではなく、非直線特性で1)の方法で求めたの $\zeta$ 値と良い一致を示す。

しかしながら、この $\zeta$ 値の非直線特性は我々の行った実験に特有なものとも考えられるので、次に、放射過程を考慮したより一般的な方法を検討する。

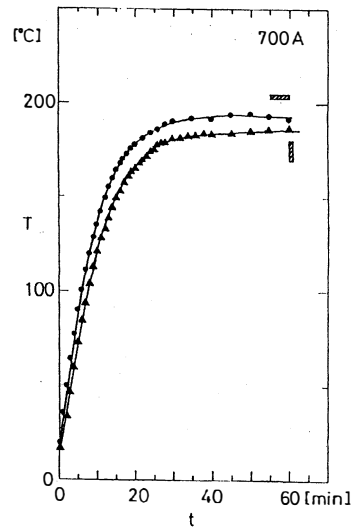


図 4

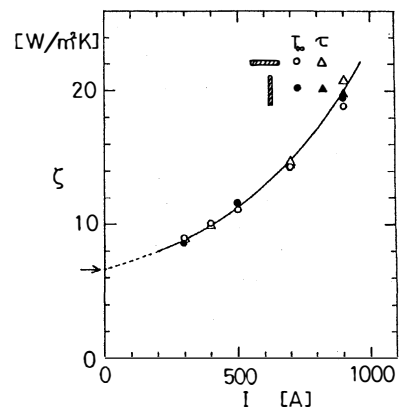


図 5

4.2 放射過程を考慮した場合

4.1節で、我々はζ値を独立な2つの方法で調べ、良い一致を見たが、このζ値の非直線性はこの実験特有のものと考えられるし、定数の電流依存性はより一般性のある結論を引き出すには好ましくない。更に、電流が大きくなり、母線の温度が上がると放射過程を考慮したより一般的な微分方程式で検討する必要がある。

放射過程を考慮したより一般的な母線の温度上昇を支配する微分方程式は

$$C\rho V \frac{dT}{dt} + \zeta ST + \lambda\sigma S\{(T+t_0)^4 - t_0^4\} = I_0^2 r_0(1 + \alpha T) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで、λ, σ, t<sub>0</sub>はそれぞれ放射効率、ステファン・ボルツマン定数 (5.67×10<sup>-8</sup> [W/m<sup>2</sup>°k<sup>4</sup>]) と基準温度の絶対温度である。左辺第3項は放射による熱損失を表しており、この(9)式は1階の非線形微分方程式である。この式はまた

$$\frac{dT}{dt} + \lambda A\{T^4 + 4t_0 T^3 + 6t_0^2 T^2 + 4t_0^3 T\} + \{D - \alpha B\}T - B = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

のように表される。ここで、A, B, Dはそれぞれ

$$\begin{cases} A = \frac{\sigma S}{C\rho V} \\ B = \frac{I_0^2 r_0}{C\rho V} \\ D = \frac{\zeta S}{C\rho V} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (11)$$

である。この式は1階の非線形微分方程式であり、簡単には解くことが出来ないが、平衡温度 T<sub>∞</sub>は求めることが可能である。今、

$$\begin{cases} dT/dt = y \\ T = x \end{cases} \quad \dots\dots\dots (12)$$

とおけば、(10)式は

$$y = -\lambda A\{x^4 + 4t_0 x^3 + 6t_0^2 x^2 + 4t_0^3 x\} + \{\alpha B - D\}x + B \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。この式は4次の代数式である。これをxy位相平面について考えると、この式は定数項Bは正であり、4次の項は負であるので、必ず、x軸を横切り解を持つ。

今、x=0 からxが正の方向に大きくなってゆけば、すなわち、温度が上がって行くと、yは正のある値から次第に零に近づく、すなわち、温度勾配が正ではあるが次第に小さくなって行く。y=0では温度勾配は零となり、もはや温度上昇はありえない。もし、何等かの原因により、y=0の点を越え、xが大きくなるとyは負となり、xはもどらざるをえない。すなわち、dT/dt=0の温度よりも温度が上がると、温度勾配は負となり、温度は平衡点の方に戻ることになる。従って、(13)式の零点は(10)式の非線形微分方程式の解の平衡温度を示す。すなわち、(10)を直接解くということ無く平衡温度を知ることが出来る。

ここではこの伝熱に関わるζ値を一定値とし、放射過程の効率をλとして、平衡状態での温度を求め、実験結果と比較してみる。

このζ値は電流=0の場合の値とし、これを図5の実験値を外挿して求める。この実験では6.5W/m<sup>2</sup>°Cを得た。この値を用いて平衡状態の温度の放射効率依存性を計算すると図6の結果を得る。こ

の図に実験結果を重ねのせると斜線の範囲となる。これから、放射効率 $\lambda$ は0.6であることが分かる。この解析で得た一定数である熱伝達係数と放射効率を用いて、 $T_{\infty}$ を計算し、図7に□で示すと極めて良い一致を示す。これから1)の解析で示した $\xi$ 値の非直線特性は放射損失過程に起因するものと考えられる。

## 5. 結 論

この大電流母線の実験と解析から、次のような結論を得た：

- 1) 温度の4乗に比例する放射過程を含む母線温度の非線形微分方程式を位相平面の解析により、一定数である熱伝達係数と放射効率を用いて、最終平衡温度を求めることが可能である。

この実験では熱伝達係数 $\xi$ は $6.5[W/m^2\text{C}]$ 、放射効率 $\lambda$ は0.6である。

- 2) 大電流母線の縦と横の配置による最終平衡温度の相違は縦配置の場合が横配置の場合に比べ、温度は低くなる。母線周囲の対流による効果と考えられる。

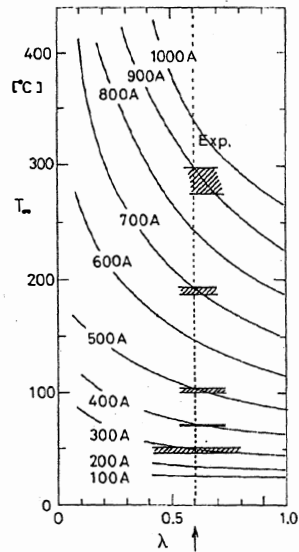


図 6

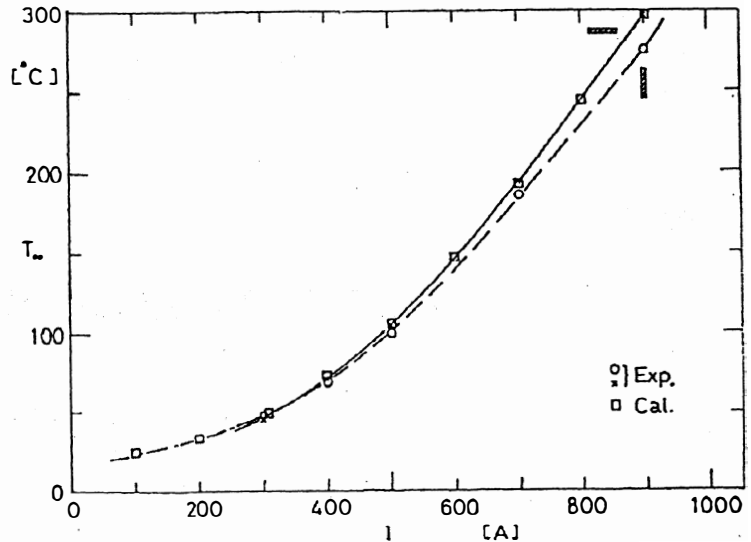


図 7

## 参 照 文 献

- 1) 宮地 巖：電工学概論 コロナ社 (1965)

## Heat transfer coefficient and radiation efficiency of high electric current bus

Toyama University      Nagayasu Ikeda, Iwao Kitamura, Seiji Goto,  
Toshinari Yamazaki, Takakazu Takahashi,  
Betsukawa Seisakusho      Kunio Sawada, Yoshiaki Hashimoto,  
Kohichi Kawamura

Recently, electric power demand goes on increasing. It is necessary to more electric substations and small cubicles. It is also wanted to compact gears and substations. This situation results in the narrow distance arrangement of the current buses and the handling of the high current and high temperature of the buses. Since the temperature rise of the bus is due to many heat transfer factors in the vicinity of the bus surface, it is analysed inclusively in this paper. From the engineering aspect, that is, the design aspect, it is important to know two fundamental values of heat transfer coefficient and radiation efficiency necessary to decide the final temperature of the bus. The temperature are known from the method of phase plane of the nonlinear differential equation on the temperature rise including the radiation loss with their values. The calculated temperature is consisted with the experimental ones.

〔英文和訳〕

### 大電流母線の熱伝達係数と放射効率

富山大学工学部      池田 長康, 北村 岩雄, 後藤 清治  
山崎登志成, 高橋 隆一  
別川製作所      澤田 邦男, 橋本 吉昭, 河村 晃一

最近、電力需要が増加してきており、より多くの変電設備やキュービクルが必要である。これはまた、コンパクトな装置や変電設備を求めている。このような事情から、狭い間隔での電流母線の配置やこれら母線が大電流で、しかも高い温度で取り扱わなくてはならなくなっている。母線の温度上昇はその表面周辺での多くの熱伝達因子によるが、この論文では、この温度上昇を総括的に解析した。工学的すなわち設計の立場から、母線の最終温度を決める基本的な2つの値、熱伝達係数と放射効率を知ることが重要である。この温度はこれらの値を用いて放射損失の項をもつ温度上昇に関する非線形微分方程式を位相平面の方法で知ることが出来る。この計算で求めた値と実験値とは一致を見た。

# 昆虫運動解析による歩行ロボットの運動パターン

三宅 和哉, 北村 岩雄, 山崎登志成  
高橋 隆一, 稲垣 征司・池田 長康

## 1. ま え が き

近年, 送電の高電圧大容量化に伴い送電線が新しく建設されている。これにはまた, 建設後の保守, 点検などの作業を行う必要がある。これらの現場は, 山間地に多く存在するため, 資材を運ぶだけでも大変であり, 危険を伴うことでもある。しかし, 新たな林道は山林の表面や水脈を切るため, 土砂崩れや森林の生態系を破壊する原因に成りかねない。従って, 林道によらない安全な作業用運搬, 輸送手段を考える必要がある。これには森林の中に住む甲殻類の昆虫を見れば, 道のない, 多少の傾斜地を歩行できる多足ロボットが最適であることが分かるであろう。この研究の多足ロボットは多関節, 多足を持つ歩行ロボットで, 関節を自由に動かし, 道のない多少の凸凹をもつ傾斜地を歩行でき, 送電線の保守, 点検などの作業を行うことができることを目標としている。

この多足ロボットを設計するにあたり, 運動の静止安定性を持たせるため, 足の数は6とすることにした。次に, 6足歩行ロボットの簡単な動力を持たないモデルを製作し, その歩行形態と, 各足の干渉, 協調を観察, 考察をした。この結果, スムーズな歩行を実現するには, 各足の伸長方向, 各足の歩幅などが各足の干渉や協調に影響しており, しかも, これらの動きを各足のそれぞれの関節が制御しながら行わなければならないという数多くの問題があることが分かった。そのため, 森林に住む「カブトムシ」の歩行形態を観察し, この運動をもとにロボットの歩行運動パターンを決定しようと考えた。

## 2. 6足ロボットのモデル

我々は, 図1に示すような6足ロボットのモデルを考えた。このモデルの足は, 図2に示すように, 3節, 3関節より成り立っている。

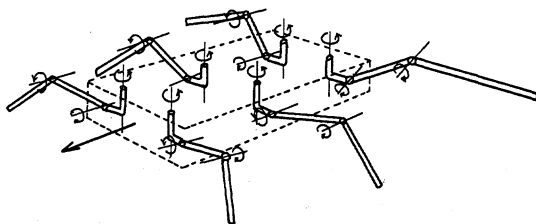


図1 ロボットのモデル

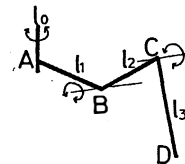


図2 足のモデル

### 2.1 6足の歩行の特徴

6足の歩行形態は、図3に示すように、足を地につけたまま体を前方に押し進める立脚相と、後方にある足を地面からはなして前に進める遊脚相の二つの相が一つのサイクルを成している。また、6足の各足を図4に示すように  $R_f, R_m, R_r, L_f, L_m, L_r$  と定義すると、歩行は第一グループ ( $R_f, L_m, R_r$ ) と、第二グループ ( $L_f, R_m, L_r$ ) から成る三角形を交互に前方に押し出して歩行を行い、常に重心がその三角形の中に入り静的安定を保っている。

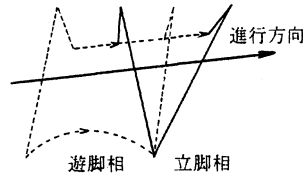


図3 立脚相と遊脚相

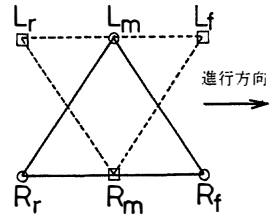


図4 歩行形態

### 2.2 足の運動の表現

足の運動を記述するには、各足の関節角度が既知である場合、足の先端及び、各関節位置を知ることができる順運動学の方法と、逆に、各足の先端及び各関節の位置からそれぞれの関節の角度を知る、逆運動学の方法とがある。

#### 2.2.1 各関節の座標系

各関節の座標系を、次の a) ~ f) の設定項目に従い図5に示すように定める。

- a) 座標系は付け根から足先に向かって  $i=0\sim 3$  とする。
- b) 0番目の座標系を基準座標系とし、その  $Z_0$  軸が付け根のジョイントの可動軸に沿っていれば付け根のどこに設定してもよい。
- c)  $Z$  軸は各ジョイントの可動軸に沿う方向に設定する。
- d)  $X$  軸は  $Z$  軸に垂直で、出来る限り足先の方に設定する。
- e)  $Y$  軸は先の  $X$  軸、 $Z$  軸に対して右手系をなすように設定する。
- f) 3番目（最終）の座標系は足先のどこに設定してもよいが、 $X_3$  軸が  $Z_2$  軸に対して垂直でなければならない。

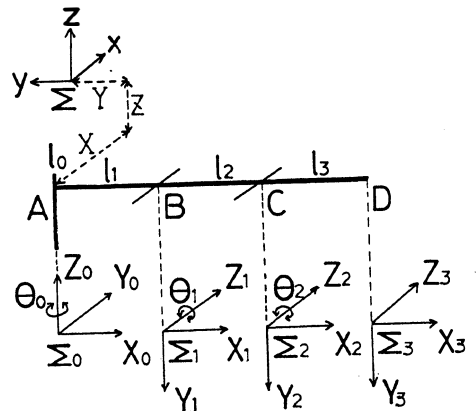


図5 各関節の座標系

#### 2.2.2 歩行運動の行列表現—順運動学的解析

この歩行運動行列表現には、異なる二つの座標系間の空間的な回転関係を表現する  $3 \times 3$  回転変換行列と、平行移動ベクトル及び座標系の大きさの要素を加えた、(1)式に示す  $4 \times 4$  同次座標変換行列 ( $T$ ) を利用する。この同次座標変換行列は、2つの座標系  $\Sigma_{n-1}, \Sigma_n$  があるとき、 $\Sigma_n$  を  $\Sigma_{n-1}$  に関係づける働きがあり、これを  ${}^{n-1}T_n$  と表す。この同次座標変換行列を各関節について求め、それら



を合成することにより、各関節の幾何学的な位置と姿勢を表す局所的座標系が、すべて足の付け根にある基準座標系  $\Sigma_0$  上に変換できる。そこで、図5の各関節に設定した座標系 ( $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ) を基準座標系  $\Sigma_0$  に関係づける基本同次座標変換行列を(2)式~(4)式に示す。

$$T = \begin{pmatrix} \text{rotation} & \text{position} \\ \text{matrix (3} \times \text{3)} & \text{vector (3} \times \text{1)} \\ \text{perspective} & \text{scaling} \\ \text{transformation} & \text{factor} \end{pmatrix} \dots\dots (1)$$

$${}^0T_1 = \begin{pmatrix} C_0 & 0 & -S_0 & l_1C_0 \\ S_0 & 0 & C_0 & l_1S_0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$${}^0T_2 = {}^0T_1 * {}^1T_2 = \begin{pmatrix} C_0C_1 & -C_0S_1 & -S_0 & l_0C_0 + l_2C_0C_1 \\ S_0C_1 & -S_0S_1 & 0 & l_1S_0 + l_2S_0C_1 \\ -S_1 & -C_1 & 0 & -l_2S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$${}^0T_3 = {}^0T_2 * {}^2T_3 = \begin{pmatrix} C_0C_1C_2 - C_0S_1S_2, & -C_0C_1S_2 - C_0S_1C_2, & -S_0, & l_1C_0 + l_2C_0C_1 + l_3(C_0C_1C_2 - C_0S_1S_2) \\ S_0C_1C_2 - S_0S_1S_2, & -S_0C_1S_2 - S_0S_1C_2, & C_0, & l_1S_0 + l_2S_0C_1 + l_3(S_0C_1C_2 - S_0S_1S_2) \\ -S_1C_2 - C_1S_2, & S_1S_2 - C_1C_2, & C_0, & -l_2S_1 - l_3(S_1C_2 + C_1S_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

ここで  $S_i, C_i, l_i$  は、 $S_i = \sin \theta_i, C_i = \cos \theta_i, l_i$  : リンク長さ ( $i=0, 1, 2, 3$ ) である。これら、一本の足についての基本同次座標変換行列を、6足のロボットに拡張するために、付け根に設定した足の基準座標系  $\Sigma_0$  を、ロボット全体の基準になる絶対座標系  $\Sigma$  上に変換をする。これは図5のような基準座標系  $\Sigma_0$  と絶対座標系  $\Sigma$  の関係があるとすると、(2)~(4)式の  $3 \times 1$  position vector の部分に絶対座標系  $\Sigma$  から見た、足の付け根にある基準座標系  $\Sigma_0$  の原点の位置 ( $X, Y, Z$ ) を加えることになる。つまり基準となる原点を絶対座標系の原点に平行移動させることになる。これをそれぞれの足の付け根に対して行えば、すべての足の動きを絶対座標系上に変換して考えられることになる。

### 2.2.3 逆運動学的解析

図5に示すモデルについて、各関節の幾何学的な位置関係から、(5)式~(7)式に示す各関節角度 ( $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ ) を表現する関係式を求める。この関係式に各関節の位置  $(X_i, Y_i, Z_i)_{(i=0-3)}$  の時間変化を与えることにより、関節角度の時間変化を求めることができる。

1) 第一関節角度  $\theta_0$  の導出 ( $-180^\circ \leq \theta_0 \leq 0^\circ$ )

- i)  $X_2 > X_1$                       ii)  $X_2 < X_1$

$$\theta_0 = -\left| \tan^{-1} \frac{Y_0 - Y_1}{X_1 - X_0} \right| \quad \theta_0 = -\left| \pi - \tan^{-1} \frac{Y_0 - Y_1}{X_1 - X_0} \right|$$

- iii)  $X_2 = X_1$   
 $\theta_0 = -90^\circ \dots\dots\dots (5)$

II) 第二関節角度  $\theta_1$  の導出 ( $-90^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ$ )

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{Z_0 - Z_2}{\sqrt{(X_2 - X_0)^2 + (Y_2 - Y_0)^2} - l_1} \dots (6)$$

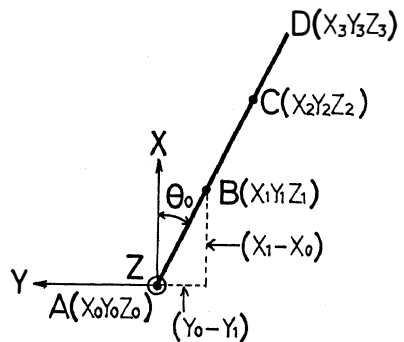


図6  $\theta_0$  の導出

III) 第三関節角度  $\theta_2$  の導出 ( $0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ$ )

i)  $\theta_1 < 0$

$$\theta_2 = |\theta_1| + \left| \tan^{-1} \frac{Z_2 - Z_3}{\sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2}} \right|$$

ii)  $\theta_1 \geq 0$

$$\theta_2 = |90 - \theta_1| + \left| \tan^{-1} \frac{\sqrt{(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2}}{Z_2 - Z_3} \right| \dots\dots\dots (7)$$

以上(5)式~(7)式は1本の足についてのものだが、他の足についても同じ式で表される。足を動かすためには、各関節角度の時間変化を知り、この角度変化を(2)式~(4)式に与え、各関節及び足先の位置の時間変化を求める必要がある。しかし、協調した運動をさせなければ各足の干渉などの問題が起こる。我々は、如何に運動させればよいかの知識をもっていないため、まずカブトムシの運動を調べ、これを1周期にわたりパターン化し、各足の運動を決定する。これをもとに、逆運動学を利用して各足、各関節角度の時間変化を導き、この値を用いて各足を運動させれば、各足は干渉せず、スムーズなパターン化した動きをするはずである。このため我々はカブトムシの歩行を詳細に調べた。

3. 昆虫の歩行の観測

3.1 測定装置と測定方法

図7に示すようなアクリル板を用いたチャンネルにカブトムシを入れて歩かせ、側方からビデオカメラにより撮影する。この歩行は縦方向(X, Z)運動はそのまま横から測定し、平面方向(X, Y)運動は下面に45°に置いた鏡で横方向に変え両方向同時に測定している。この実験では図8に示すように、各関節を  $L_1 \sim L_{12}$  (左側),  $R_1 \sim R_{12}$  (右側) のように定義し、基準となる座標系は進行方向をX軸、体の上方をZ軸、そしてY軸を正規直交座標系をなすよう横方向に設定する。長さの測定にはアクリル板のチャンネルに引いてある5mm方眼の1マスを単位とし、時間は1/30秒を1stepとした。原点は任意の位置に設定し、各関節について、各時間の座標成分を測定した。ここで横方向からの像では体の反対側のZ成分については測定することができないが、左側と右側は1/2周期で等しい動きをすると仮定した。

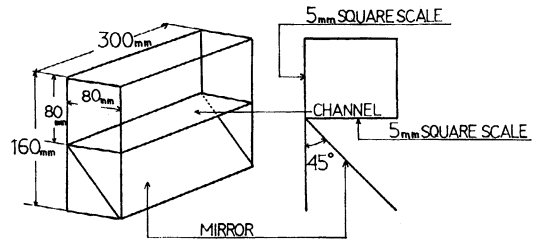


図7 測定装置

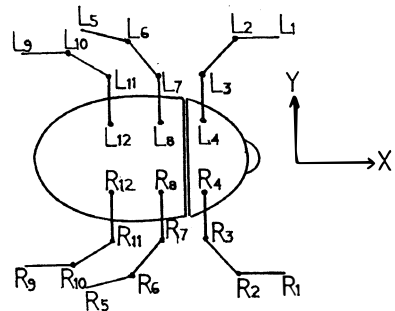


図8 各関節の定義

3.2 測定結果と補正

カブトムシの運動の測定結果の一例として右前足

R 2, R 3, R 4 の各関節それぞれの X 方向, Y 方向, Z 方向の測定値を図 9 a) から同図 h) の各図に実線で示す。カブトムシは、その運動が機械ほど一定したものではなく、直線状に歩いていないため、足の運びは必ずしも周期的ではない。したがって運動解析するために、カブトムシが直線歩いた場合の値に、補正をする必要がある。この補正は、カブトムシの頭の位置を中心のライン上に戻し、傾いている体の中心線をこのラインに合わせるように、 $\theta$  だけ回転させた。各足の各位置の X 座標の補正には  $\cos \theta$  を掛け、Y 座標にも  $\sin \theta$  を掛けることにより行った。その結果を図 9 の各グラフに破線で示す。図 9 のグラフは、縦軸を測定装置の 5 mm 方眼の一マス目を単位長とし、横軸の 1 step は 1/30 秒としてある。X 方向のスケールに対して Y, Z 方向のスケールは 2 倍に拡大してある。同図 a), b), c) より足先の R 2 に比べ、R 3, R 4 と足の付け根に近づくほど、遊脚相と立脚相の運動の変化が小さくなるのが分かる。また Y, Z については X の値に比べてその変化はとても小さい。

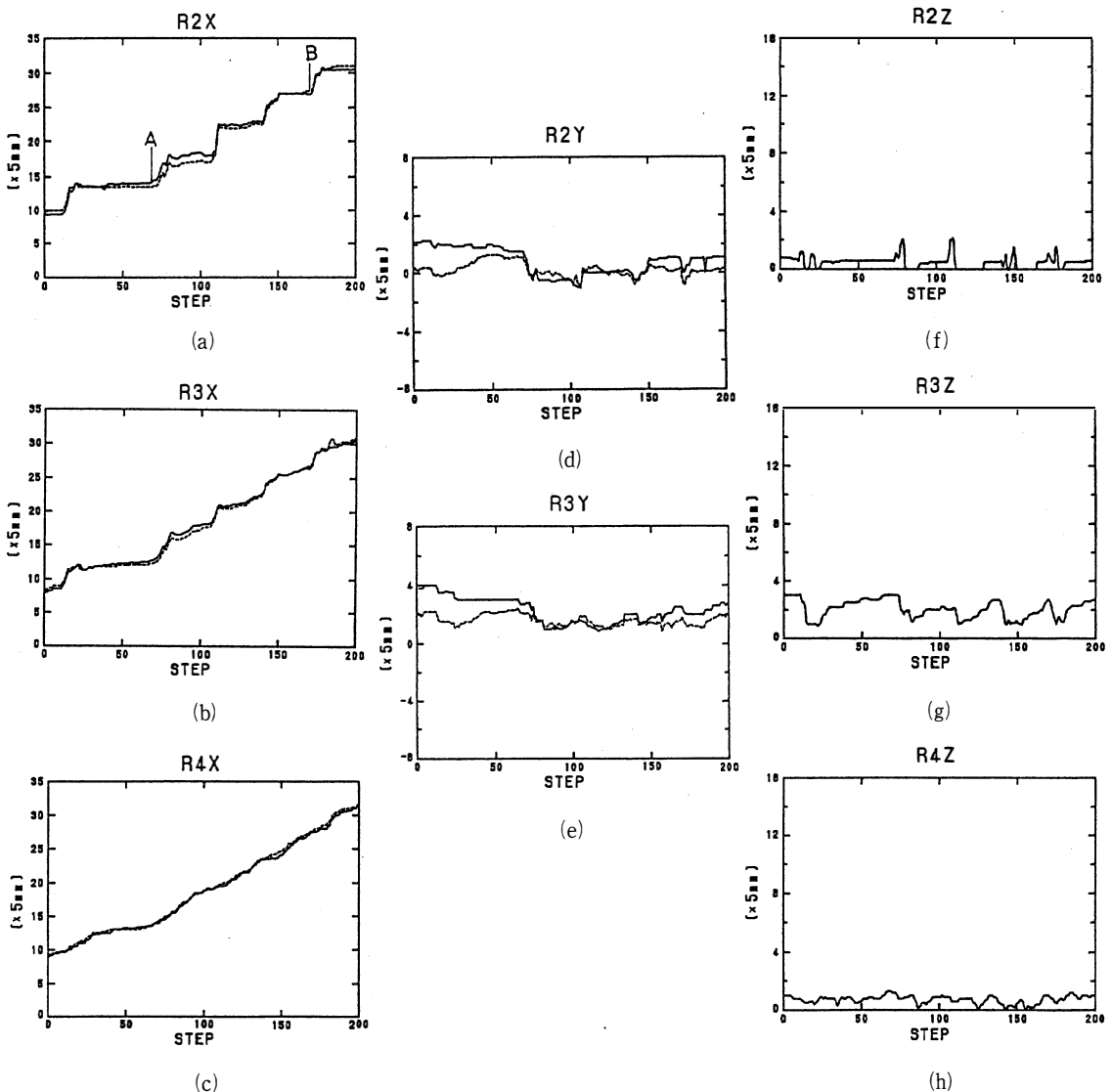


図 9 測定結果と補正結果

## 4. 歩行のパターン化

### 4.1 無次元化

各足の運動について、時間に関しての基準値に1周期をとり、変位置に関しての基準値に1周期に進む周期変位置をとり、それに対する比で表し、次のI)~IV)の過程に従い無次元化した。また測定結果の無次元化をするにあたり次のa), b)の条件を考慮する。

- a) 考えているロボットには、手首や足先の機能を考慮していないので、手首や足先に相当する部分は、ひとつ内側の各関節(手首、かかとに相当)R 2, R 6, R10, L 2, L 6, L10の動きにはほぼ追従しているだけなので無視し、各関節R 2, R 6, R10, L 2, L 6, L10を足先とする。
- b) 足の付け根にあたる各関節(R 4, R 8, R12, L 4, L 8, L12)のY, Z値については、一定の位置を進んだものとする。

#### I) 1周期の時間と周期変位置

図9 a)に示すA, B間について平均し、1周期の時間とその間に進む周期変位置を求めると、1周期 1.1秒, 周期変位置 19mmとなる。

#### II) 1周期内の遊脚相時間(M)と立脚相時間(S)の割合

1周期に対する各足先の遊脚相と立脚相の時間の割合を求めると、

$$R 2 X M : S = 0.21 : 0.79 \quad R 6 X M : S = 0.22 : 0.78 \quad L 6 X M : S = 0.22 : 0.78$$

$$L 2 X M : S = 0.21 : 0.79 \quad R 10 X M : S = 0.22 : 0.78 \quad L 10 X M : S = 0.22 : 0.78$$

となる。これにより、すべての足先について遊脚相と立脚相の時間の割合は0.20, 0.80となる。

#### III) 各関節での周期変位置

I)と同様にして各関節の周期変位置を求める。この結果を表1に示す。括弧内の数字は、X値は、プラスの値では付け根を基準にしてその他の各関節が前にあり、マイナスの値では後ろにあることを示す。Y値は、各関節が付け根に最接近する位置を示し、Z値は、各関節の最下位置を示す。R 4, 8, 12の関節は付け根にあたり体と共に変位するため、1周期は等しく、19mm進む。

#### IV) 周期変位置の無次元化

周期変位置19mmを基準値として各関節の周期変位置に対し無次元化を行う。この結果を表2に示す。Yの最低値については、各足の付け根が0のライン上を進んだと考え、各関節が付け根からどれだけの距離に位置するかを示すようにした。R 4, 8, 12のX値については1周期内に基準値と同じだけ進むとした。

表1 平均変位置 単位(mm)

	X値	Y値	Z値
R 2	19(+3)	-4.5(+1)	8(0)
R 3	15(+1)	-3(+8.6)	7(+6.5)
R 4	(0)	+(+20)	0(+4)
R 6	19.5(-9)	-4(+5)	8(+0)
R 7	16(-6)	-3(+8.5)	4(+5)
R 8	(0)	0(+20)	0(+5)
R 10	18.5(-17.5)	-4(+3.5)	1(+0)
R 11	15(-9.5)	-3(+10)	1.5(+5)
R 12	(0)	0(+20)	0(+4.5)

表2 無次元化値

	X値	Y値	Z値
R 2	1(+0.2)	-0.24(-1)	0.42(0)
R 3	0.8(+0.1)	-0.15(-0.6)	0.37(+0.34)
R 4	(0)	0(0)	0(+0.2)
R 6	1(-0.5)	-0.21(-1)	0.42(0)
R 7	0.8(-0.3)	-0.15(-0.6)	0.21(+0.26)
R 8	(0)	0(0)	0(+0.26)
R 10	1(-0.9)	-0.21(-0.9)	0.05(0)
R 11	0.8(-0.5)	-0.15(-0.5)	0.08(+0.26)
R 12	(0)	0(0)	0(+0.23)

無次元化の結果をもとに、右前足についてパターン化した運動の1周期のみの結果を図10 a), b), c) に示す。横軸に無次元化した1周期をとり、縦軸にX, Y, Zそれぞれ無次元化した値を記している。測定結果と比較して、同様にして足の付け根に近づくほどその変化が小さくなっていることが分かる。

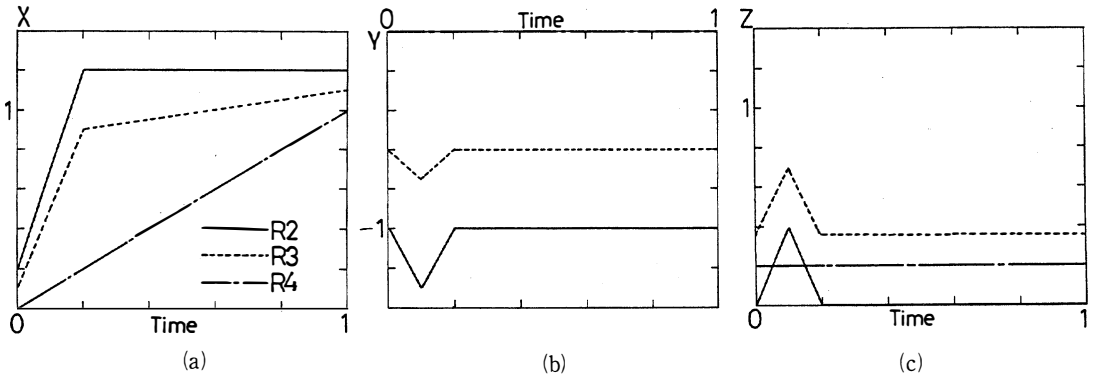


図10 パターン化グラフ

## 5. 歩行運動の解析

### 5.1 歩行運動の各関節角度

歩行パターンを利用し、逆運動学の考えを用いて関節角度の時間変化をもとめる。カブトムシの足の付け根は図11に示すユニバーサルジョイントの形になっているが、図2のモデルに対応させるため、リンク  $l_1$  に相当する部分を仮想的に設定し、カブトムシの足の付け根をA, B 2つの関節に分けた。ただし  $l_1$  は  $l_2, l_3$  に比べかなり短い。各足の付け根 R 4, R 8, R 12を関節Bに対応させ、関節Aは、(8)式に示す関係式により表す。このモデルについて逆運動学の関係式、(5)式~(7)式に、図10に示すパターン化された関節位置の時間変化を与えることにより、図12 a), b), c) に示す関節角度の時間変化を導いた。図12の結果により6足ロボットの歩行パターンを導くことができた。

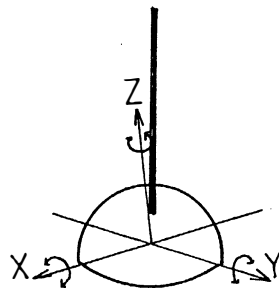


図11 ユニバーサルジョイント

$$A_x = B_x + \frac{l_1}{l_2}(B_x - C_x) \quad A_y = B_y + \frac{l_1}{l_2}(B_y - C_y) \quad A_z = B_z \quad \dots\dots\dots (8)$$

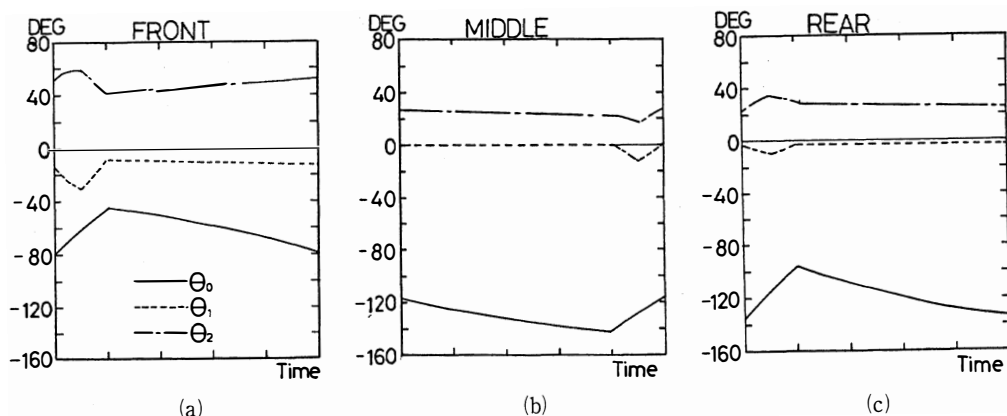


図12 関節角度の時間変化

## 5.2 歩行の特徴

関節角度の時間変化をもとに次に挙げる特徴があることが分かった。

- 1) 前足は、足全体を盛んに動かし、足を前方に伸縮させて体を引っ張っているのと、前方の地形を探るようにしていると考えられる。
- 2) 中足は、関節Cの角度  $\theta_2$  の遊脚相時間の変化が前、後足に比べて逆になっているので、足を伸縮させて、体に足を近づけたり遠ざけたりしているのではなく、ほぼ足を伸ばしたような状態で、前後に動かしていると考えられる。
- 3) 後足はその動きは小さいが、体に対し後方に伸縮させて体を押し進めているような状態になっている。

## 6. ま と め

- i) 6足歩行運動の各足、各関節について順運動学的行列表現を行い、逆運動学的解析も行った。
- ii) カブトムシの歩行を詳細に観測し、各足、各関節の動きの特徴を把握した。この特徴は前足で体を引っ張り、中足は単純に前後に動かし、後足は体を押し進めるような歩行である。
- iii) このカブトムシの運動をもとに各関節の動きを無次元化し、6足ロボットの歩行ロボットの歩行に関するパターンを得た。
- iv) 以上の解析から、6足ロボットの平地のみならず、傾斜地での運動に関するパターンを検討し、決定して行くことが可能である。また、トルクの時間変化を求めることや、フィードバック制御系を構成することが可能であると考えられる。

### 参考文献

- 1) Fu, Gonzalez, Lee: ROBOTICS, 12~81, MCGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, 1987
- 2) 広瀬茂男著: ロボット工学—機械システムのベクトル解析—, 1~15, 裳華房, 1987
- 3) 中野栄二著: ロボット工学入門, 124~139, オーム社, 1983 電気学会, 1992年10月2日

## **Walking pattern of a multiped robot by analyzing the movement of a insect**

Kazuya Miyake, Iwao Kitamura, Tosinari Yamazaki,  
Takakazu Tkahasi, Seiji Inagaki, Nagayasu Ikeda

The method of a determination of walking pattern of a multiped robot with six legs was considered. The three processes: 1) Matrix expression of the walking on the base of kinematics. 2) Observation of the movement of insects. 3) making of the walking pattern of a multiped robot, were carried. The characteristic and the time dependence of motion of each leg of the insect were analyzed and the non-dimension walking patterns were determined from these processes. It is found as the fundamental characteristic of the multipede (6 legs) robot walking that the functions of front legs, middle legs and rear legs are to pull the body ahead, to support it and to push it respectively.

〔英文和訳〕

### **昆虫運動解析による歩行ロボットの運動パターン**

三宅 和哉, 北村 岩雄, 山崎登志成  
高橋 隆一, 稲垣 征司, 池田 長康

6足の多足ロボットの歩行パターンの決定方法について考察を行った。この考察は、3つの手順で行った。1) 運動学に基づく歩行の行列表現。2) 昆虫の運動の観測。3) 多足ロボットの歩行パターンを求めるといふこれらの手順から、昆虫のそれぞれの足の運動の特徴と運動の時間変化について解析し、無次元化した歩行パターンを決定した。多足(6足)ロボットの歩行の基礎的な特徴として、それぞれ前足の働きは体を引っ張り、中足は体を支え、後足は、体を押し進めるようにしていることが分かった。





# 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について (I)

## — P-N 項法 —

松田 秀雄, 宮腰 隆, 畠山 豊正

### 1. はじめに

ここで発表する, 三段 NAND ゲート回路の論理設計法の一つ, P-N 項法は, すでに昭和51, 52年度に電気四学会北陸支部連合大会で口頭発表している。当時は半導体技術も IC (集積回路) といわれる時代で, 1チップに NAND ゲートを3ないし4個集積したものが出来上がっていた。従って, 論理設計といっても規模も小さく, 入力線数で, 3ないし4, ゲート数で10個位のを想定すればよかった。その後, 我々の研究の主眼は NAND ゲート回路からより一般の AND, OR ゲート二段論理回路の方に移り LSI から VLSI へと集積化の規模が発展するのに応じてより大きい回路の論理設計, つまり, 多変数論理関数の単純化に興味を向けてきた。これは, LSI の設計に PLA がよく使われ, PLA は AND ゲート, および, OR ゲートを格子状に多数並べたものを接続して, ユーザが必要とする論理機能を AND, OR ゲート二段論理回路として実現して, 使用するからである。ところが, 最近, PLA にも NAND ゲートを格子状に多数並べたものが現れ, より規模の大きな NAND ゲート回路の論理設計法が必要となってきた。ひるがえって考えるに, P-N 項法は15年前に発表したものとはいえ, 非常に先駆的な方法である。それに, AND, OR ゲート二段論理回路の設計法の研究で培ってきた大規模回路に対処するノウハウが, いまや十分にあり, それと結びつけると, より多変数関数を扱える手法が容易に生み出せる。そのようなわけで, P-N 項法を, ここで論文としてまとめておくことは意義あることと考える。P 許容項から不要なセルを N 許容項で打ち抜くという考え方に基づく P-N 項法について詳述し, 計算機プログラムした結果も述べる。

### 2. P-N 項法による三段 NAND ゲート回路の論理設計

#### 2.1 方法

NAND ゲート回路の設計については, これまでいくつか発表されているが, 発見的方法であったり<sup>1)</sup>, 余りにも複雑であったりしている<sup>2)</sup>。ここに提案する P-N 項設計法は, 4ないし5変数程度までの論理関数を三段 NAND ゲート回路で実現するのに適した, 比較的簡単な手計算向きあるいは計算機向き設計法である。

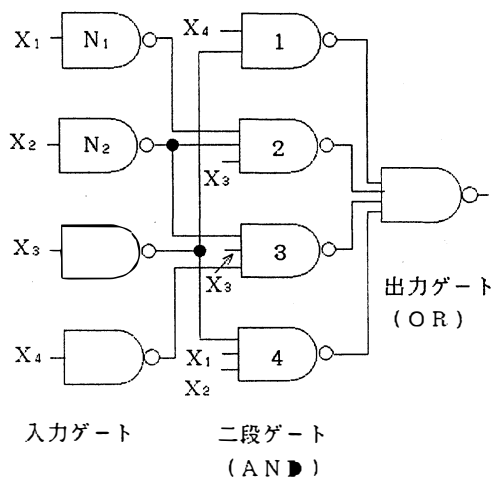


図1 三段 NAND ゲート回路

本論文を通じて、回路入力変数として否定変数を許さないものとする。また説明の便宜上、4変数の例について話を進める。任意のブール関数は図1のような三段 NAND ゲート回路で実現できる。右より出力ゲート、二段ゲート、入力ゲートという。このような三段 NAND ゲート回路では、等価的に出力ゲートは OR ゲートとして、また二段ゲートは AND ゲートとして働らく。従って、ある関数が図2のマッピング（カルノー図）（各セルの数字は入力変数の組み合わせ  $X_1X_2X_3X_4$  と表される二進数字を1の数の少ない順に、また同一の1の数を含むときは数値の小さい順に並べたときの順位番号を表し、

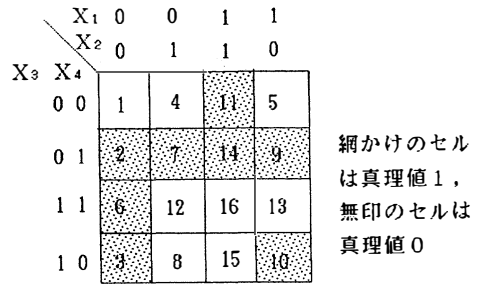


図2 マッピングのセル番号と関数  $F_1$  の例

網かけのセルで関数が真理値1 (true)、網かけのないセルで真理値0 (false) を表そう) で与えられたとした場合、NAND 回路の最も簡単な設計法は、Quine-McCluskey 法<sup>3)</sup>で主項のみからなる関数  $F_1$  を実現する最小被覆を求め、これらの主項を入力ゲート、二段ゲートで合成する方法である。本例では  $\bar{X}_3X_4$ ,  $\bar{X}_1\bar{X}_2X_3$ ,  $\bar{X}_2X_3\bar{X}_4$ ,  $X_1X_2\bar{X}_3$  が主項で図1のように実現できる。但し、この方法ではゲート数および入力線数を最小にする方針で設計されていない。P-N項法はこの点を考慮したもので、大抵の場合、この方法よりゲート数、入力線数の少ない回路が得られる。

入力変数  $X_1, X_2, X_3, X_4$  およびその否定  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_4$  をリテラルという。リテラルの論理積項、例えば  $X_1\bar{X}_2X_4$  を項という。リテラルを全く含まない1も項である。そこで許容項とは、否定のリテラルを含まない項のことで、4変数の場合、図3で示されているように  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_1X_2, \dots, X_1X_2X_3X_4$  の15個と  $f=1$ , つまり、マッピング全体と一致する項の計16個（一般に  $n$  変数では  $2^n$  個）あり、これらをマッピング上でみるとセル16（座標  $(1,1,1,1)$ 、これを  $C_n$  と表そう）を共通に含んでいる。これらの許容項だけが P (Positive 許容項の略) 項および N (Negative) 項になり得る。また、許容項は次のようにマッピングの各セルと対応づけて定義できる。例えば、図2のセル6の座標は  $X_1X_2X_3X_4=0011$  である。このとき、座標が1のリテラルの積項  $X_3X_4$  をセル6の許容項と

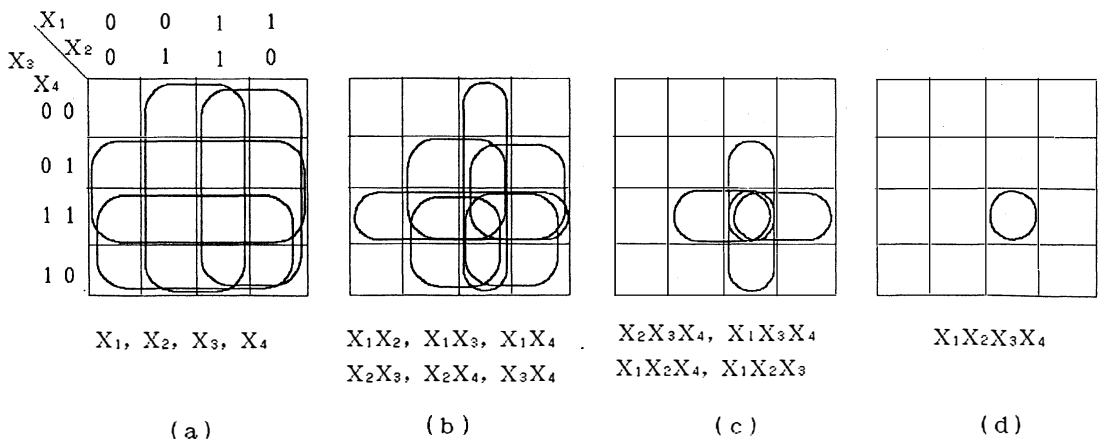


図3 4変数の許容項

呼ぶ。セルは16個あり、1から16まで、それぞれ許容項が対応する。

上記の例の主項  $\bar{X}_1\bar{X}_2X_3$  はマップ上真理値1のセル3, 6を表すが、これを図4のように、許容項  $X_3$  を許容項  $X_1$  および許容項  $X_2$  で打ち抜いたもの (他の文献では禁止とっている) と考えることができる。すなわち、 $X_3$  の含むセルのうち10, 13, 15, 16は  $X_1$  にも共通に含まれるので取り除かれ、8, 12, 15, 16は  $X_2$  にも含まれるので取り去られ、1のセル3, 6だけが残る。この操作をP項  $X_3$  をN項  $X_1$  および  $X_2$  で打ち抜くと呼び、記号  $P(X_3)N_1(X_1)N_2(X_2)$  で表そう。P-N項法はこの打ち抜きの概念に立脚したもので、P項1個につき1つの二段ゲートを要し、N項1個につき1つの入力ゲートを要する。いまの例ではP項  $P(X_3)$  に対して図1の2のゲートが対応し、

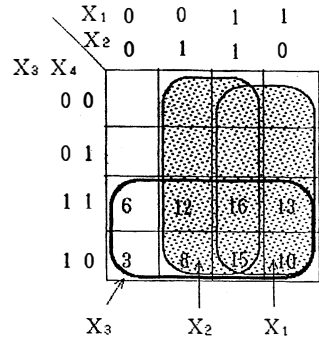


図4 許容項の打ち抜き

N項に対しては図1の  $N_1, N_2$  の入力ゲートが対応し、 $X_3$  が直接入力、 $X_1, X_2$  が入力ゲートを通してゲート2へ入力されている。代数的に  $\bar{X}_1\bar{X}_2X_3 = (\bar{X}_1\bar{X}_3)\bar{X}_2X_3$  であるから、P項  $X_3$  をN項  $X_1X_3$  および  $X_2$  で打ち抜いても、打ち抜きの効果は変わらない。このような関係にあるN項は互いに互換性があるといおう。P-N項設計法の例として図2の論理関数  $F_1$  を実現してみる。

### 2.2 【例題1】

(ステップ1) 図2の網かけ (true) のセルで最小番号は2である。そこで2のP項  $P_1(X_4)$  を取る。これで真理値1の2, 6, 7, 9, 14のセルが覆われるが、3, 10, 11は残る (図5(a))。この中で最小番号セルは3である。従って、3のP項  $P_2(X_3)$  を取る。これで新たに3, 10が覆われるが、11は残る。よって11のP項  $P_3(X_1X_2)$  を取る。これですべての真理値1のセルが覆われたのでステップ1は終る。いま3つのP項が得られたが、 $P_1(X_4)$  は12, 13, 16,  $P_2(X_3)$  は8, 12, 13, 15, 16,  $P_3(X_1X_2)$  は15, 16なる不要な (すなわち、真理値0の) セルを含んでいるので (図2, 図5参照) これらのセルを適当なN項を選んで打ち抜く必要がある。これが次のステップである。

(ステップ2) (I)  $P_1(X_4)$  に含まれる不要なセル12, 13, 16のうちで最小の番号セル12の許容項  $N_{11}(X_2X_3X_4)$  を取る。これによって12, 16が除かれるが13は残る。よって13のN項  $N_{12}(X_1X_3X_4)$  を取る。 $P_1(X_4)$  に含まれた不要なセルがすべて除かれたので次の許容項へ移る。(II)  $P_2(X_3)$  に

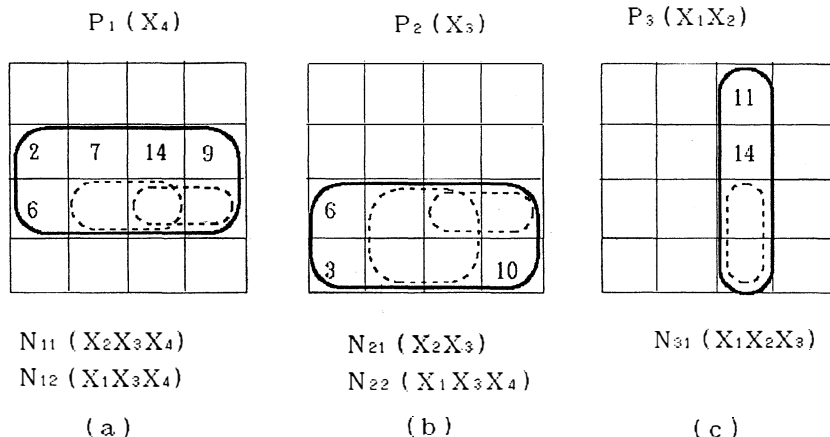


図5 P項から不要なセルをN項で打ち抜く例

含まれる不要なセル8, 12, 13, 15, 16についても同様に考えてN項  $N_{21}(X_2X_3)$ ,  $N_{22}(X_1X_3X_4)$  を選ぶ。(Ⅲ)  $P_3(X_1X_2)$  の不要なセルについても同様に考えてN項  $N_{31}(X_1X_2X_3)$  を取る。以上ですべてのP項からすべての不要なセルをN項によって取り除いた。しかも各P項に残っているセルは図2の関数  $F_1$  のすべての真理値1を含んでいるので関数が実現できたことになり、P-N項の選択は終る。

次の段階は図6のP-N項最小被覆表によって必要最小限のN項を選ぶことである。表は上欄にP項とそれを打ち抜くために必要なN項をすべて横に並べ、左側の欄に1以外の許容項を図の順序で縦に並べる。例えば、 $N_{31}(X_1X_2X_3)$  は  $X_2X_3$ ,  $X_1X_3$ ,  $X_3$  と交換性を持つので、 $N_{31}$  列、 $X_2X_3$ ,  $X_1X_3$ ,  $X_3$ , および  $X_1X_2X_3$  行に×印を書く。他の列についても同様である。できるだけ少ない許容項でN項をすべて被覆し、また、項数が同じなら、入力線数を小さくするためできるだけ上位の項を優先してとる。いまの例では、 $X_2X_3$  と  $X_1X_3X_4$  の2つですべてのN項が被覆されるのでこれらの行の×印に○印をつける。結局P-N項の組み合わせとして、 $P_1(X_4)N_{11}(X_2X_3)N_{12}(X_1X_3X_4)$ ,  $P_2(X_3)N_{21}(X_2X_3)N_{22}(X_1X_3X_4)$ ,  $P_3(X_1X_2)N_{31}(X_2X_3)$  が得られ、図7の論理回路が実現できる。

(例題終り)

この回路はゲート数6個、入力線数17で図1に比べ大幅に改良されたことがわかる。〔例題1〕は比較的簡単にできたが、一般には(ステップ2)で復活セルというものが見れ、N項の選択のさい、多少の判断を要する。次の〔例題2〕、図8でこれを示そう。

### 2.3 〔例題2〕

図8(a)が関数  $F_2$  の真理値表である。前例にしたがって、(ステップ1)、(ステップ2)を進めるとP項として  $P_1(1)$ 、N項として  $N_{11}(X_2X_4)$ ,  $N_{12}(X_2X_3)$ ,  $N_{13}(X_1X_4)$ ,  $N_{14}(X_1X_3)$  が得られる。この結果、これらのN項によって  $P_1(1)$  の項から真理値1のセル13, 14も取り除かれてしまう(図8(b))。そこでこれらのセルを実現するため再びP項を選ぶ(ステップ1)へもどる。このとき残された真理値13, 14だけの図8(c)のマップで行うと、 $P_2(X_1X_3X_4)N_{21}(X_1X_2X_3X_4)$ ,  $P_3(X_1X_2X_4)N_{31}(X_1X_2X_3X_4)$  なるP-N項が得られる。しかし、セル13, 14のP項を選ぶとき、すでに実現されている真理値1のセル2, 3, 4, 5, 6, 11(但し、 $P_1(1)$ を導いたセル1は除外)は真理値を0とみても1とみてもよい。これらのセルを復活セルと呼び、 $r$ とおくと図8(d)となる。この図で  $r_6=r_{11}=1$  とおいて13, 14を実現するP-N項を求めると、 $P_2(X_3X_4)N_{21}(X_2X_3$

	P <sub>1</sub>		P <sub>2</sub>		P <sub>3</sub>
	N <sub>11</sub>	N <sub>12</sub>	N <sub>21</sub>	N <sub>22</sub>	N <sub>31</sub>
X <sub>1</sub>					
X <sub>2</sub>			×		
X <sub>3</sub>					×
X <sub>4</sub>					
X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>					
X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>		×			×
X <sub>1</sub> X <sub>4</sub>				×	
X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>	⊗		⊗		⊗
X <sub>2</sub> X <sub>4</sub>					
X <sub>3</sub> X <sub>4</sub>					
X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>					×
X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> X <sub>4</sub>					
X <sub>2</sub> X <sub>3</sub> X <sub>4</sub>	×				
X <sub>1</sub> X <sub>3</sub> X <sub>4</sub>		⊗		⊗	
X <sub>1</sub> X <sub>2</sub> X <sub>3</sub> X <sub>4</sub>					

図6 P-N項最小被覆表

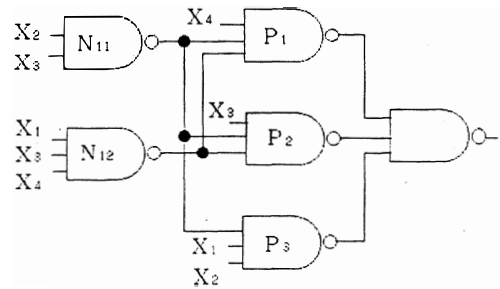


図7 簡単化された  $F_1$  の回路

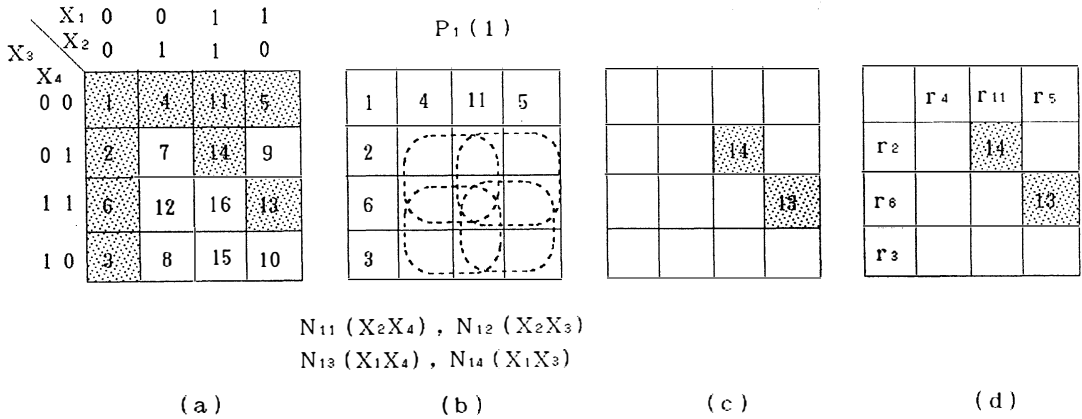


図8 復活セルがある関数 ( $F_2$ ) の例

$X_4$ ),  $P_3(X_1X_2)N_{31}(X_1X_2X_3)$  となる。図(c)で得たP-N項に比べ項が大きく入力線数ですぐれている。よって後者のP-N項を採用する。このあとP-N項最小被覆表を作って最小個数のN項を選ぶと次のように、 $P_1(1)N_{11}(X_2X_4)N_{12}(X_2X_3)N_{13}(X_1X_4)N_{14}(X_1X_3)$ ,  $P_2(X_3X_4)N_{11}(X_2X_4)$ ,  $P_3(X_1X_2)N_{14}(X_1X_3)$  となる。なお本例の回路図は省略する。(例題終り)

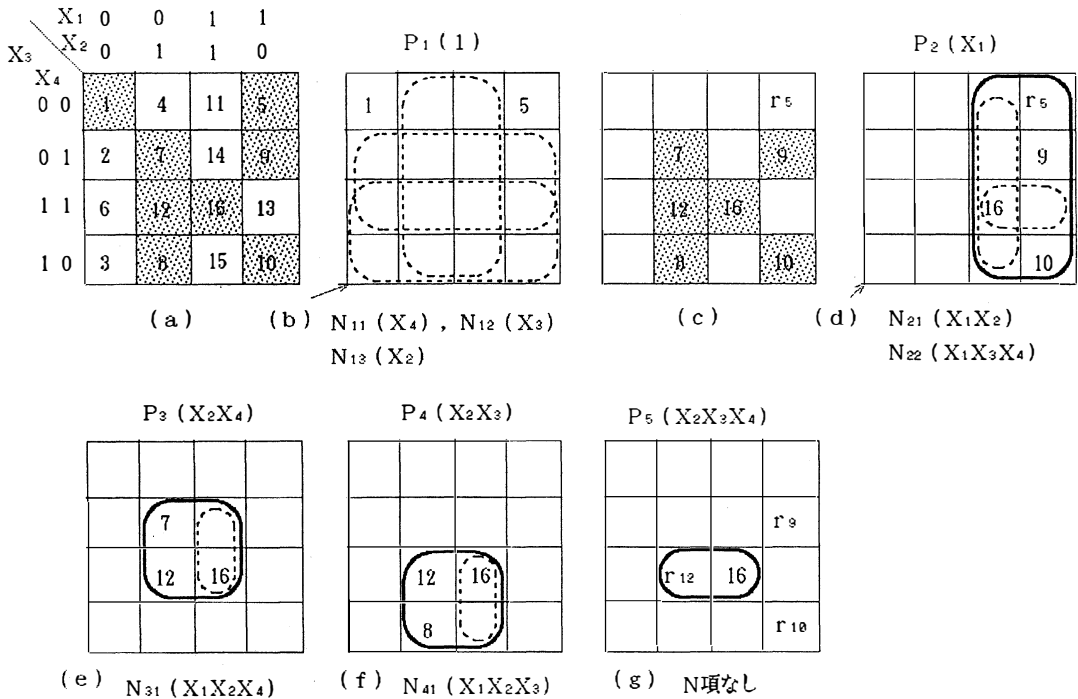


図9 P-N項法の例

## 2.4 P-N項法の計算機による設計法

本節では、P-N項法を用いて、関数の真理値表をデータとして計算機に与えたとき、最適な論理回路を出力として打ち出す自動設計プログラムの一つについて述べる。

図9(a)のような関数の真理値表が与えられたとする。そのとき、P-N項設計法のアルゴリズムをより一般的に述べると、次のとおりである。

(ステップ1) 真理値1のセルを全部覆うように、セル番号の小さい許容項から優先して  $P_1, P_2, \dots, P_m$  と生成する(例では図(b)の  $P_1(1)$ のみ)。このとき不要なセルを含めば、次の(ステップ2)へ行く。含まなければP-N項の選出の手順は終る。

(ステップ2)  $P_i (i=1, 2, \dots, m)$  が不要な真理値0のセルを含めばこれらを打ち抜くため、セル番号の小さい許容項から優先して  $N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{ij}$  とN項をとっていき、真理値0のセルをすべて取り除く(図(b)では  $N_{11}, N_{12}, N_{13}$ )。

さて、ここで各P項に残ったセルが与えられた関数値1のセルをすべて含めば、許容項選択の手順は終る。さもなければ(ステップ2)でN項により強制的に取り去られた真理値1のセルがあるはずで、これを実現するため再度(ステップ1)へもどる。この際、復活セルがあっても、まず、これを無視して(ステップ1)(ステップ2)を実行し、基本P-N項を選ぶ。これを  $P_0-N_0$  項と表そう。次に復活セル  $r_1, r_2, \dots, r_k$  を考慮して、0, 1の種々の組み合わせについて、各々(ステップ1)(ステップ2)を繰り返し、P-N項を得る。これを  $P_r-N_r$  項と表そう。基本  $P_0-N_0$  項と比較評価して良い方をとる。手計算ではマップ上で視覚判断する(例では図(c)で  $r_5=1$  とおくと、図(d), (e), (f)のP-N項が選ばれ、 $r_5=0$ とした基本P-N項よりP項の個数が1個減るので、こちらを採用する)。

ここまで行って、まだ実現されないセルがあれば、上記の手順を再び繰り返す。そしてすべての真理値1のセルがP-N項のどれかに含まれたとき、手順は終る(例ではもう一度行って、図(g)ですべてのセルが覆われる)。

次にP-N項最小被覆表を用いて、N項の最小被覆を求める。

以上のアルゴリズムを大まかな流れ図でかくと図10となる。

計算機設計のプログラムではマップはセルの数( $n$ 変数なら  $2^n$ 個)に等しい次元のブールベクトルで表現する。図9(a)の真理値表なら、 $TRF=(1000101111010001)$ となる。各セルの真理値0および1をセル番号の小さい順に左から右へ並べている。この方法によると、許容項  $X_2X_4$ (図9(e)参照)は7, 12, 14, 16のセルでのみ1となるので、左から7番目、12番目、14番目、16番目を1とした(0000001000010101)というベクトルで表現できるが、これはセル7

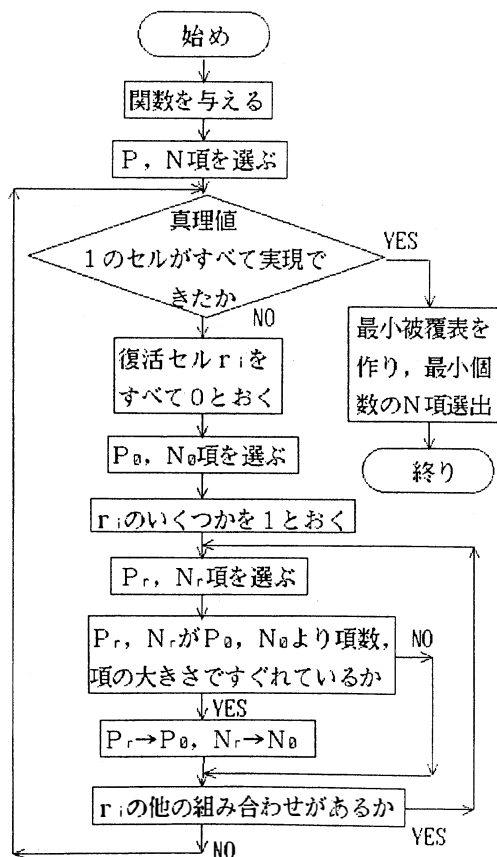


図10 P-N項法の流れ図

の許容項であるから、これを行列C(16, 16)の7行目におく。他の15個の許容項も同必要領でベクトルで表し並べたのが図11で、許容項行列と呼ぶ。計算機設計では、これがP-N項の打ち抜きに本質的な役割をする。P項 $P_3(X_2 X_4)$ は計算機では $P(3)=7$ としておく。 $X_2 X_4$ についての情報が欲しければ行列Cと結びつけて $C(P(3), K)=C(7, K)$ , ( $K=1, 2, \dots, 16$ )によっていつでも得られる。N項も同様に表す。例えば、 $N_{21}(X_1 X_2)$ (図9(d))なら $N(2, 1)=11$ とする。P項の数は4変数の場合で高々 $8=2^{4-1}$ (一般に $2^{n-1}$ )個であり、各P項1個につき必要とするN項の数は高々 $4=2^{4-2}$ (一般に $2^{n-2}$ )個である。従って、これらの項にはDIMENSION P(8), N(8, 4)なる配列を用意すれば十分である。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

図11 許容項行列 C(16, 16)

図12は出力の一部を示す。(1)のTRFが与えられた関数(図9(a)参照), (2)のPは第一回目の許容項の生成で得られたP項で $P(1)=1, P(2)=\dots=P(8)=0$ (0は許容項なしの意味), 続くNから右が4つつづ\*印でN項が仕切れ、 $N(1, 1)=2, N(1, 2)=3, N(1, 3)=4, N(1, 4)=0, N(2, 1)=0, N(2, 2)=0\dots$ と並ぶ(図では途中で打ち切っている)。(3), (4)のTF3はこのP-N項によって実現されたセル, TF2は除かれた真理値1のセルを表す(ここまでは図9(b)に相当)。(5)はこのTF2の真理値1のセル(図9(c)参照)を実現するための第二回目のP-N項選択で得られた基本P項, N項, すなわち $P_0-N_0$ 項を示す。(6)のTF4はこのとき5に復活セルがあることを示している。TF2にさらに $r_5=1$ としたのが図中(7)のTFEである(図9(c)で $r_5=1$ としたもの)。このTFEに対してP-N項の選択が行われたのが(8)のPでこの部分をもう少し説明してみる。すでに、 $P(1)=1$ が求まっているのでTFE(図9(c)参照)では、まず2番目のP項を求めることになるが真理値1の最小のセル5により、 $P(2)=5$ と置く、次に $P(2)$ を反転(否定ベクトル)させるため $(1-C(P(2), K))=(1111011100010000)$ を求め、これとTFEとをかけてTLと置くと7, 8, 12セルだけが1で他が0のベクトルとなる。これはTFEの真理値1のセル7, 8, 12がまだ覆われずに残っていることを意味する。最小のセル7により第3のP項として $P(3)=7$ と置く。続いて $(1-C(P(3), K))$ とTLとをかけ、結果をまたTLと置く。今度はTLは8セルだけが1となっている。第4のP項は $P(4)=8$ と取る(このあたり、図9(d), (e), (f)に対応)。(8)のP5, 7, 8はこのように求めたものである。不要なセルを取り除くためのN項の選択も同様な考え方で行っている。(8)のP-N項と(5)の基本 $P_0-N_0$ 項と比較評価され、これが有利と判定されて入れ替わる。(1)~(8)のパターンがCOUNT2以後もう一度繰り返されて(9)ですべてのP-N項が求まる。(10)は $P(5)$ がN項をもたないことを表示している(項はキューブ, CUBEともいわれる)。

```

INDEX 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
(1) P0RF 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1
COUNT 1*****
P 1 0 0 0 0 0 0 0 0 N 2 3 4 0* 0 0 0 0*
(2) P 1 0 0 0 0 0 0 0 0 N 2 3 4 0* 0 0 0 0*
(3) TF2 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1
(4) TF3 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
P0FSUM 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
(5) 7 8 9 10 0 0 0 0 N 14 0 0 0*15 0 0 0*13 14 0 0*13 15
KO= 0 TFE 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1
(6) TF4 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
KO= 1 (7)TFE 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1
(8) P0 5 7 8 0 0 0 0 0 N 11 13 0 0*14 0 0 0*15 0 0 0*
COUNT 2** *****
P 5 7 8 0 0 0 0 0 N 11 13 0 0*14 0 0 0*
P 5 7 8 0 0 0 0 0 N 2 3 4 0*11 13 0 0*
1 .
. (この間省略)
.
COUNT 3*****
P 12 0 0 0 0 0 0 0 N 0 0 0 0* 0 0 0 0* 0 0 0 0* 0 0
(9) P 1 5 7 8 12 0 0 0 N 2 3 4 0*11 13 0 0*14 0 0 0*15 0
(10)PCUB(5) HAS NO NCUBE
    
```

図12 出力(1)

次に計算機は自動的に図13のP-N項最小被覆表を作り、最小被覆を求めてくれる(図13の(11) NEED 1)。同図(12)は計算機が最適として選んだP-N項で、P項を二段目ゲート、N項を入力ゲートとして作図すれば、論理回路が得られる。

計算(CPU)時間は復活セルの多いもので数10秒、通常の間数では1秒未満であった。但し、FACOM 230-45Sによるデータである。現在の富山大学情報処理センターのIBM 3081-KX 4を使えば、これらの計算時間の1/30ぐらいで求まると思われる。

### 3. ま と め

三段 NAND ゲート回路の設計法として、P-N項法について述べた。この方法では、 $n$ 変数関数がマップで真理値として、与えられていると仮定している。マップには $2^n$ 個のセルがあり、これらに我々独自の方法で番号付けを行う。すると、許容項がセル番号の順序で大きなものから発生できるようになる。このため、P-許容項を生成して、その中の不要なセルをN-許容項を生成して取り除くという基本操作の繰

```

PCUBE      1 1 1 2 2 3 4
NCUBE      1 2 3 1 2 1 1
( 1) 1      0 0 0 0 0 0 0
( 2) X4     1 0 0 0 0 0 0
( 3) X3     0 1 0 0 0 0 0
( 4) X2     0 0 1 1 0 0 0
( 5) X1     0 0 0 0 0 1 1
( 6) X3X4   0 0 0 0 1 0 0
( 7) X2X4   0 0 0 0 0 0 0
( 8) X2X3   0 0 0 0 0 0 0
( 9) X1X4   0 0 0 0 0 1 0
(10) X1X3   0 0 0 0 0 0 1
(11) X1X2   0 0 0 1 0 1 1
(12) X2X3X4 0 0 0 0 0 0 0
(13) X1X3X4 0 0 0 0 1 0 0
(14) X1X2X4 0 0 0 0 0 1 0
(15) X1X2X3 0 0 0 0 0 0 1
(16) X1X2X3X4 0 0 0 0 0 0 0

(11) NEED1  2 3 4 4 6 5 5
    
```

```

1 ( X4)' ( X3)' ( X2)'
X1 ( X2)' ( X3X4)'
(12) X2X4 ( X1)'
      X2X3 ( X1)'
      X2X3X4
    
```

各行最初はP項、( )'がN項

図13 出力(2)



り返しである本方法は計算機で容易に実行可能となる。

プログラム化にあたっては、関数を（サイズ  $2^n$  の）ブールベクトルで表したことを、許容項を配列を使って生成する仕組み、アルゴリズムの進行にともなう各ステップでのデータの変化の様子を計算機出力を用いて、詳しく述べた。

本方法では  $2^n$  の大きさのブールベクトルを用いるので、余り大きな回路には適用できない。多変数向きの手法については別途報告する。

#### 参考文献

- 1) G. A. Maley and J. Earle: The Logic Design of Transistor Digital Computers, John Wiley (1963).
- 2) J. F. Gimpel: The Minimization of TANT Networks, IEEE Trans. Electron. Comput., **Vol. EC-16**, No. 1, pp. 18-38 (1967).
- 3) E. J. McCluskey: Minimization of Boolean functions, Bell Syst. Tech. J., **35**, 5, pp. 1417-1444 (Nov. 1956).

昭和51年度、52年度電気四学会北陸支部連合大会で一部発表

# The Logical Design of Minimal Three-level NAND Circuits ( I )

## — P-N cube method —

Hideo MATSUDA, Takashi MIYAGOSHI, Toyomasa HATAKEYAMA

In this paper, we propose the P-N cube method for logical design of three-level NAND circuits. There are  $2^n$  permissible cubes on the map for  $n$ -variable functions. We number all the permissible cubes in a unique manner that the permissible cube may be generated in order of its size. This strategy for generating the cubes make P-N cube method very efficient, because the following procedure is used repeatedly in the method; first some P-(permissible) cubes are selected to cover all 1'-minterms on the map, and then 0'-minterms get mixed with those 1'-minterms are deleted by using some N-(permissible) cubes from each P-cube. In the program, the function is represented as a  $2^n$ -dimensional Boolean vector and permissible cubes are generated with a particular array of  $2^n \times 2^n$  size. Also how to change the shape of data at each step of progress of the algorithm is explained by the output results of a computer.

[英文和訳]

# 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について ( I )

## — P-N 項法 —

松田 秀雄, 宮腰 隆, 畠山 豊正

本論文で、我々は三段 NAND ゲート回路の論理設計法として、P-N 項法を提案している。 $n$  変数の関数のマップには  $2^n$  個の許容項がある。すべての許容項に許容項が大きさの順序で生成出来るよう我々独自の方法で番号付けを行なっている。項生成のこの方法によって、P-N 項法は大変効率的となる。というのは、最初にマップ上のすべての 1 の最小項がカバーされるように、いくつかの P (許容) 項が選ばれ、それから 1 の最小項と混ざって入った 0 の最小項がいくつかの N (許容) 項を使って、各 P 項から取り除かれるという手順が本方法で繰り返されるからである。プログラムにおいて、関数は  $2^n$  次元ブールベクトルとして表され、許容項は大きさ  $2^n \times 2^n$  のある特別な配列でもって生成される。また、アルゴリズムの進行の各ステップで、データがどのように変わるかも計算結果を使って説明される。

# 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について (II)

## — P-N 項法の改良 —

宮腰 隆, 松田 秀雄, 大澤 一人, 畠山 豊正

### 1. はじめに

本号の先の論文で, 三段 NAND ゲート回路の計算機援用設計法の一つとして, P-N 項法<sup>1)</sup> を発表した。P-N 項法はどのような関数も三段 NAND ゲート回路で実現するため, 必ずしも最適な回路が得られるとは限らない。本論文では, まず, はじめにそのような回路の例を挙げて検討し, その改良法を述べる。

次に, 計算機プログラムする際, 項表現法を用いることについて述べる。先の論文では, 真理値表をそのまま, ブールベクトルで表した。この方法によると, 関数の否定を求めるときなど, 各ビットの 0 と 1 を反転させるだけで得られるという簡単な面もあるが, 次のような記憶量の上での難点がある。すなわち,  $n$  変数の関数を表すブールベクトルのサイズは  $2^n$  となる。また, P-N 項法では, 真理値表に基づく方法では許容項行列のために  $2^n \times 2^n$  のサイズの記憶量を要し, P-N 項最小被覆表にも  $2^n$  に比例した記憶量が必要となる。 $n$  が大きくなると,  $2^n$  という数量は著しく大きくなり, 20 変数, 30 変数といった関数は到底扱えない。そこで, 項表現を用いて, P-N 項法を改良する手法を述べる。

最後に, 改良した方法をプログラム化し, 最近発表された他の方法と比較し, 非常に早く回路が求まることを示す。

### 2. P-N 項法の改良

#### 2.1 3変数関数での検討

P-N 項設計法については既に文献 1) で詳述した。ここでは簡単な例により手法のあらましを述べるにとどめる。図 1 の真理値の関数が与えられたとする。図中網かけのセルが true で, セルの数字は入力変数の組み合わせ  $X_1 X_2 X_3$  を 2 進数字とみて 1 の数の少ない順に, また同一のときは数として小さい順に並べたときの番号である。許容項とは否定変数を含め論理積項で,  $X_1, X_2, X_3, X_1 X_2, X_1 X_3, X_2 X_3, X_1 X_2 X_3$  と 1 (全項) の 8 ( $n$  変数関数の場合で  $2^n$ ) 個ある。これらはすべてセル 8 (座標 (1, 1, 1)) を含む。図 1(a) の網かけセルで最小の数 2 を通る P (許容) 項  $X_3$  を選ぶ。これで 2, 5, 8 がカバーされる (図 1(b))。残った網かけセル 4 で, 4 を通る P 項  $X_1$  をとる (図 1(c))。これらを  $P_1(X_3), P_2(X_1)$  と表す。これで網かけセルをすべてとりつくしたが, P 項  $P_1(X_3)$  がセル 6 を,  $P_2(X_1)$  がセル 6, 7 とそれぞれ不要なセルを含むので, これらを N 項で打ち抜く。 $P_1(X_3)$  は 6 を通る N 項  $X_1 X_3 (N_{11}(X_1 X_3))$  と表現,  $P_2(X_1)$  は 6 を  $X_1 X_3$  で, 7 を  $X_1 X_2$  の各 N 項で打ち抜く (図 1(b), (c) の点線の囲み)。ところがこの結果セル 8 まで除去されてしまったので, これを実現すべく, 再び P 項をとるが, 5 を復活させて,  $X_2 X_3$  を選ぶ (図 1(d)), 図

中の  $r_5$  は復活セル)。これですべての網かけセルが実現できたので第一段階である P-N 項の選択は終る。

次の段階は、各 P 項が必要とする N 項間の互換性を利用して、最小個数の N 項を選ぶ。これは最小被覆問題を解くことになる。本例では、上で求めた N 項のうち  $N_{22}(X_1, X_2)$  だけが  $N_{22}(X_2)$  に変わる。得られた P-N

項の組み合わせは  $P_1(X_3)N_{11}(X_1, X_3)$ ,  $P_2(X_1)N_{21}(X_1, X_3)N_{22}(X_2)$ ,  $P_3(X_2, X_3)$  となり、P 項を二段ゲート、N 項を三段(入力)ゲートで構成して図 4(a)の回路が実現できる。

P-N 項法は多変数関数の設計にも適用できるが、3 変数関数については既に Hellerman<sup>2)</sup> によって(ゲート数、総入力線数の最小化という意味で)最適な回路が表となって発表されている。そこで本方法で得られた回路と Hellerman の表とを比較すれば、有効性が明らかとなるので、以下 3 変数関数について検討する。なお本節で最適回路といえは、Hellerman の表の回路を指すものとする。

3 変数関数は  $2^8 = 256$  個ある。このうち入力変数の置き換えによって一致する関数を区別しないとすれば 80 個の関数で代表できる。このうちさらに恒等的に 0 および 1 となる 2 つの関数も特殊なので除外する。78 個の関数を P-N 項法で設計した回路と最適回路とを比較検討した結果は一致した回路

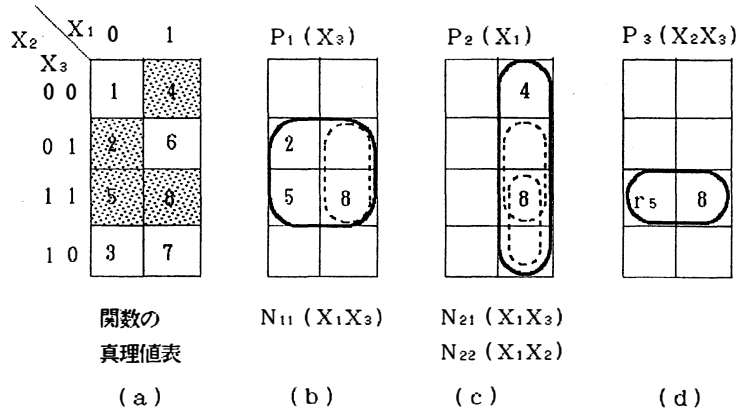


図 1 P-N 項法の例

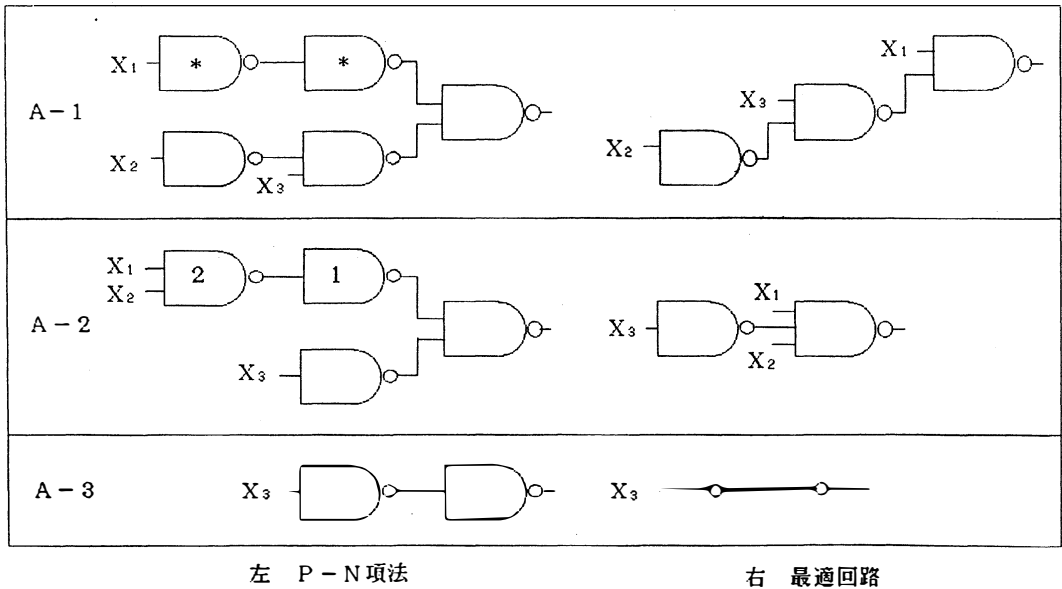


図 2 A の型の回路

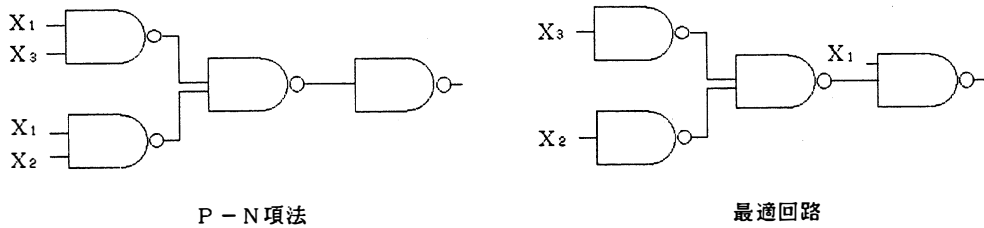


図3 Bの型の回路

が51個、相違した回路27個（内訳(I)ゲート数が2多くなった回路11, (II)ゲート数が1多くなった回路6, (III)入力線数が1~2本多くなった回路10)であった。相違した回路を誤りの型（最適でないという意味）で分類すると次のA, B, Cの3つにわかれる。

Aの型は図2のようにさらに3つに细分できる。A-1はセル1のP項があって、それを打ち抜くN項が1変数の場合で\*印のゲートのように冗長な部分回路が現れる。これを単純化すると最適回路となる。この種の回路は6個ある。A-2の回路はセル1のP項があって、それを打ち抜くN項が他のP項に利用されない場合で、図中番号2のゲート入力変数を直接出力ゲートへ加えると、最適回路となる。これに類似の回路は3個ある。A-3の回路はP項  $X_3$  がN項をもたないので、このためのゲートと出力ゲートが組み合わされて除去できる。この種の回路は1個ある。

Aの型の誤りは三段 NAND 回路の設計に特有なもので、この設計法が出力ゲートと少なくとも1個のP項が存在するという前提がなされていることにより生ずる。この種の誤りは分類説明文中の処理を行うようプログラムの一部を若干修正して正すことができる。

次がBの型で図3で示した回路である。P項がセル1の許容項で、これを打ち抜くいくつかのN項に共通な変数  $X_1$  がある。この場合、共通入力変数  $X_1$  を直接出力ゲートへ入れて入力線数の節約ができる。このような回路は2個ある。

あと一つがCの型で、図4の例のように最適回路では四段ゲート回路となる。この種の回路は15個ある。

P-N項法は論理関数を高々三段のゲート回路で実現しようとするもので、これまでの方法ではCの型の最適回路は得られない。しかし、以下に述べる関数変換の技法を用いると、四段回路も実現で

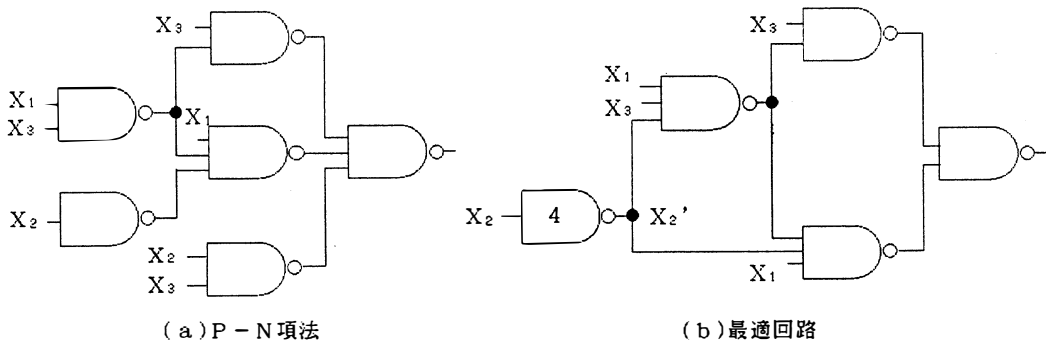


図4 Cの型の回路

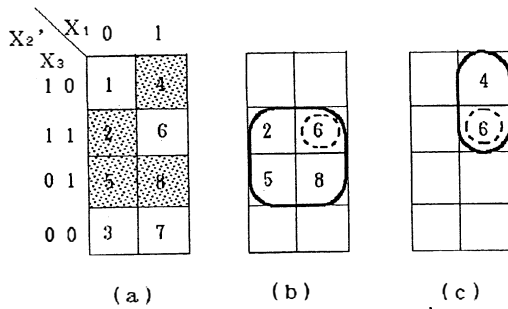


図5 許容項の変換

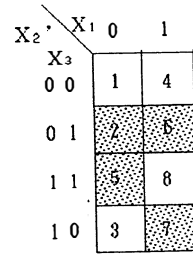


図6 関数の変換

き、Cの型の誤りをかなりの数まで正せる。またこの方法でBの型の誤りも除去できる。

ここで図1(a)の関数について考える。P-N項法ではセル8(座標(1, 1, 1))を中心に考え、必ずこのセルを含む許容項で、PおよびN項を選んだ。しかし、いま何らかの方法でP項として、項{2, 5, 6, 8}と{4, 6}をとり、これを{6}なるN項で打ち抜ければ(図5(b), (c)参照)、前述の方法に比べ少ない個数の項で網かけのセルがすべて実現できることに注目する。各項1個が回路のゲート1個に対応するので、このほうが最適化に有利である。これにはセル6を中心に考えセル6を含む許容項を考えればよい。図5(a)は図1(a)のカルノー図を変数変換 $X_2' = \bar{X}_2$ ( $X_2$ の否定)としたものでセル6が座標(1, 1, 1)に変わっている。つまりセル8の代わりにセル6を含む項を得るには、セル6を表す2進数 $(X_1, X_2, X_3) = (1, 0, 1)$ に応じて、 $X_1 \rightarrow X_1'$ ,  $\bar{X}_2 \rightarrow X_2'$ ,  $X_3 \rightarrow X_3'$ とすればよいことがわかる。これをセル6による許容項の変換と呼ぼう。このように約束すると、セル8の変換は $X_1 \rightarrow X_1'$ ,  $X_2 \rightarrow X_2'$ ,  $X_3 \rightarrow X_3'$ 、すなわち恒等変換に相当する。さてこの変換した許容項を用いる以外ではさきのP-N項法と全く同じように設計手順を進めればよい。図5では2個のP項 $P_1(X_3)$ ,  $P_2(X_1 X_2')$ と1個のN項 $N_{11}(X_1 X_2' X_3) = N_{21}(X_1 X_2' X_3)$ が選択される。これらを二段および三段ゲートで実現することも同じである。ただし、 $X_2' = \bar{X}_2$ を得るための否定ゲートが四段目に現れる点が異なってくる。いまの場合、回路図は図4(b)で、図中番号4のゲートが否定ゲートを表す。この回路が与えられた関数(図1(a), 図5(a))の最適回路となっている。このようにセル8以外のセルを中心とする許容項でP-N項を選出することにより、よりよい回路が得られることがある。ところで、いまの操作は関数を固定して許容項を変換した。このことは許容項を固定して、関数をセルで変換しても同一の効果を得る。図6は図1の関数をセル6で変換、 $X_1 \rightarrow X_1'$ ,  $\bar{X}_2 \rightarrow X_2'$ ,  $X_3 \rightarrow X_3'$ した真理値表である。この図でセル8を含む許容項でP-N項選択すれば、この場合も図4(b)の回路が実現できる。プログラムではあとの処理法を採用している。関数が与えられると、セル8からセル1まで順次関数を変換し、その都度P-N項選択をして、最良の回路を見出すようにする。このとき四段否定ゲートが二段、三段ゲートと誤りの型Aで見たような接続関係を生ずることがあり、不要なゲートを取り除く操作も加味する必要がある。

以上述べたように、誤りの型Aを除去する対策と、関数変換の技法をP-N項法のプログラムに追加した結果、78回路中73個までHellermanの最適回路と一致した。なお計算時間は1分21秒で使用計算機はFACOM 230-45Sである。

## 2.2 項表現によるP-N項法の改良

前節(あるいは文献1))のP-N項法の計算機プログラムでは、関数は真理値表そのものをブールベクトルで表す方法をとっているため、 $2^n$ の大きさの配列が必要となった。また、許容項も関数と同

じ形式で表現するので、 $2^n$  のサイズの配列が必要となった。

ところが、関数は項  $C_i (i=1, 2, \dots, t)$  の論理和

$$F = C_1 + C_2 + \dots + C_t \quad (1)$$

の形で与えられるので、ここでは項表現を使う。但し、項とは、例えば  $C_p = X_1 X_2$  や、 $C_q = \bar{X}_1 X_3 \bar{X}_4$  のように入力変数  $X_j$ 、あるいは  $\bar{X}_j$  (これらをリテラルという)、( $j=1, 2, \dots, n$ ) の積項で表される。但し、恒等的に 1 をとる変数は省略してよい。

これらの項はマップで表すと図7のように、複数個のセルを含んでいる。これらの項がもし、関数  $F$  に含まれておれば、図7の項の中のセルは関数値 1 となる。もし、 $F$  の否定  $\bar{F}$  に含まれれば、同じセルは関数値 0 とみなす。

4 (一般に  $n$ ) 変数の場合、4つのリテラルが全部現れる項、例えば  $m_0 = \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$ 、 $m_{12} = X_1 X_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$ 、 $m_{15} = X_1 X_2 X_3 X_4$  などはマップの1つのセルを表し、最小項という。肯定のリテラルを 1 で、否定のリテラルを 0 で置き換えると、 $m_0 = (0000)$ 、 $m_{12} = (1100)$ 、 $m_{15} = (1111)$  と4桁の2進数字となり、それぞれ10進数に換算すると  $m_0$  は 0、 $m_{12}$  は 12、 $m_{15}$  は 15 となる。これらの例のように 16 (一般に  $2^n$ ) 個ある最小項 (あるいはセル) は 0 から 15 までの番号をふることができる (図8)。

また、最小項  $m_0$  に許容項 1 (マップ全体)、 $m_{12}$  に許容項  $X_1 X_2$ 、 $m_{15}$  に許容項  $X_1 X_2 X_3 X_4$  すなわち、一般に最小項  $m_i$  に  $m_i$  の肯定のリテラルのみを残した項を許容項として対応させて、最小項 (あるいはセル)  $m_i$  の許容項と呼ぶ。

セルに対するこの番号付けはこれまでの P-N 項法のセルの番号付けと異なってくる。しかし、各セルの許容項の定義には変わりはない。ただ、前の P-N 項法ではセル番号の小さな許容項程、(含むセルの数の大小で比較して) 大きい許容項であるという性質になっていたが、新しい番号付けでは、必ずしもこの性質は成り立たない。しかし、各最小項  $m_i$  の否定のリテラルの数  $d_i$  を算出しておいて、この  $d_i$  の大きな (同じなら、2進数として小さい) 最小項 (あるいはセル) の許容項から生成すると、より大きな許容項から生成できる。

更に、項  $C_i$  に対し、 $C_i$  に陽に現れていない変数の否定のリテラルを  $C_i$  に付け加えた項  $C_{imin}$  を項  $C_i$  の最小番号の最小項と呼ぶ。 $C_i$  が  $\bar{X}_1 X_2 X_3$  なら  $C_{imin}$  は  $\bar{X}_1 X_2 X_3 \bar{X}_4$  であり、 $C_i$  が  $X_1 \bar{X}_3$  なら  $C_{imin}$  は  $X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \bar{X}_4$  となり、図9に\*印で示したセルがそれぞれの項に含まれるセルのうち、最小番号の最小項 (セル) を表す。

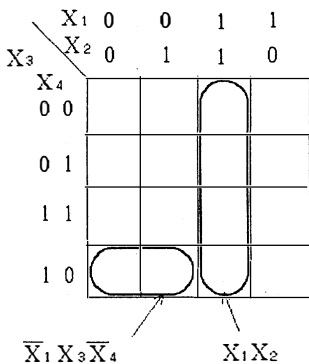


図7 項 例

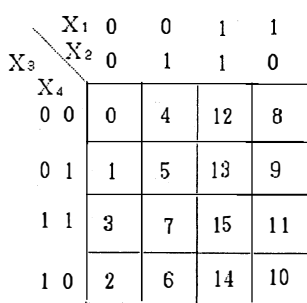


図8 改良 P-N 項法のセルの番号付け

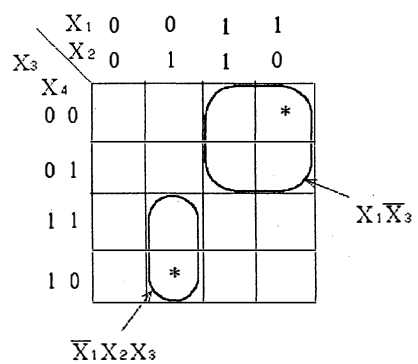


図9 最小番号の最小項

さて、項表現による改良P-N項法の基本的な手法は次のとおりである。

関数 $F$ が式(1)のように項表現で与えられているとする。 $F$ の否定 $\bar{F}$ を求める。初め、 $r=1, e=1$ とする。また、 $F^e$ は $e$ が偶数なら $F$ 、 $e$ が奇数なら $\bar{F}$ をそれぞれ表すものとする。

『 TANT( $f, r, e$ )

〔許容項の生成法〕により $m$ 個の許容項 $P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_{r+m-1}$ が生成したとする。

各許容項 $P_k$  ( $k=r, r+1, r+2, \dots, r+m-1$ )について、以下の操作を行う。

$$f_k = P_k \cap F^e$$

$f_k$ が $\phi$ (空)ならRETURN。

$f_k$ が $\phi$ でなければ、 $r=r+m, e=e+1$ とにおいて、

TANT( $f_k, r, e$ )を呼ぶ。

但し、

〔許容項の生成法〕 $j=r$ とおく。

1)  $f=C_1+C_2+\dots+C_t$ とし、各項 $C_i$  ( $i=1, 2, \dots, t$ )の最小の値の最小項 $C_{imin}$ を求める。また、 $C_i$ に含まれる否定のリテラル数 $d_i$ を算出し、その数が最大の $C_{imin}$ (複数列個あれば、番号の小さい方の最小項)を選んで $C_j$ とする。

2) セル $C_j$ の許容項を生成する。これを $P_j$ とする。 $f \oplus P_j$ の結果の関数をあらためて $f$ とする。 $f$ が $\phi$ なら許容項の生成はこれで終る。そうでなければ、 $j=j+1$ として、ステップ1)へいく。』

但し、手順中許容項の添字は許容項が生成されるごとに順次増えるように書いたが、実際は次のようにする。TANTの手順中、 $e$ が奇数の時生成した $m$ 個の許容項はP-項であり、呼び出しごとに生じた数だけ添字を増やしていく。 $e$ が偶数の時生成した許容項はN-項で、これはその都度生じた許容項の数だけ $N_{k1}, N_{k2}, \dots, N_{km}$ とする。但し、添字 $k$ は一つ先の呼び出しで作られた関数 $f_k = P_k \cap F^e$ の添字に合わせる。こうして得られた一連の項を基本 $P_0$ - $N_0$ 項と呼ぼう。

ここで、上記手順TANTの呼び出し手順中 $e$ が3以上の奇数の時、次のようにP-N項の数を減らしたり、より大きな項を含むようにするため、次の許容項の拡大操作を行う。

〔許容項の拡大〕TANTの手順によって、 $m$ 個のP-項 $P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_{r+m-1}$ が生成されたとする。 $F$ に含まれる項を適当に加えて、より大きな許容項 $P'$ を作り、 $P'$ に含まれる $P_r, P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_{r+m-1}$ を取り除く。但し、 $P'$ はそれまでに生成されていない許容項とする。このような許容項の組に対し、さらにN-項を選ぶTANTの手順を続けると、別のP-N項が選ばれる。

基本 $P_0$ - $N_0$ 項と比較して、コストの小さい方を採用する。この拡大操作は、さらに奇数の $e$ で生じたP-項があるごとに行う。

上記手順中現れたディスジョイント・シャープ演算 $\oplus$ とは、関数 $f$ から、ある項 $C$ ( $C$ は $f$ に含まれているかどうかわからない)を取り除くとき使われる<sup>3)</sup>。 $f \oplus C$ によって、 $f$ に含まれる最小項で $C$ にも含まれる最小項は全部取り除かれ、残りの $f$ の最小項のみを含む項の和として表される。

また、 $F$ の否定 $\bar{F}$ を求めるプログラムも必要である。前のP-N項法では、例えば関数がブールベクトル(110100110111)で表していたので、その否定は $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$ として(001011001000)とすぐに求まった。項表現の関数では、特に変数の数 $n$ が大きい場合の否定を求めるプログラムは難しく、我々はそれを所有している。

項は計算機上次のように表している。例えば、 $X_1X_3X_4$ なら01-11-01-01であり、 $\bar{X}_2X_3\bar{X}_4$ なら11-10-01-10である。すなわち、一つのリテラル $X_j$ を表すのに2ビットを使い、 $X_j$ なら01、 $\bar{X}_j$ なら10、陽に現れなければ11で示す。また、左より変数 $X_1, X_2, X_3, X_4$ と各2ビットずつ割り当て



ている。このため、1ワードで16変数の項が表されて、2ワードつないで32変数、7ワードで100変数の項が表される。項表現では最小項ではなく、もっと大きな項で与えられるので、関数の項数は $2^n$ より、ずっと小さい。故に改良P-N項法が多変数まで適用可能となる。

更に、前のP-N項法では、すべての許容項をあらかじめ用意して持っているため $2^n \times 2^n$ の記憶量が必要となったが、許容項は必要な都度生成することにする。また、P-N項最小被覆表も行数として $2^n$ 個あらかじめ用意していたのを、P-項と、そのN-項をみれば互換性のある許容項が即時生成できるので、必要な都度、許容項を発生させるようにして、記憶量の節減が可能である。

	$X_1$	0	0	1	1
	$X_2$	0	1	1	0
$X_3$	$X_4$	0	0	1	1
	0 0	0	4	12	8
	0 1	1	5	13	9
	1 1	3	7	15	11
	1 0	2	6	14	10

図10 関数 NO.7 の真理値

### 2.3 計算結果と他の方法との比較

項表現によるP-N項法は、多変数に適用するにはまだ、いくつかプログラム化の段階で完成していない点があり、ここでは4変数の関数で実行した結果について、後藤が提案した方法<sup>4)</sup>(以下行列法と記す)と比較する<sup>5)</sup>。

行列法では、被禁止用許容ループ行列と禁止用許容ループ行列を用いて三種類の主許容項(否定主許容項, 肯定主許容項, 禁止付き主許容項)を求め、それらの最小被覆の中から最小回路を得ている。我々はこの度、この手法をFORTRANでプログラム化した。

表1は、 $n$ (入力変数の数) = 4の関数20個を生成し、ゲート数(G)と入力線数(IN)を比較したものである。この表では関数は、4変数の最小項を0, 1, 2, ..., 15のように昇順に並べ、真理値(0または1)を対応する最小項に記入したビット列を16進数に変換した数字で表示している。例えば、表中NO.7の関数は、図10の真理値表で表される関数で(網かけの最小項で関数値1, それ以外は0), 最小項のセル番号順に真理値を並べると、0101-1101-1111-1100であり、それぞれ4ビットずつ区切って16進数で読むと5DFCと表される。その他の関数も同様の方法で、もとの真理値を表したものである。表1では最小回路と一致する場合には何も記入せず、一致しない場合のみ(G, IN)を記入してある。なお、NO.7の関数をそれぞれの方法で実行して回路図にかくと、行列法では図11, 本方法では図12となる。

以下に、二つの方法の比較を要約しよう。

(1) 行列法は、最小項をカバーする最小被覆のすべてを求める厳密かつ複雑な方法なのでほとんど

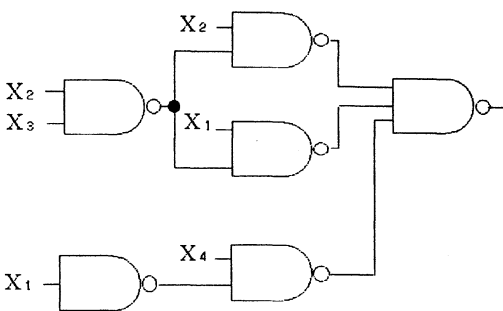


図11 関数 NO.7 の行列法による回路構成

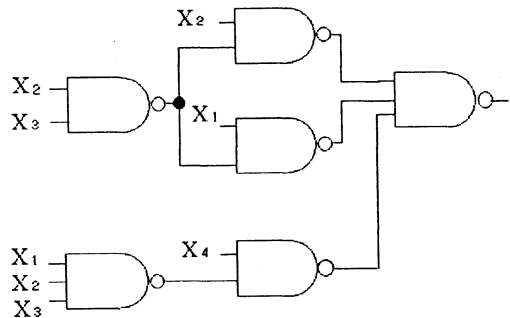


図12 関数 NO.7 の本方法による回路構成

最小回路と一致する。これに  
対して、本方法は多変数の関  
数にまで適用しようとしてい  
るので、方法が簡略でありな  
がら、行列法とはほとんど差  
のない良い回路が求められる。

(2) 行列法は、被禁止用許  
容ループ、禁止用許容ループ  
行列（サイズ  $2^n \times 2^n$ ）の記  
憶のため、および主許容項の  
最小被覆や最小回路設計の可  
能な組み合わせのすべてを調  
べつくすため、多くの記憶量  
と計算時間を必要とするが、  
本方法では最小被覆表以外、  
それほど記憶量を必要としな  
い。

(3) 表1の関数20個の平均  
計算時間は行列法で192ミリ秒  
だったが、本方法では52ミリ  
秒と約  $1/4$  の時間で結果が  
求まった。但し、使用計算機  
は IBM 3081-KX 4 である。

(4) 行列法は、せいぜい  $n$   
= 6（それもそのごく一部）  
ぐらいまでしか対応できない  
が、本方法はそれ以上の変数  
の関数に拡張可能である。

### 3. ま と め

我々は、すでに今から15年も前に三段 NAND ゲート回路の論理設計法の一つとして、P-N項法を口頭発表し、最近論文としてまとめた。P-N項法は簡単な手法で近似的に良い回路を得ることを目標としている。そこで本論文では、3変数の関数について、どのような場合に最適な回路が得られなかったかを調べ、最適にするには関数変換の手法などを取り入れればよいことをまず示した。

また、P-N項法を項表現で表して、多変数の関数にも適用できるようにアルゴリズムに改良を加えた。最近発表された他の三段 NAND ゲート回路を実現する一手法（行列法）とも比較を行い、非常に高速に求まることを示した。

プログラムはまだ多変数関数にまで適用できるようなには至っていない。許容項の拡大でのヒューリスティックの導入など残された問題がいくつかある。

表1 4変数関数20個の比較結果

NO	関数	最小回路	行列法	本方法
		G, IN	G, IN	G, IN
1	F 7 7 7	6, 9		
2	8 0 F F	6, 9		
3	C 4 4 4	6, 10		
4	8 8 D F	6, 11		
5	8 9 F F	6, 11		
6	E B F F	6, 11		6, 12
7	5 D F C	6, 12		6, 14
8	8 9 B B	6, 12		
9	7 D F F	6, 12		
10	A B D D	6, 13		
11	3 F 0 7	6, 13		
12	3 F D F	6, 13		
13	1 8 F F	6, 13		
14	2 8 F F	6, 13		
15	4 8 F F	6, 13		
16	0 D 5 1	6, 15		
17	2 6 E F	6, 15		
18	1 1 B E	6, 15		
19	8 3 7 F	8, 17	10, 21	10, 21
20	8 7 7 F	8, 20	11, 24	11, 24

但し、G;ゲート数、IN;入力線数、また、NO.19とNO.20の最小回路の段数はそれぞれ4と5である。

### 参考文献

- 1) 松田, 宮腰, 畠山: 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について(I) —P-N項法—, 富山大学工学部紀要, **44**, (1993).
- 2) L. Hellerman: A Catalog of Three-Variable Or-Invert and And-Invert Logical Circuits, IEEE Trans. Electron. Comput., **Vol. EC-12**, No. 3, pp.198-223 (1963).
- 3) 松田, 宮腰: 論理式を分離加法形で表現する一手法, 情報処理学会論文誌, **33**, (1992).
- 4) 後藤: 一線入力三段 NAND ゲート回路の行列法による最小化手法, 情報処理学会論文誌, **32**, (1991).
- 5) 大澤, 宮腰, 松田, 畠山: 一線入力三段 NAND ゲート回路の一設計法(2), 平成4年度電気関係学会北陸支部連合大会講演論文集, **B-173**, (1992).

平成4年度電気関係学会北陸支部連合大会で一部発表

## The Logical Design of Minimal Three-level NAND Circuits (II) — The Improvement of P-N Cube Method —

Takashi MIYAGOSHI, Hideo MATSUDA, Kazuto OOSAWA,  
Toyomasa HATAKEYAMA

We presented the P-N cube method for the synthesis of minimal NAND circuits in the previous paper of this publication. The method does not provide necessarily a optimum circuit as it realizes any function with three-level NAND circuit. A catalog of minimal three-variable NAND circuits has been given by Hellerman. Our synthesis circuits are compared with that catalog and the way of improving our circuits which are in disagreement with the minimal circuit is shown. It is described that if we present the function with a term representation for computer program, whereas we present it with the truth table in the previous method, the improved method becomes to be able to apply to NAND circuits of a large number of variables. It is also shown that our improved method produces the minimal circuit in shorter computing time than the other method reported recently.

〔英文和訳〕

### 三段 NAND ゲート回路の論理設計法について (II) — P-N 項法の改良 —

宮腰 隆, 松田 秀雄, 大澤 一人, 畠山 豊正

我々は本紀要の前論文で最小 NAND ゲート回路の設計法として、P-N項法を提案した。本方法はどのような関数も三段 NAND ゲート回路として実現するので、必ずしも最適回路とはいえない。3変数の NAND ゲート回路の最小回路はヘラーマンによって与えられている。我々の合成した回路がカタログと照らし合わされ、最小回路と一致しなかった回路を改善する方法が示されている。もし、関数を前の手法のように真理値ではなく、項表現で表すならば多変数の NAND ゲート回路に適用できるようになるということが述べられる。改良した本方法が最近発表された他の方法より短い計算時間で最小回路が求められることも示される。

# Dressing Method for The Schrödinger Eigenvalue Problem

Tsutomu KAWATA

Faculty of Engineering, Toyama University, Toyama, Japan

The Riemann-Hilbert problem (**RHP**) plays a key role on the inverse scattering transform (**IST**), by which many types of nonlinear evolution equations (**NLEE's**) can be solved. The **IST** of Schrödinger operator is reviewed in some content, that is, a vector formalism is given. Considerations of the reviews enabled us to derive the **dressing method** (originally developed by Zakharov and Shabat) which is also powerful to solve the **NLEE's**. Connections between both methods are made clear. We find that a Schrödinger problem results in the dressing method and the Gel'fand-Levitan type of integral equations (**GLE**) is also derived with the same spectral function as the one of the **IST**. This fact means to define the scattering data still for the dressing method.

## §1. Introduction

The **RHP**<sup>1)</sup> plays a key role for developing of the **IST**<sup>2)</sup> and various studies had been reported by us. In this section we review the **IST** for the case of the Schrödinger type of eigenvalue problem (**S-EVP**).

The **S-EVP** is given by

$$\mathfrak{L}(\partial_x, q)|u\rangle \equiv \{-\partial_x^2 + q(x, t)\}|u\rangle = \xi^2|u\rangle, \quad (1.1)$$

where the italic letter means a differential operator,  $|u\rangle$  is an eigen function of the column vector and a spectral parameter  $\xi$  is taken as real ( $=\text{Re. } \lambda$ ), but will be later extended to a complex  $\lambda$ . Throughout this issue the potential  $q(x)$  is assumed to be vanishing rapidly as  $x \rightarrow \pm\infty$ . The general solution  $|u\rangle$  of (1.1) is given by two linearly independent solutions  $|\varphi_1\rangle$  and  $|\varphi_2\rangle$ ,

$$|u\rangle = -c_2|\varphi_1\rangle + c_1|\varphi_2\rangle \equiv \langle c|\varphi\rangle, \quad (1.2 a)$$

where bra-ket notations are defined by  $|\varphi\rangle \equiv (\varphi_1, \varphi_2)^T$ ,  $|c\rangle \equiv (c_1, c_2)^T$  and  $\langle c| \equiv (-c_2, c_1)$ , clearly satisfying  $\langle c|c\rangle = 0$  and  $\langle c|c'\rangle = -\langle c'|c\rangle$ . Since  $q(x)$  is rapidly vanishing, the solution  $|u(\xi, x)\rangle$  is generally determined by specifying its far fields as the linear combination of two principal vacuums ( $e^{\pm i\xi x}$ ) as

$$\begin{aligned} |u(\xi, x)\rangle &\rightarrow -c_2^\pm |1\rangle e^{-i\xi x} + c_1^\pm |2\rangle e^{i\xi x} \\ &= \langle c^\pm(\xi) | J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ as } x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (1.2 b)$$

where  $c_{1,2}^\pm$  are scattering amplitudes, the vacuum is defined by  $J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \{ J(\xi x) \equiv \exp(-i\sigma_3 \xi x) \}$  and superscripts  $(\pm)$  are ordered as  $x \rightarrow \pm\infty$ . The scattering matrix  $S(\xi)$  is connected with the scattering amplitudes  $\langle c^\pm(\xi) |$  as

$$\langle c^+(\xi) | = \langle c^-(\xi) | S(\xi). \quad (1.3)$$

Corresponding to the vacuum  $J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , Jost functions  $\{ |\varphi^\pm(\xi, x)\rangle \}$  are defined by

$$\mathcal{Q}(\partial_x, q) |\varphi^\pm(\xi, x)\rangle = \xi^2 |\varphi^\pm(\xi, x)\rangle, \quad (1.4 a)$$

$$|\varphi^\pm(\xi, x)\rangle \rightarrow J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.4 b)$$

where  $\mathcal{Q}(\partial_x, q) \equiv -\partial_x^2 + q(x)$ , while the scattering matrix  $S(\xi; t)$  is introduced by

$$|\varphi^-(\xi, x)\rangle = S(\xi) |\varphi^+(\xi, x)\rangle, \quad (1.5)$$

Since  $\det A = \langle a_1 | a_2 \rangle$  for a matrix  $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ , the Wronskian of  $|\varphi^\pm(\xi, x)\rangle$  satisfying (1.4) is given by

$$W_r^\pm(\xi) \equiv \det[\varphi^\pm, \varphi_x^\pm] = \langle \varphi^\pm | \varphi_x^\pm \rangle = 2i\xi. \quad (1.6)$$

Because of (1.5) and its x-derivative, we easily find  $\det S(\xi) = 1$ .

## §2. Inverse Spectral Transform

We derive the **IST** by means of the **RHP** and the **GLE** by which the solutions of **NLEE's** can be solved. For developing the **IST** it is always necessary to make clear analyticities of Jost functions and diagonal entries of the scattering matrix. This can be accomplished by rewriting (1.4) to its equivalent integral equations,

$$|\varphi^\pm(\xi, x)\rangle = J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin \xi(x-y)}{\xi} q(y) |\varphi^\pm(\xi, y)\rangle dy \quad (2.1 a)$$

The type of function  $|\varphi\rangle$  is often exchanged by  $|\psi\rangle \{ \equiv J(-\xi x) |\varphi\rangle \}$ , then instead of (2.1a) we get

$$|\psi_1^\pm(\xi, x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{\pm\infty}^x \frac{e^{2i\xi(x-y)} - 1}{2i\xi} q(y) |\psi_1^\pm(\xi, y)\rangle dy, \text{ etc..} \quad (2.1 b)$$

By virtue of Neumann series expansions, we obtain the theorem.

[Theorem. 1] "functions  $\{ |\psi_1^-(\lambda, x)\rangle, |\psi_2^+(\lambda, x)\rangle, s_{11}(\lambda) \}$  are analytic on the upper  $\lambda$ -plane, while the lower plane allows  $\{ |\psi_1^+(\lambda, x)\rangle, |\psi_2^-(\lambda, x)\rangle, s_{22}(\lambda) \}$ ."

[Theorem. 2] On each domain of analyticities, both sets of functions,  $\{ |\psi_1^-\rangle, |\psi_2^+\rangle, s_{11} \}$  and  $\{ |\psi_1^+\rangle, |\psi_2^-\rangle, s_{22} \}$  behave as

$$|\psi^\pm\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |\psi_x^\pm\rangle \rightarrow 0, s_{11} \rightarrow 1 \quad (2.2)$$

around at  $|\lambda| = \infty$ .

To make clear the analytic region, we define such new types of vectors as  $|\psi^P\rangle = |\psi_1^-, \psi_2^+\rangle$  and  $|\psi^N\rangle = |\psi_1^+, \psi_2^-\rangle$ , where superscripts ‘‘P, N’’ represent that  $\text{Im. } \lambda$  is positive and negative, respectively. While, in far regions of  $x$ , these approach to the triangular states listed in

$$\begin{aligned} |\psi^P(\lambda, x)\rangle &\rightarrow D_{\tilde{v}}^P(\lambda)J(-\lambda x)S_{\tilde{v}}^P(\lambda)J(\lambda x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ as } x \rightarrow \infty, \\ &\rightarrow D_L^P(\lambda)J(-\lambda x)S_L^P(\lambda)J(\lambda x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ as } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.3 a)$$

$$\begin{aligned} |\psi^N(\lambda, x)\rangle &\rightarrow D_{\tilde{v}}^N(\lambda)J(-\lambda x)S_{\tilde{v}}^N(\lambda)J(\lambda x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ as } x \rightarrow \infty, \\ &\rightarrow D_U^N(\lambda)J(-\lambda x)S_U^N(\lambda)J(\lambda x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ as } x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.3 b)$$

Matrices  $D_{L,\tilde{v}}^{P,N}$  are diagonal,

$$D_N^P(\lambda) = \begin{bmatrix} s_{11}, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} = \{D_L^P(\lambda)\}^\dagger, \quad D_L^N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & s_{22} \end{bmatrix} = \{D_{\tilde{v}}^N(\lambda)\}^\dagger,$$

while  $S_{L,\tilde{v}}^{P,N}$  are *strongly* triangular (its diagonal entries are unity),

$$\begin{aligned} S_{\tilde{v}}^P(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1, & \rho_+^P \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad S_L^P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -\rho_-^P, & 1 \end{bmatrix}, \\ S_L^N(\lambda) &= \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \rho_+^N, & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{\tilde{v}}^N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1, & -\rho_-^N \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4 a)$$

and

$$\rho_+^P = \frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad \rho_+^N = \frac{s_{21}}{s_{22}}, \quad \rho_-^P = \frac{s_{21}}{s_{11}}, \quad \rho_-^N = \frac{s_{12}}{s_{22}}. \quad (2.4 b)$$

Functions  $\psi^{P,N}$  are further modified by diagonal matrices,

$$\begin{aligned} |\psi_+^P(\lambda, x)\rangle &= [D_{\tilde{v}}^P(\lambda)]^{-1}|\psi^P(\lambda, x)\rangle, \quad |\psi_-^P(\lambda, x)\rangle = [D_L^P(\lambda)]^{-1}|\psi^P(\lambda, x)\rangle, \\ |\psi_+^N(\lambda, x)\rangle &= [D_L^N(\lambda)]^{-1}|\psi^N(\lambda, x)\rangle, \quad |\psi_-^N(\lambda, x)\rangle = [D_{\tilde{v}}^N(\lambda)]^{-1}|\psi^N(\lambda, x)\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

From (2.2) its asymptotic behaviours are given by

$$|\psi_{\pm}^{P,N}(\lambda, x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(1/\lambda) \quad (2.6)$$

on each domains of analyticities. If piecewise analytic functions

$$|\Psi^\pm(\lambda)\rangle = \begin{cases} |\psi_{\pm}^P(\lambda, x)\rangle & (\text{Im. } \lambda > 0), \\ |\psi_{\pm}^N(\lambda, x)\rangle & (\text{Im. } \lambda < 0), \end{cases} \quad (2.7)$$

are introduced, we can define the following **RHP’s**,

$$|\Psi^\pm(\xi + i0, x)\rangle - |\Psi^\pm(\xi - i0, x)\rangle = \Omega^\pm(\xi; x, x)|\psi^\pm(\xi, x)\rangle, \quad (2.8)$$

where

$$\Omega^\pm(\xi; x, y) = \begin{bmatrix} 0, & \rho_{\pm}(\xi)e^{i\xi(x+y)} \\ -\rho_{\pm}(\xi)e^{-i\xi(x+y)}, & 0 \end{bmatrix} = \Omega^\pm(\xi; x+y) \quad (2.9)$$

and both reflectional coefficients  $\rho_+^P$  {or  $\rho_-^N$ } and  $\rho_+^N$  {or  $\rho_-^P$ } must be located in (1.2) and (2.1), respectively. Following to Plemeli's formula, we can get

$$|\Psi^\pm(\lambda, x)\rangle = \left(\frac{1}{1}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \cdot \Omega^\pm(\xi; x, x) |\psi^\pm(\xi, x)\rangle. \quad (2.10)$$

It is possible to introduce the vectors independent on  $\lambda$ ,

$$|K_\pm^P(x, y)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J[\xi(x-y)] \{ |\Psi^\pm(\xi + i0, x)\rangle - \left(\frac{1}{1}\right) \} d\xi, \quad (2.11a)$$

$$|K_\pm^N(x, y)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J[\xi(x-y)] \{ |\Psi^\pm(\xi - i0, x)\rangle - \left(\frac{1}{1}\right) \} d\xi, \quad (2.11b)$$

which are called "kernels" and independent on  $\lambda$ . As shown in Appendix-A, substitution of (2.10) into (2.11) and deformations of paths results in

$$|K_\pm^P(x, y)\rangle = \begin{bmatrix} \theta(x-y), 0 \\ 0, \theta(y-x) \end{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^\pm(\xi; y, x) |\psi^\pm(\xi, x)\rangle d\xi, \quad (2.12a)$$

$$|K_\pm^N(x, y)\rangle = - \begin{bmatrix} \theta(y-x), 0 \\ 0, \theta(x-y) \end{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^\pm(\xi; y, x) |\psi^\pm(\xi, x)\rangle d\xi. \quad (2.12b)$$

These kernels are on supports of half line,

$$\begin{aligned} <1|K_\pm^P(x, y) \text{ and } <2|K_\pm^N(x, y) \sim \theta(x-y), \\ <1|K_\pm^N(x, y) \text{ and } <2|K_\pm^P(x, y) \sim \theta(y-x). \end{aligned} \quad (2.12)$$

For convenience of later use, we define new type of kernel vectors as  $|K^\pm(x, y)\rangle \simeq \theta[\pm(y-x)]$ , where

$$|K^+\rangle = [ <1|K_+^N, <2|K_+^P ]^T, |K^-\rangle = [ <1|K_-^P, <2|K_-^N ]^T. \quad (2.13)$$

In a sense of (2.11) we see correspondence between kernel and Jost functions. Actually the corresponding Jost functions with (2.13) are given by

$$|\psi^+\rangle \equiv [ <1|\psi_+^N, <2|\psi_+^P ]^T, |\psi^-\rangle \equiv [ <1|\psi_-^P, <2|\psi_-^N ]^T, \quad (2.14)$$

For these  $|K^\pm(x, y)\rangle$ , we can arrange (2.11) to

$$|K^\pm(x, y)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J[\xi(x-y)] \{ |\psi^\pm(\xi, x)\rangle - \left(\frac{1}{1}\right) \} d\xi. \quad (2.15a)$$

with its inverted formula,

$$|\psi^\pm(\lambda, x)\rangle = \left(\frac{1}{1}\right) - (\pm) \int_{\pm\infty}^x J[\lambda(y-x)] |K^\pm(x, y)\rangle dy. \quad (2.15b)$$

While eqs. (2.12) are reduced to

$$|K^\pm(x, y)\rangle = -(\pm) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_3 \Omega^\pm(\xi; y, x) |\psi^\pm(\xi, x)\rangle d\xi. \quad (2.16)$$

From (2.15) and (2.16) we can easily eliminate Jost functions,

$$\begin{aligned} |K^\pm(x, y)\rangle = & -(\pm) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_3 \Omega^\pm(\xi; y, x) d\xi \cdot \left(\frac{1}{1}\right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_3 \Omega^\pm(\xi; y, x) d\xi \int_{\pm\infty}^x J[\xi(z-x)] |K^\pm(x, z)\rangle dz. \end{aligned}$$

This is just the **GLE**,



$$|K^\pm(x, y)\rangle \pm F^\pm(x, y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_{\pm\infty}^x F^\pm(z, y)|K^\pm(x, z)\rangle dz, \quad (2.17)$$

where  $F^\pm(x, y)$  are off-diagonal spectral functions,

$$F^\pm(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_3 \mathcal{Q}^\pm(\xi; y, x) d\xi, \quad (2.18)$$

The fact that (2.15b) must satisfy the **S-EVP** enables the kernels to satisfy

$$\frac{\partial^2 K^\pm(x, y)}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 K^\pm(x, y)}{\partial^2 y} = q(x)K^\pm(x, y), \quad (2.19a)$$

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K^\pm(x, x). \quad (2.19b)$$

as shown in **Appendix B**. These define Cauchy problem, and the uniqueness of solution is already known. Specially (2.19b) recovers the potential once the **GLE** is solved as to kernels.

### §3. Integral Operators for The IST

We consider to develop the dressing method for the Shrödinger operator. The scalar case was already treated by Zakharov and Schabat,<sup>3)</sup> but in our case their formula must be modified to the vector formula. We remark that the modification is not trivial. It is a key to give a mapping from the vacuum to nontrivial states. Considering (2.15b), we define

$$[\Phi_0 \mathbf{F}](x) = \Phi_0(\xi, y) \mathbf{F}(y; x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\xi, y) F(y; x) dy, \quad (3.1a)$$

$$[\Phi_0 |W^\pm\rangle](x) = \Phi_0(\xi, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (\pm) \int_{\pm\infty}^x \Phi_0(\xi, y) |K^\pm(y; x)\rangle dy, \quad (3.1b)$$

where  $\Phi_0$  is a vacuum (matrix) and  $\mathbf{F}$  is a Fredholm type of matrix operators while  $|K^\pm\rangle \equiv \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |K^\pm\rangle$  are Volterra type one. We introduce the following relation,

$$|W^-(\xi, x)\rangle = \{\mathbf{1} + \mathbf{F}(y, x)\} |W^+(\xi, x)\rangle, \quad (3.2)$$

which can be reduced to the **GLE** as shown in the following.

For convenience we exchange both kernels  $K^\pm(x, y)$

$$K^\pm(y; x) = K^\pm(y; x) \theta[\pm(y-x)], \quad (3.3)$$

by which the Volterra integrals are represented by

$$[\Phi_0 |K^\pm\rangle](x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(\xi, y) |K^\pm(y; x)\rangle \theta[\pm(y-x)] dy. \quad (3.4)$$

On the other hand (3.2) is reduced to  $|K^-\rangle = \mathbf{F} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |K^+\rangle + \mathbf{F} |K^+\rangle$ . To this relation, we operate the matrix function  $\Phi_0$  from the left side, then for  $z > x$  we obtain such a **GLE** as

$$F(z; x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |K^+(z; x)\rangle + \int_x^\infty F(z; y) |K^+(y; x)\rangle dy = 0. \quad (3.5)$$

This is exactly same with (2.17), but we can not find any informations for the spectrum function  $F(z; x)$ . While the spectral function  $F^+$  in (2.18) include  $\mathcal{Q}^+(\xi; x, x)$  which consists of reflectional coefficients (scatteringn data). It is natural to connects the spectral

function in (3.5) with the one of the **IST**.

We remember the treatments of §2 and arrange them by Volterra operators, which generates  $\psi^\pm(\xi, x)$  from the vacuum state  $J(\xi x)$ ,

$$\begin{aligned} \psi^\pm(x) &= J[\xi(y-x)]\left\{\mathbf{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |K^\pm(y; x)\rangle\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (\pm) \int_{\pm\infty}^x J[\xi(x-y)]K^\pm(y; x)dy. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Let's consider the following vectors,

$$\begin{aligned} \psi_0^- &= [\langle 1|\psi_+^P, \langle 2|\psi_+^N\rangle]^T = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}^{-1} \psi^-, \\ \psi_0^+ &= [\langle 1|\psi_-^N, \langle 2|\psi_-^P\rangle]^T = \begin{bmatrix} s_{22} & 0 \\ 0 & s_{11} \end{bmatrix}^{-1} \psi^+. \end{aligned} \quad (3.7)$$

We note that both vectors  $[\langle 1|\psi_-^N, \langle 2|\psi_-^P\rangle]^T$  and  $[\langle 1|\psi_+^P, \langle 2|\psi_+^N\rangle]^T$  are different from the one used in (2.14). Corresponding to  $\psi_0^\pm$ , new kernels

$$K_0^+ = [\langle 1|K_-^N, \langle 2|K_-^P], \quad K_0^- = [\langle 1|K_+^P, \langle 2|K_+^N], \quad (3.8)$$

are introduced on supports  $\theta(y-x)$  and  $\theta(x-y)$ , respectively. Now reconstruction formulae obtained from (2.11),

$$|\psi_+^P(\lambda, x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \mathcal{Q}^+(\xi; x, x) |\psi^+(\xi, x)\rangle, \quad (3.9a)$$

$$|\psi_+^N(\lambda, x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \lambda} \mathcal{Q}^+(\xi; x, x) |\psi^+(\xi, x)\rangle, \quad (3.9b)$$

are represented at  $\lambda = \xi$  as

$$\begin{aligned} |\psi_+^P(\xi, x)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathcal{Q}^+(\xi; x, x) |\psi^+(\xi, x)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \mathcal{Q}^+(\xi'; x, x) |\psi^+(\xi', x)\rangle, \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} |\psi_+^N(\xi, x)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathcal{Q}^+(\xi; x, x) |\psi^+(\xi, x)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \mathcal{Q}^+(\xi'; x, x) |\psi^+(\xi', x)\rangle, \end{aligned} \quad (3.10b)$$

where P.V. means the Cauchy principal value. It can be also summarized as

$$\begin{aligned} |\psi_0^- (\xi, x)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; x, x) |\psi^+(\xi, x)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi'; x, x) |\psi^+(\xi', x)\rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

On the contrary to these we can see

$$\begin{aligned} |\psi^+(\lambda, x)\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; x, x) |\psi^+(\xi, x)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi'}{\xi' - \xi} \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi'; x, x) |\psi^+(\xi', x)\rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Eliminating the principal value integral from (3.11) and (3.12), we can obtain

$$|\psi_0^-(\xi, x)\rangle = \{E + \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; x, x)\} |\psi^+(\xi, x)\rangle. \quad (3.13)$$

Since  $|\psi_0^-(\xi, x)\rangle$  also satisfies the **S-EVP**, it has also a kernel and similarly to (3.6) we define it as

$$|\psi_0^-(\xi, x)\rangle = J[\xi(y-x)] \left\{ \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |\mathbf{K}_0^-(y; x)\rangle \right\}. \quad (3.14)$$

Both formulae (3.6) and (3.14) reduce (3.13) to

$$\begin{aligned} J(\xi y) \left\{ \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |\mathbf{K}_0^-(y; x)\rangle \right\} \\ = \{E + \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; 0, 0)\} J(\xi y) \left\{ \mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + |\mathbf{K}^+(y; x)\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

which can be represented by

$$|\mathbf{W}_0^-(y; x)\rangle = \{\mathbf{1} + \mathbf{F}(y; z)\} |\mathbf{W}^+(z; x)\rangle. \quad (3.16)$$

The relation (3.10) really determin  $\mathbf{F}$  as follows,

$$\sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; 0, 0) J(\xi y) = J(\xi z) \mathbf{F}(z; y). \quad (3.17)$$

The kernel  $F$  of operator  $\mathbf{F}$  satisfies

$$\int_{-\infty}^{\infty} J[\xi(z-x)] F(z; y) dz = \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; x, y). \quad (3.18)$$

The RHS is a Fourier integral and we can invert it as

$$F(x; y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_3 \mathcal{Q}^+(\xi; x, y) d\xi. \quad (3.19)$$

This relation is basically derived from two kinds of Jost functions  $|\psi_0^-(\lambda, x)\rangle$ ,  $|\psi^+(\lambda, x)\rangle$  and from operator relation (3.16). It is easily seen that another type of relations can exist.

#### §4. Dressing Method for The Schrödinger Eigenvalue Problem

In §3 we found an operator relation (3.16) consisting of both Fredholm and Volterra types of operators. In this section we remark that this is not only important but also is necessary to obtain the integrable conditions. We take a scalar differential operator  $\mathcal{Q}(\partial, q)$  which is redefined acting to the left term side as  $\varphi \rightarrow \varphi \mathcal{Q}$ , while the matrix still acts to the right. The Schrödinger equation is represented by

$$|\varphi^\pm(\xi, x)\rangle \mathcal{Q}(\partial, q) = \xi^2 |\varphi^\pm(\xi, x)\rangle, \quad (4.1a)$$

$$J(\xi x) \mathcal{Q}_0(\partial) = \xi^2 J(\xi x), \quad (4.1a)$$

where  $\mathcal{Q}_0$  is simply set as a trivial differential operator ( $\equiv -\partial^2$ ). Discussions of §3 suggests us to redefine Volterra operators,

$$|\varphi^\pm(\xi, x)\rangle = J(\xi y) \mathbf{W}^\pm(y; x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{W}^\pm = \mathbf{1} + \mathbf{K}^\pm), \quad (4.2)$$

because  $|\mathbf{W}^\pm\rangle = \mathbf{W}^\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . However, these basically represent scalar relations, then we can

take  $\mathbf{W}^\pm$  diagonal. Substituting (4.2) into (4.1a), we obtain

$$J(\xi y)\mathbf{W}^\pm(y; x)\mathcal{Q}(\partial, q) = J(\xi y)\mathbf{W}^\pm(y; x)\xi^2 = J(\xi y)\mathcal{Q}_0(\partial)\mathbf{W}^\pm(y; x).$$

Eliminating  $J(\xi y)$  from this, we get

$$\mathbf{W}^\pm(y; x)\mathcal{Q}(\partial, q) = \mathcal{Q}_0(\partial)\mathbf{W}^\pm(y; x). \quad (4.3)$$

The nontrivial operator  $\mathcal{Q}^{(m)}(\partial, q)$  can be generated because the scalar operator  $\mathbf{W}^\pm(\equiv |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$  can be inverted. We denote this as

$$[\mathbf{W}^\pm]^\dagger \mathbf{W}^\pm = \mathbf{W}^\pm [\mathbf{W}^\pm]^\dagger = \mathbf{1}, \quad (4.4)$$

then  $[\mathbf{K}^\pm, [\mathbf{K}^\pm]^\dagger] = 0$ . These facts are generalized to the case of m-th differential operator  $\mathcal{Q}_0^{(m)}$  (is set as  $\partial^m$  for simplicity) and we reduces (4.3) to

$$\mathcal{Q}^{(m)}(\partial, q) = [\mathbf{W}^\pm]^\dagger \mathcal{Q}_0^{(m)} \mathbf{W}^\pm, \quad (4.5)$$

which generates a nontrivial operator denoted as

$$\mathcal{Q}^{(m)}(\partial, q) = \partial^m + \sum_{k=1}^m q_k^{(m)}(x) \partial^{m-k}. \quad (4.6)$$

The function  $q_k(x)$  is called as the potential. All of these potentials can be determined recursively if both orders of  $\mathcal{Q}^{(m)}$  and  $\mathcal{Q}_0^{(m)}$  are equal. On the other hand, from (4.5) we obtain

$$[\mathcal{Q}_0^{(m)}, \mathbf{F}^\pm] = 0, \quad (4.7)$$

where

$$\mathbf{1} + \mathbf{F}^+ = \mathbf{W}^+ [\mathbf{W}^-]^\dagger, \quad \mathbf{1} + \mathbf{F}^- = \mathbf{W}^- [\mathbf{W}^+]^\dagger \quad (4.8)$$

We assume two trivial differential operators which satisfy

$$[\mathcal{Q}_0^{(m)}, \mathcal{Q}_0^{(n)}] = 0, \quad (4.9)$$

from which the integrable condition is derived. From the left and right sides we operate  $[\mathbf{W}^\pm]^\dagger$  and  $\mathbf{W}^\pm$  to (4.9) then obtain

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathbf{W}^\pm]^\dagger [\mathcal{Q}_0^{(m)}, \mathcal{Q}_0^{(n)}] \mathbf{W}^\pm \\ &= [[\mathbf{W}^\pm]^\dagger \mathcal{Q}_0^{(m)} \mathbf{W}^\pm, [\mathbf{W}^\pm]^\dagger \mathcal{Q}_0^{(n)} \mathbf{W}^\pm]. \end{aligned}$$

That is an integrable condition,

$$[\mathcal{Q}^{(m)}, \mathcal{Q}^{(n)}] = 0. \quad (4.10)$$

To derive the **NLEE's**, we must extend  $\mathcal{Q}_0^{(m)}$  to  $\mathcal{Q}_0^{(m)}$  consisting of derivatives as to other variables  $t_k$ ,

$$\mathcal{Q}_0^{(m)} = \sum_k \alpha_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \mathcal{Q}_0^{(m)}(\partial, q), \quad (4.11a)$$

where  $\alpha_k$  is constant. Similarly to (4.7) and (4.10) the **NLEE's** can be obtained from

$$[\mathcal{Q}^{(m)}, \mathcal{Q}^{(n)}] = 0. \quad (4.12)$$

For the case of **KdV** equation,  $\mathcal{Q}^{(2)} = \mathfrak{A}^{(2)}$ ,  $\mathcal{Q}^{(3)} = \frac{1}{4}\partial_t + \mathfrak{A}^{(3)}$  where

$$\mathfrak{A}^{(2)} (= -\mathcal{Q}) = \partial^2 - q(x, t), \quad \mathfrak{A}^{(3)} = \partial^3 - \frac{3}{2}q(x, t) - \frac{3}{4}q_x. \quad (4.11b)$$

The t-dependent **EV**  $|\varphi_j^\pm\rangle \in \mathcal{Q} = |\varphi_j^\pm\rangle \in \xi^2$  is again introduced by setting  $\mathcal{Q} \equiv -\mathcal{Q}^{(2)}$  and  $\varphi^\pm(\xi, x|t) = J(\xi y) \mathbf{W}(y; x|t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Also from (1.5) the S-matrix is given by

$$J(\xi y) \mathbf{W}^-(y; x) = S(\xi, t) J(\xi y) \mathbf{W}^+(y; x). \quad (4.13)$$

by which the well-known relation  $S_t = 4i\xi^3[\sigma_3, S]$  must be obtained. If the integrable condition (3.11) acts on  $|\varphi^\pm\rangle$ , we see from (4.12) that  $H(\xi)|\varphi^\pm\rangle$  and  $|\varphi^\pm\rangle \in \mathcal{Q}^{(3)}$  are eigenfunctions of  $\mathcal{Q}$ ,

$$|\varphi^\pm\rangle \in \mathcal{Q}^{(3)} \mathcal{Q} = |\varphi^\pm\rangle \in \mathcal{Q}^{(3)} \xi^2. \quad (4.14)$$

We may take  $H(\xi)$  as constant and diagonal, and impose

$$|\varphi^\pm\rangle \in \mathcal{Q}^{(3)} + H|\varphi^\pm\rangle \rightarrow J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ as } x \rightarrow \pm\infty.$$

That is,  $H(\xi) = E - i\xi^3\sigma_3$  and  $|\varphi^\pm\rangle \in \mathcal{Q}^{(3)} = i\xi^3\sigma_3|\varphi^\pm\rangle$ . Since  $|\varphi^\pm\rangle = J(\xi y) \mathbf{W}^\pm(y; x|t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  and  $[J, H] = 0$ , we can find

$$\frac{1}{4} \mathbf{W}_t^\pm = \partial^3 \mathbf{W}^\pm - \mathbf{W}^\pm \mathfrak{A}^{(3)}. \quad (4.15)$$

On the other hand. The t-derivative of (4.8) and (4.15) give us

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t^- &= \mathbf{W}_t^- [\mathbf{W}^-]^\dagger (1 + \mathbf{F}^-) - (1 + \mathbf{F}^-) \mathbf{W}_t^- [\mathbf{W}^-]^\dagger, \\ \mathbf{W}_t^\pm [\mathbf{W}^\pm]^\dagger &= 4\mathfrak{A}_0^{(3)} - 4\mathbf{W}^\pm \mathfrak{A}^{(3)} [\mathbf{W}^\pm]^\dagger. \end{aligned}$$

Then also from (4.7) we get

$$\mathbf{F}_t^\pm = 4[\mathfrak{A}_0^{(m)}, \mathbf{F}^\pm], \quad [\partial^2, \mathbf{F}^\pm] = 0, \quad (4.16)$$

by which the relations are obtained,

$$\frac{\partial \mathbf{F}^\pm}{\partial t} + 4 \left( \frac{\partial^3 \mathbf{F}^\pm}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}^\pm}{\partial x^3} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{F}^\pm}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}^\pm}{\partial x^2} = 0. \quad (4.17)$$

If the coordinates are transformed to  $\mu = x + y$  and  $\nu = x - y$ , we find that  $F^\pm(y; x|t) = F^\pm(\mu|t)$  are only nontrivial and obtain

$$F(x + y|t) = \int_{-\infty}^{\infty} J[-\xi(x + y + 8\xi^3 t)] \tilde{F}(\xi|0) d\xi, \quad (4.18)$$

where  $\tilde{F}(\xi|0)$  is determined by the initial condition. This gives a same structure as the spectral function in (2.18).

## §5. Concluding Remarks

The usual dressing method<sup>3)</sup> does not give a correspondence with the spectral function

obtained in the **IST**, which was first studied in a case of the AKNS eigenvalue problem.<sup>4)</sup> The case of **S-EVP** starts from definitions of Jost functions, and we find it still possible to choose a different set of Jost functions from the case of **IST**. This selection results in the dressing method, where we obtain the principal factorization formula of Fredholm operator (4.8), the integrable condition (4.12) and other necessary relations (4.7), (4.15), (4.16).

We are interested in the **S-EVP**, which is convenient to investigate the relation of the **IST** with the **Sato** theory,<sup>5)</sup> which is useful to introduce the  $\tau$ -function. It is our next plan how to solve the initial value problem of the Sato theory, in spite of that both **IST** and dressing method solve it.

### References

- 1) T. Kawata: J. Phys. Soc. Japan **54** (1985) 885
- 2) T. Kawata: J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 3381
- 3) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl., **8** (1974) 43
- 4) T. Kawata: J. Phys. Soc. Japan **61** (1992) 3479
- 5) T. Kawata: Seminar on R.I. M. S. in Kyoto Univ., Oct. 19-22

### Appendix-A Complex Integrals

We consider integrals,

$$I^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi' - \xi \pm i0} \cdot J(\xi z).$$

Instead of this, we consider its scalar type and obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi' - \xi + i0} \cdot e^{-i\xi z} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - (\xi' + i0)} \cdot e^{-i\xi z} \\ &= -\theta(-z)e^{-i\xi' z}, \end{aligned}$$

by means of Jordan's theorem. This easily gives us

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi' - \xi + i0} \cdot J(\xi z) = - \begin{bmatrix} \theta(-z), & 0 \\ 0, & \theta(z) \end{bmatrix} J(\xi' z). \quad (\text{A.1})$$

We similarly obtain

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi' - \xi - i0} \cdot J(\xi z) = + \begin{bmatrix} \theta(z), & 0 \\ 0, & \theta(-z) \end{bmatrix} J(\xi' z). \quad (\text{A.2})$$

### Appendix-B Kernel Representation of Jost Functions

We consider the relation in eq. (2.16),

$$\varphi^\pm(\xi, x) = J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (\pm) \int_{\pm\infty}^x J(\xi y) K^\pm(x, y) dy.$$

Its derivative  $\varphi_{xx}^\pm$  is given by

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\pm x}^{\pm}(\xi, x) = & -\xi^2 J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - (\pm) \int_{\pm\infty}^x J(\xi y) \frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial x^2} dy \\
 & - (\pm) J(\xi x) \left\{ \frac{\partial K^{\pm}(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=x} + \frac{d}{dx} K^{\pm}(x, x) - i\xi \sigma_3 K^{\pm}(x, x) \right\}, \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

while the term  $(q(x) - \xi^2)\varphi^{\pm}$  is

$$\begin{aligned}
 (q(x) - \xi^2)\varphi^{\pm} = & (q(x) - \xi^2) J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & - (\pm) \int_{\pm\infty}^x J(\xi y) \left\{ q(x) K^{\pm}(x, y) + \frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial y^2} \right\} dy \\
 & - (\pm) \left\{ J_x(\xi x) K^{\pm}(x, x) - J(\xi x) \frac{\partial K^{\pm}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=x} \right\}. \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

For this derivation we had used  $\xi^2 J(\xi y) = -J_{yy}(\xi y)$  and

$$\begin{aligned}
 \int_{\pm\infty}^x J(\xi y) \xi^2 K^{\pm}(x, y) dy &= - \int_{\pm\infty}^x J_{yy}(\xi y) K^{\pm}(x, y) dy \\
 &= - \int_{\pm\infty}^x J(\xi y) \frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial y^2} dy - J_x(\xi x) K^{\pm}(x, x) + J(\xi x) \frac{\partial K^{\pm}(x, y)}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

From (B.1) and (B.2) we can obtain

$$\begin{aligned}
 (\pm) \int_{\pm\infty}^x J(\xi y) \left\{ q(x) K^{\pm}(x, y) + \frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial x^2} \right\} dy \\
 = q(x) J(\xi x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\pm) J(\xi x) \left\{ -\frac{\partial K^{\pm}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial K^{\pm}(x, y)}{\partial y} + \frac{d}{dx} K^{\pm}(x, x) \right\}, \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

by which the Cauchy problems are obtained,

$$\frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 K^{\pm}(x, y)}{\partial x^2} + q(x) K^{\pm}(x, y) = 0, \quad (B.4 a)$$

$$q(x) \pm 2 \frac{d}{dx} K^{\pm}(x, x) = 0. \quad (B.4 b)$$





# Painleve Transcendents and Its Linearizations

Tsutomu KAWATA

Faculty of Engineering, Toyama University, 933 Toyama, Japan

## §1. Introduction

**Painleve** and his co-workers had studied what kind of ordinary differential equations (**ODE's**) belonging to the second-order class does not admit any movable singular point (**MCP**) in its solutions.<sup>1)</sup> They found six so-called irreducible Painleve transcendents, which can be integrated in terms of elliptic functions,

$$P_1: \frac{d^2 f}{dx^2} = 6f^2 + x, \quad (1.1 a)$$

$$P_2: \frac{d^2 f}{dx^2} = 2f^3 + xf + \alpha, \quad (1.1 b)$$

$$P_3: \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{f} \left( \frac{df}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \frac{1}{x} (\alpha f^2 + \beta), \quad (1.1 c)$$

$$P_4: \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2f} \left( \frac{df}{dx} \right)^2 - \frac{3}{2} f^3 + 4xf^2 + 2(x^2 - \alpha)f + \frac{\beta}{f}, \quad (1.1 d)$$

$$P_5: \frac{d^2 f}{dx^2} = \left( \frac{1}{2f} + \frac{1}{f-1} \right) \left( \frac{df}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left( \frac{f-1}{x} \right)^2 \left( \alpha f + \frac{\beta}{f} \right) + \gamma \frac{f}{x} + \delta \frac{f(f+1)}{f-1}, \quad (1.1 e)$$

$$P_6: \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f} + \frac{1}{f-1} + \frac{1}{f-x} \right) \left( \frac{df}{dx} \right)^2 - \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{f-x} \right) \frac{df}{dx} + \frac{f(f-1)(f-x)}{x^2(x-1)^2} \left\{ \alpha + \beta \frac{x}{f^2} + \gamma \frac{x-1}{(f-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(f-x)^2} \right\}, \quad (1.1 f)$$

where  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  are constant. On the other hand, the group theoretical analysis for differential equations was advocated by S. C. Lie during 19-th century,<sup>2)</sup> then many contributions had been published as to the symmetric transformations and similarity solutions.<sup>3)</sup> Despite the considerable effort to these earlier studies, few advances for solutions of the Painleve equations were made until recently.

More than ten years ago Ablowitz et al<sup>4,5)</sup> found that exactly integrable nonlinear partial differential equations (**PDE's**) allows similarity solutions and are closely related with the **Painleve** transcendents.

Flaschka and Newell<sup>6)</sup> considered the problem deeply and obtained a principal method

for solving the 4-th Painleve type of ordinary nonlinear equations (**P-ODE**) in a global sence.

In this issue we consider the connection between linearizations of **PDE's** and **P-ODE's** simply. The principal idear depends on the similarity solutions of **PDE's**.

## §2. Similarity Transformations

The group theoretical analysis for differential equations had contributed to the symmetric transformations and similarity of solutions.<sup>3)</sup> To review this, we consider

$$N(x, t, q, q_x, q_t, q_{xt}, \dots) = 0. \quad (2.1)$$

The basic idear is to consider the invariance of tangential equations under one (or several) parameter ( $=\epsilon$ ), where the transformation group acts on variables  $(x, t, q)$  and generates  $(x', t', q)$ ,

$$x' = f(x, t, q; \epsilon), \quad t' = g(x, t, q; \epsilon), \quad q' = h(x, t, q; \epsilon), \quad (2.2)$$

where the case  $\epsilon=0$  is set to be identity,

$$x = f(x, t, q; 0), \quad t = g(x, t, q; 0), \quad q = h(x, t, q; 0).$$

Denoting a solution of (2.1) as  $q = \phi(x, t)$ , we replace these variables with  $q'$ ,  $x'$  and  $t'$  then obtain

$$N(x', t', q', q'_{x'}, q'_{t'}, q'_{x't'}, \dots) = 0. \quad (2.3)$$

since  $\epsilon$  is a parameter. That is, (2.3) also allows  $q' = \phi(x', t')$ ,

$$\phi(f(x, t, \phi; \epsilon), g(x, t, \phi; \epsilon)) = h(x, t, \phi(x, t); \epsilon). \quad (2.4)$$

We say this as the invariant condition, which enables us to find such infinitesimal transformations as

$$x' = x + \epsilon \xi(x, t, q), \quad t' = t + \epsilon \tau(x, t, q), \quad q' = q + \epsilon \eta(x, t, q). \quad (2.5)$$

The problem is reduced to find three functions  $\xi(x, t, q)$ ,  $\tau(x, t, q)$  and  $\eta(x, t, q)$ .

## §3. Similarities of NLPDE's

In this section we consider the typical type of **NLPDE's**,

$$\mathbf{KdV} : q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{mKdV} : q_t - 6q^2q_x + q_{xxx} = 0. \quad (3.2)$$

### 2A) Korteweg-de Vries Equation

We first remark that the **K-dV** equation (3.1) is invariant under transformations of independent variables  $\tilde{t} = \alpha t + \beta x$ ,  $\tilde{x} = \nu t + \delta x$ , and dependent variable as

$$\tilde{q}(x, t) = \kappa \cdot q(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad (3.3)$$

where  $\kappa$  is a constant. Actually the **similarity condition**  $q(x, t) = \tilde{q}(x, t)$  holds under conditions  $\alpha = \delta^3$ ,  $\kappa = \delta^2$  and  $\beta = \gamma = 0$ , by which the invariance is given by  $q(x, t) = \delta^2 q(\delta x, \delta^3 t)$ , caused from that the **K-dV** equation at least allows us 1-parameter solution. Since  $\delta^2 q(\delta x, \delta^3 t) \rightarrow \{1 + \delta(2 + x\partial_x + 3t\partial_t)\}q(x, t)$  as  $\delta \rightarrow 1 + \delta$ , the invariance is reduced to

$$xq_x + 3tq_t = -2q. \quad (3.4)$$

As shown in **Appendix-A**, characteristic equations,  $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{3t} = -\frac{dq}{2q}$ , are important for solving the general solution. By means of two independent solutions  $q = c_1 x^{-2}$  and  $q = c_2 t^{-2/3}$ , the general solution can be given by  $F(qx^2, qt^{2/3}) = 0$ . Since  $F(*, *)$  is an arbitrary function, we can obtain  $c_1 = qx^2 = f(c_2) = f(qt^{2/3})$  or equivalently

$$q = x^{-2} f(x^{-2} t^{2/3}), \quad q = t^{-2/3} f(x^2 t^{-2/3}) \text{ etc.}, \quad (3.5)$$

which reduces the **KdV** to an **ODE**. If we take  $q = t^{-2/3} f(xt^{-1/3})$  as an example, the **KdV** eq. is reduced to

$$f''' - 6f'f - \frac{1}{3}zf' - \frac{2}{3}f = 0, \quad (3.6)$$

where  $f \equiv f(z)$ ,  $f' = df/dz$  and  $z = xt^{-1/3}$ .

## 2B) Modified KdV Equation

For the **m-KdV** eq. (3.2), we also obtain

$$q(x, t) = \tilde{q}(x, t) \equiv \delta q(\delta x, \delta^3 t). \quad (3.7)$$

The self-similar solution is easily derived,

$$q(x, t) = (3t)^{-1/3} f(x(3t)^{-1/3}). \quad (3.8)$$

From eqs. (3.2) and (3.8), the second **P-ODE** is deived,

$$f'' = 2f^3 + zf + \nu, \quad (3.9)$$

where  $\nu$  is a constant. We are sure that similarities reduce both **KdV** and **mKdV** to **P-ODE's**. This fact holds for many kinds of **PDE** which can be solved by so-called exact method, inverse spectral transform (**IST**), Backlund Transform, and so on. While the **Painleve's type** of equations had been studied by many authors and its mathematical properties were made clear in various points. We specially refer to the connection between **Painleve transcendents** and **IST**, which was found by Ablowitz and his co-workers.<sup>5)</sup> The **IST** decouples the **PDE** into a set of linear problems, one of them is an eigenvalue problem. From this aspect it is natural to expect such a decoupling scheme for Painleve transcendents.

### §4. Linearization and Compatibility Conditions

We consider a typical set linear equations, consisting of the  $2 \times 2$ -matrix order equations,

$$\varphi_x = D(\lambda; q)\varphi, \quad (4.1 a) \quad \varphi_t = F(\lambda; q)\varphi, \quad (4.1 b)$$

where  $\lambda$  is a spectral parameter and both matrices  $D$  and  $F$  satisfy the integrable condition as to  $\lambda$ ,

$$D_t - F_x + [D, F] = 0. \quad (4.2)$$

The coefficient matrix  $D(\lambda; q)$  of (4.1a) is specified, while  $F(\lambda; q)$  is determined by the integrability (4.2). For the case of **mKdV** eq., both matrices  $D$  and  $F$  are given by

$$D = -i\lambda\sigma_3 + Q, \quad F = \sigma_3 f(\lambda; q) + F_0(\lambda; q), \quad (4.3)$$

where  $\sigma_3$  and  $\sigma_1$  are Pauli spin matrices,  $Q(x, t) = q(x, t) \cdot \sigma_1$ ,  $F_0$  is chosen as  $F_0 = \begin{bmatrix} 0, & g \\ h, & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$f \equiv f(\lambda, q) = -4i\lambda^3 - 2miq^2\lambda, \quad (4.4 a)$$

$$g \equiv g(\lambda; q) = 4q\lambda^2 + 2iq_x\lambda - q_{xx} + 2mq^3, \quad (4.4 b)$$

$$h \equiv h(\lambda; q) = 4mq\lambda^2 - 2imq_x\lambda - mq_{xx} + 2q^3 (m = \pm 1). \quad (4.4 c)$$

The **mKdV** eq. is actually obtained as

$$q_t - 6mq^2q_x + q_{xxx} = 0 (m = \pm 1), \quad (4.5)$$

where the potential  $q = q(x, t)$  is determined under a initial condition ( $q = q_0(x)$ ). Because both matrices  $D = D(\lambda; q)$  and  $F = F(\lambda; q)$  depend on  $(x, t)$ , the eigenfunction of (4.1) can be denoted as

$$\varphi \equiv \varphi(\lambda; x, t; q) \equiv \varphi(\lambda; x, t), \quad (4.6)$$

Now we define the following transformations,

$$\tilde{x} = \delta x, \quad \tilde{t} = \delta^3 t, \quad \tilde{q} = q/\delta, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta}, \quad (4.7)$$

by which the following lemmas are deduced.

**[Lemma. 1]** By means of (4.7) the linear set (4.1) can be transformed to

$$\varphi_{\tilde{x}} = D(\tilde{\lambda}; \tilde{q})\varphi, \quad (4.8 a) \quad \varphi_{\tilde{t}} = F(\tilde{\lambda}; \tilde{q})\varphi. \quad (4.8 b)$$

and this solution is represented by

$$\varphi = \varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{t}; \tilde{q}). \quad (4.9)$$

**(proof)** Because of (4.7) the differential operators  $(\partial/\partial x, \partial/\partial t)$  are transformed to  $\{\delta(\partial/\partial \tilde{x}), \delta^3(\partial/\partial \tilde{t})\}$ . By this facts we can see

$$D(\lambda; q) \rightarrow \delta \cdot D(\tilde{\lambda}; \tilde{q}), \quad F(\lambda; q) \rightarrow \delta^3 F(\tilde{\lambda}; \tilde{q}). \quad (4.10)$$

The components of  $F$  are also transformed as

$$f(\lambda; q) \rightarrow \delta^3 f(\tilde{\lambda}; \tilde{q}), \quad g(\lambda; q) \rightarrow \delta^3 g(\tilde{\lambda}; \tilde{q}), \quad h(\lambda; q) \rightarrow \delta^3 h(\tilde{\lambda}; \tilde{q}).$$

The coupled set (4.1) are transformed to  $\varphi_{\tilde{x}} = \mathbf{D}(\tilde{\lambda}; \tilde{q})\varphi$ ,  $\varphi_{\tilde{t}} = \mathbf{F}(\tilde{\lambda}; \tilde{q})\varphi$ , which are invariant with (4.2) and the solution is given by  $\varphi = \varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{t}; \tilde{q})$ . **[QED]**

**[Lemma. 2]** We denote the solution of the **m-KdV** equation (4.6) as  $q = q(x, t)$ . Under (4.7) the solution  $\tilde{q}$  satisfies the same **m-KdV** equation with independent variables  $\tilde{x}$  and  $\tilde{t}$ , then we obtain

$$\tilde{q} = q(\tilde{x}, \tilde{t})/\delta. \quad (4.11)$$

**(proof)** The **m-KdV** equation (4.6) can be transformed to

$$q_t - 6mq^2q_x + q_{xxx} = \delta^4 \{ \tilde{q}_{\tilde{t}} - 6m\tilde{q}^2\tilde{q}_{\tilde{x}} + \tilde{q}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \} = 0.$$

Both **m-KdV** equations as to  $q$  and  $\tilde{q}$  are invariant under  $(x, t) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{t})$ . Hence  $\tilde{q} = q(\tilde{x}, \tilde{t})/\delta$  is obtained. **[QED]**

The self-similar solution  $q_s$  in (3.9) shows us

$$\begin{aligned} q_s(x, t) &\equiv (3t)^{-1/3} f(x(3t)^{-1/3}) \\ &= \delta(3t \cdot \delta^3)^{-1/3} f((x \cdot \delta)(3t \cdot \delta^3)^{-1/3}) \\ &= \delta(3\tilde{t})^{-1/3} f(\tilde{x}(3\tilde{t})^{-1/3}) = \delta \cdot q_s(\tilde{x}, \tilde{t}), \end{aligned} \quad (4.12a)$$

then from (4.11) we find

$$\tilde{q}_s = q_s(x, t)/\delta = q_s(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad (4.12b)$$

and  $\tilde{q}_s \equiv (3\tilde{t})^{-1/3} f(\tilde{x}(3\tilde{t})^{-1/3})$ . We note that the potential of  $\varphi(\lambda; x, \frac{1}{3})$  is  $q_s(x, \frac{1}{3}) = f(x)$ .

**[Theor.]** The potential is assumed to be self-similar. Then from (4.12b) both solutions of linear sets (4.1) and (4.9) must be related with

$$\varphi(\lambda; x, t) = \varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{t}). \quad (4.13)$$

**[proof]** Because of self-similarity (4.12b), the set of (4.9) is written by  $\varphi_{\tilde{x}} = \mathbf{D}(\tilde{\lambda}; q_s(\tilde{x}, \tilde{t}))\varphi$ ,  $\varphi_{\tilde{t}} = \mathbf{F}(\tilde{\lambda}; q_s(\tilde{x}, \tilde{t}))\varphi$ , with a solution  $\varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{t})$ , because it are invariant with (4.1). **[QED]**

On the  $\tilde{x}$ - $\tilde{t}$  space, we may set  $\tilde{t} = \frac{1}{3}$  and define

$$\psi(\tilde{\lambda}, \tilde{x}) = \varphi\left(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \frac{1}{3}\right), \quad (4.14)$$

then  $\varphi(\lambda; x, t) = \psi(\tilde{\lambda}, \tilde{x})$ . In this case the parameter  $\delta$  must be taken as  $\delta = (3t)^{-1/3}$  and we denote

$$\lambda' = \lambda(3t)^{1/3}, \quad x' = x(3t)^{-1/3}. \quad (4.15)$$

Since  $\psi$  must satisfy (4.1), we obtain

$$\begin{aligned} \varphi_x &= (3t)^{-1/3} \psi_{x'} = \mathbf{D}(\lambda, q_s)\psi, \\ \varphi_t &= (3t)^{-1} \{ -x' \psi_{x'} + \lambda' \psi_{\lambda'} \} = \mathbf{F}(\lambda, q_s)\psi, \end{aligned}$$

where we used differential operators given by

$$\frac{\partial}{\partial t} = (3t)^{-1} \left\{ -x' \frac{\partial}{\partial x'} + \lambda' \frac{\partial}{\partial \lambda'} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = (3t)^{-1/3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}.$$

Because of  $\mathbf{D}(\lambda; q) = (3t)^{-1/3} \mathbf{D}(\lambda'; q')$  and  $\mathbf{F}(\lambda; q) = (3t)^{-1} \mathbf{F}(\lambda'; q')$ , we obtain

$$\psi_{x'} = \mathbf{D}(\lambda', q_s) \psi, \quad \psi_{\lambda'} = \mathbf{R}(\lambda'; q_s) \psi, \tag{4.16 a}$$

where

$$\mathbf{R}(\lambda, x; q) \equiv \{x \cdot \mathbf{D}(\lambda, q_s) + \mathbf{F}(\lambda; q_s)\} / \lambda. \tag{4.16 b}$$

We change  $\{(3t)^{-1/3}x, (3t)^{1/3}\lambda\}$  to  $(x, \lambda)$  for briefness. Since  $\tilde{q}_s = f(x)$ , the matrix  $\mathbf{R}$  can be given by

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -i(4\lambda^2 + x + 2mf^2), & 4\lambda f + 2if' \\ 4mf\lambda - 2imf', & i(4\lambda^2 + x + 2mf^2) \end{bmatrix} - (f'' - 2mq^3 - xf) \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ m, & 0 \end{bmatrix}.$$

If  $f(x)$  satisfy

$$f'' = 2mf^3 + xf + \nu \quad (\nu : \text{const.}), \tag{4.17}$$

we can obtain the following linear set,

$$\partial_x \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\lambda, & f \\ f, & i\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \tag{4.18 a}$$

$$\partial_\lambda \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i(4\lambda^2 + x + 2mf^2), & 4\lambda f + 2if' + \nu \\ 4mf\lambda - 2imf' + m\nu, & i(4\lambda^2 + x + 2mf^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}. \tag{4.18 b}$$

We note that the integrability of formula (4.18) again yields (4.17) which is known as the second Painleve's equation.

Similar treatments can be also performed for the **KdV** equation (3.1). Under transformations of variables,

$$\tilde{x} = \delta \cdot x, \quad \tilde{t} = \delta^3 t, \quad \tilde{q} = q \cdot \delta^{-2}, \tag{4.19}$$

the **KdV** (3.1) is invariant and the solution  $\tilde{q}$  is given by  $\tilde{q} = q(\tilde{x}, \tilde{t})$  or  $q(x, t) = \delta^2 q(\tilde{x}, \tilde{t})$ . This is a self-similar condition and we take the self-similar solution  $q_s$  as

$$q_s = q_s(x, t) \equiv t^{-2/3} f(x^2 t^{-2/3}), \tag{4.20}$$

which really shows  $q_s(x, t) = \delta^2 \tilde{t}^{-2/3} f(\tilde{x}^2 \tilde{t}^{-2/3}) = \delta^2 q_s(\tilde{x}, \tilde{t})$ . The inverse scheme of (4.1) is well-known as

$$\varphi_{xx} = (q_s - \lambda) \varphi, \quad \varphi_t = (4\lambda + 2q_s) \varphi_x - q_{s,x} \varphi, \tag{4.25}$$

where  $\lambda$  is a spectral parameter. Adding to (4.19), we define  $\tilde{\lambda} = \lambda \cdot \delta^{-2}$ . Then (4.25) is again invariant for such a transformation of variables. We see  $\varphi(\lambda; x, t) = \varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{t})$  and choose  $\tilde{t} = 1$  (corresponding to  $\delta = t^{-1/3}$ ). By this setting we can define a function  $\varphi_0(\tilde{\lambda}, \tilde{x}) = \varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{t} = 1)$  and obtain

$$\varphi(\lambda; x, t) = \varphi_0(\lambda t^{2/3}, x t^{-2/3}). \tag{4.26}$$

by which the following linear set of  $\varphi_0$  is obtained,

$$\begin{aligned}\varphi_{0,xx} &= \{q_s(x, t) - \lambda\} \varphi_0, \\ \varphi_{0,\lambda} &= \left\{6 + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{2} + 3q_s(x, t)\right)\right\} \varphi_{0,x} - \frac{3}{2\lambda} q_{s,x} \varphi_0,\end{aligned}\quad (4.27)$$

where  $\lambda t^{2/3}$  and  $xt^{-2/3}$  are denoted by  $\lambda$  and  $x$  for simplicity. The integrability of (4.27) is directly reduced to (3.7).

## §5. K-P Hierarchy

The K-P equation is interesting since its has (2+1) dimensions. It may be seen difficult and its corresponding Painleve formula was not shown yet. According to Sato,<sup>7)</sup> we introduce an scalar psed-differential operator  $\mathfrak{Q}$ ,

$$\mathfrak{Q}(\partial) = \partial + u_2(x)\partial^{-1} + u_3(x)\partial^{-2} + u_4(x)\partial^{-3} + \cdots, \quad (5.1)$$

where  $u_n (n=2, 3, \cdots)$  are functions depending on  $x$  and also on infinitely many variables  $t = (t_0, t_1, t_2, \cdots)$ . The operator  $\mathfrak{Q}^n(\partial)$  has differential parts, which is represented by  $\mathfrak{B}_n = [\mathfrak{Q}^n(\partial)]_+$ . After some calculations, we can get

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1 &= \partial, \\ \mathfrak{B}_2 &= \partial^2 + 2u_2, \\ \mathfrak{B}_3 &= \partial^3 + 3u_2\partial + 3u_3 + 3\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \\ \mathfrak{B}_4 &= \partial^4 + 4u_2\partial^2 + \left(4u_3 + 6\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\partial + 4u_4 + 6\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ &\quad + 4\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 6(u_2)^2, \cdots.\end{aligned}\quad (5.2)$$

**[Theorem]** If eigen functions of  $\mathfrak{Q}$  are introduced by

$$\mathfrak{Q}(\partial)\varphi(\lambda, x) = \lambda\varphi(\lambda, x), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t_n} = \mathfrak{B}_n(\partial)\varphi, \quad (5.3)$$

for  $n=1, 2, \cdots$ , instead for (5.3) we obtain

$$\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t_n} = [\mathfrak{B}_n, \mathfrak{Q}], \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial\mathfrak{B}_n}{\partial t_m} - \frac{\partial\mathfrak{B}_m}{\partial t_n} = [\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_m]. \quad (5.4b)$$

**(proof)** (5.4a) is easily derived by taking derivatives of  $\mathfrak{Q}\varphi \equiv \lambda\varphi$ . The derivative  $\partial^2\mathfrak{Q}/\partial t_m\partial t_n$ , of (5.4a), is arranged to

$$\frac{\partial}{\partial t_m} [\mathfrak{B}_n, \mathfrak{Q}] = [\mathfrak{B}_{n,t_m}, \mathfrak{Q}] + [\mathfrak{B}_n, [\mathfrak{B}_m, \mathfrak{Q}]],$$

hence the compatibility results in

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_m} [\mathfrak{B}_n, \mathfrak{Q}] - \frac{\partial}{\partial t_n} [\mathfrak{B}_m, \mathfrak{Q}] \\ = [\mathfrak{B}_{n,t_m} - \mathfrak{B}_{m,t_n}, \mathfrak{Q}] + [\mathfrak{B}_n, [\mathfrak{B}_m, \mathfrak{Q}]] - [\mathfrak{B}_m, [\mathfrak{B}_n, \mathfrak{Q}]] \\ = [\mathfrak{B}_{n,t_m} - \mathfrak{B}_{m,t_n} + [\mathfrak{B}_m, \mathfrak{B}_n], \mathfrak{Q}] = 0,\end{aligned}$$

where we used Jacobi's relation,

$$[\mathfrak{B}_n, [\mathfrak{B}_m, \varrho]] - [\mathfrak{B}_m, [\mathfrak{B}_n, \varrho]] = [\varrho, [\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_m]]. \quad \text{[QED]}$$

The inverse scheme of the K-P equation

$$(4u_t - u_{xxx} - 3u_x u)_x - 3u_{yy} = 0 \quad (5.5)$$

is given by

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi_{xx} + 2u\varphi, \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_{xxx} + 3u\varphi_x + 3(v + u_x)\varphi, \quad (5.5b)$$

where  $y \equiv t_0$ ,  $t \equiv t_1$  and  $u \equiv u_2$ ,  $v \equiv u_3$ ,

$$2v_x + u_{xx} - u_y = 0. \quad (5.5c)$$

By means of (5.3) the eigenfunction  $\varphi = \varphi(\lambda; x, y, t)$  is defined, and we consider the following transformations of variables,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \beta x, & \tilde{y} &= \beta^2 y, & \tilde{t} &= \beta^3 t, \\ \lambda &= \beta \tilde{\lambda}, & u &= \beta^2 \tilde{u}, & v &= \beta^3 \tilde{v}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

under which relations (5.5) are invariant. If we further assume

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = u(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = v(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (5.7)$$

the eigenfunction is still invariant,

$$\varphi(\lambda; x, y, t) = \varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}). \quad (5.8)$$

For new variables  $\{\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}\}$  we may take  $\tilde{t}$  as const ( $=1/3$ ), while the parameter  $\beta$  must be set as

$$\beta = (3t)^{-1/3}. \quad (5.9)$$

In this case (5.6) defines

$$\lambda' = \lambda(3t)^{1/3}, \quad x' = x(3t)^{-1/3}, \quad y' = \beta^2 y(3t)^{-2/3}, \quad (5.10)$$

while from (5.7) dependent variables satisfy

$$u' = (3t)^{2/3} u, \quad v' = (3t)^{-1} v. \quad (5.11)$$

The eigen function can be denoted by

$$\varphi(\tilde{\lambda}; \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \varphi(\lambda'; x', y', \frac{1}{3}) \equiv \psi(\lambda', x', y'). \quad (5.12)$$

By eqs. (5.10) and (5.12) we may change the derivatives as

$$\frac{\partial}{\partial x} = (3t)^{-1/3} \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = (3t)^{-2/3} \frac{\partial}{\partial y'},$$



$$\frac{\partial}{\partial t} = (3t)^{-1} \left( \lambda' \frac{\partial}{\partial x'} - x \frac{\partial}{\partial x'} - 2y' \frac{\partial}{\partial y'} \right). \quad (5.13)$$

Then eqs. (5.5) are transformed to

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y'} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + 2u' \psi, \\ \lambda' \frac{\partial \psi}{\partial \lambda'} &= \left\{ \frac{\partial^3}{\partial x'^3} + 2y' \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (3u' + x') \frac{\partial}{\partial x'} + \left( 3v' + 3 \frac{\partial u'}{\partial x'} + 4y' u' \right) \right\} \psi, \\ 2 \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{\partial u'}{\partial y'} &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

The integrability of (5.14) is reduced to

$$\{u_{xxx} + (12u + 4x)u_x + 8yu_y + 12u\}_x + 3u_{yy} = 0, \quad (5.15)$$

where we replaced  $u', v'$  and  $x', y'$  with  $u, v$  and  $x, y$ .

Now, denoting  $u'(x', y', \frac{1}{3}) = u_s(x', y')$  and from (5.7) and (5.11), we can see

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= (3t)^{-2/3} u_s(x', y'), \\ v(x, y, t) &= (3t)^{-1} v_s(x', y'). \end{aligned} \quad (5.16)$$

After substitution of (5.16) into the K-P eq., we obtain

$$\{u_{xxx} + (12u + 4x)u_x + 8yu_y + 4u\}_x + 3u_{yy} = 0, \quad (5.17)$$

which is slightly different from (5.15) but it is trivially removed by adding a shift to  $x$ .

## §6. Concludings and Remarks

We mentioned the derivation of **P-ODE's** by means of similarities from related **PDE's**, assumed to be in a class of equations solvable by means of the **IST**. Ablowitz et al.<sup>4,5)</sup> had found a connection between the **PDE's** and the **P-ODE's**, by the dressing method, developed by Zakharov and Shabat.<sup>8)</sup>

In this paper we extend the derivation of the **P-ODE** from the **PDE's** with a coupled set similar to the **IST** formula, where an invariance of eigenfunction is introduced. This was also applied to the K-P equation in (2+1) dimensions. It is important to obtain such coupled sets of **P-ODE**, because Ablowitz had developed the monodromy inverse transform (**MIT**), by which he showed it possible to obtain a global solution of Painleve transcendents.<sup>9)</sup>

### References

- 1) E. L. Ince: "ordinary differential equations", (1927), Dover, NY (1956)
- 2) S. V. Coggshell and R. A. Axford: "Lie group invariance of radiation hydrodynamics equation and their associated similarities", Phys. Fluids **29(8)** (1986) 2398
- 3) M. Lakshmanan and P. Kaliappan: "Lie transformations, nonlinear evolution equations, and Painleve forms", J. Math. Phys., **24(4)** (1983) pp.795-

- 4) M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur: Lett. Nuovo. Cimento **23** (1978) 333
- 5) M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur: "a connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations", J. Math. Phys., **21** (1980) 715-721
- 6) H. Flaschka and A. C. Newell: Commun. Math. Phys. **76** (1980) 67
- 7) M. Sato: RIMS Koukyuroku (Kyoto Univ.) **439** (1981) 30
- 8) V. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl., **8** (1974) 43
- 9) M. J. Ablowitz: "Painleve Equations and the inverse scattering monodromy transforms", private communications.

### Appendix-A Partial Differential Equation and Characteristic Coordinates

We consider the **PDE** as

$$z = F\left(x, \frac{\partial z}{\partial x}\right) + G\left(y, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (\text{A. 1})$$

The complete solution containing two arbitrary constants is constructed by

$$z \equiv f(x, a) + g(y, b), \quad (\text{A. 2})$$

where  $f(x, a)$  and  $g(y, b)$  are solutions of ordinary differential equations,

$$X = F\left(x, \frac{\partial X}{\partial x}\right), \quad Y = G\left(y, \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \quad (\text{A. 3})$$

respectively. On the other hand, the general solution must contain arbitrary functions. To get the general solution  $z = f(x, y)$ , we use the equation

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \quad (\text{A. 4})$$

which has a form solved as to the differentials of  $z$ . We can denote the solution as the 1-parameter family of  $t$ ,

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \kappa(t).$$

Then  $z = f(x, y)$  is understood a curve on which  $z = \kappa(t)$  crosses a cylinder  $\{(\phi(t), \psi(t)) | t \in \mathbf{R}\}$ . This means that a point on the solution surface moves as  $t$ . Hence the variations of  $z$ :  $dz = f_x dx + f_y dy$  is obtained by the total derivative as to  $t$ , we get

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt}. \quad (\text{A. 5})$$

Comparing this with eq. (A.4), we obtain

$$R(x, y, z) = \frac{dz}{dt}, \quad P(x, y, z) = \frac{dx}{dt}, \quad Q(x, y, z) = \frac{dy}{dt},$$

or equivalently

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}, \quad (\text{A. 6})$$

which is called as the characteristic equations of (A.4). If we denote two solutions of (A.6) as

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2, \quad (\text{A. 7})$$

the general solution is given by

$$F(u, v) = 0, \tag{A.8}$$

where  $F$  is an arbitrary function.



# クラッド短円柱の非定常熱応力

五 嶋 孝 仁

## 1. 緒 言

ディーゼル機関のピストンヘッドには、ステンレス鋼をクラディングしたものが多い。このようなクラッド端面が燃焼により過渡的な不均一加熱をうけたとき、不均一温度場による熱応力に加えて線膨張係数の差異に起因する相互拘束による熱応力が付加されて大きな熱応力が生じ破損の原因ともなりうる。このためクラッド材の熱応力に関しては今までに多くの報告があるが、端面が接合面となっている場合の報告例は少なく、接合面に熱発生がある複合長円柱や短柱の非定常熱応力問題を取り扱った石田<sup>1)2)</sup>の報告や端面が剛体に接合された端円柱の熱応力を取り扱った小泉ら<sup>3)</sup>の報告がある程度である。著者<sup>5)</sup>は先に端面が接合されたクラッド短円柱の定常熱応力について報告したが、時間的に温度変化する非定常熱応力についての報告は見あたらないようである。

本研究ではピストンヘッドに関連して、局部加熱されるクラッド端面を有する短円柱の非定常熱応力を解析し、数値計算により温度分布や熱応力分布を明らかにした。解析にあたっては慣性項を省略した準静的問題と仮定し、材料の物性値は温度によらず一定とした。さらにステンレス鋼と炭素鋼からなる実際のクラッド短円柱試験片についてそのクラッド端面が局部加熱されるときの非定常熱応力を、抵抗ひずみゲージを用いて測定し、測定値を数値計算結果と比較して、本解析結果を用いて実際の試験片に生ずる熱応力を評価した一例を示した。

## 2. 理論解析

### 2.1 温度解析

温度解析にあたっては図1に示す円柱座標系  $(r, z)$  を用い、以下の無次元変数を採用する。

$$\begin{aligned} \rho &= r/r_0, \quad \zeta = z/r_0, \quad \tau = \alpha_2 t/r_0^2, \quad B_0 = H_0 r_0/K_2, \quad h = H/r_0 \\ \eta &= H_1/r_0, \quad K = K_2/K_1, \quad \alpha = \alpha_2/\alpha_1, \quad \eta_1 = \eta/2, \quad \eta_2 = (h - \eta)/2 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad \delta \alpha_j = \begin{cases} \alpha, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 $t$  は時間、 $\alpha_j$  は温度伝導率、 $K_j$  は熱伝導率、 $H_0$  は非加熱端面での熱伝達率を示し、添字  $j$  は  $j=1$  および  $2$  がそれぞれクラッド材および基材に対応する。また、本解析では  $\alpha > 1$  と仮定する。

クラッド端面に時間とともにステップ状に変化する軸対称熱流束  $Q(\rho)$  が流入する場合を考える。このとき、熱伝導方程式を次式で示される。

$$\Delta T_j = \delta \alpha_j \frac{\partial T_j}{\partial \tau}, \quad (j=1, 2) \quad (1)$$

クラッド短円柱は両材料が接合された初期状態において無応力状態であつて一様な温度とすれば、初期条件は次式で与えられる。

$$(T_j)_{\tau=0} = 0, (j=1, 2) \quad (2)$$

基材側の非加熱端面では熱伝達があり、円周面は断熱されていると仮定すれば、熱的境界条件は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = -\frac{r_0}{K_1} Q(\rho) H(\tau) \quad (3);$$

$$\left(\frac{\partial T_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=h} = -B_0 (T_2)_{\xi=h} \quad (4)$$

$$(T_1)_{\xi=\eta} = (T_2)_{\xi=\eta} \quad (5);$$

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial \xi}\right)_{\xi=\eta} = K \left(\frac{\partial T_2}{\partial \xi}\right)_{\xi=\eta} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial T_j}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = 0, (j=1, 2) \quad (7)$$

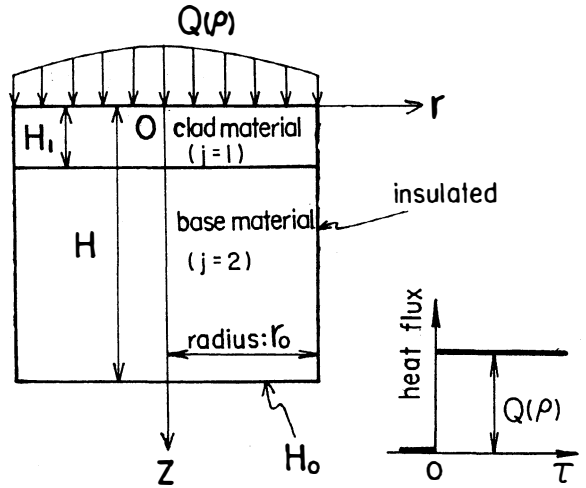


図1 座標系と加熱条件

ここで  $H(\tau)$  はヘビサイドのステップ関数である。

式(2)を考慮して式(1)および式(3)–(7)を  $\tau$  に関してラプラス変換し、さらに  $z$  軸に関する対称性と式(5)を考慮して  $\rho$  に関して有限ハンケル変換を施せば、境界条件を満足する像空間での解が容易に求まる。得られた解をハンケル逆変換し、さらにラプラス像空間における解の特異点の位置に注意してラプラス逆変換すれば、温度解  $T_j$  が次式のように求められる。

$$T_j = \frac{4r_0}{K_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{Q}(\xi_k)}{J_0^2(\xi_k)} J_0(\xi_k \rho) \sum_n \frac{\beta_n F_j(\zeta)}{f'(x_n)} \omega_n(\tau) \quad (8)$$

ここで

$$\omega_n(\tau) = 1 - e^{-(\xi_k^2 + x_n^2)\tau/x} \quad (9); \quad \widehat{Q}(\xi_k) = \int_0^1 \rho Q(\rho) J_0(\rho \xi_k) d\rho \quad (10)$$

$\xi_k$  は  $J_1(\xi_k) = 0$  の第  $k$  番目の正根であり ( $\xi_0 = 0$ )、 $J_N(\ )$  は  $N$  次の第 1 種ベッセル関数を表わす。また  $F_j(\zeta)$  および  $f(x_n)$  は次式のように表わされる。

1)  $x_n < \xi_k(x-1)^{1/2}$  のとき

$$F_1(\zeta) = M_x \cos(\eta - \zeta)x_n + K N_x (\beta_n/x_n) \sin(\eta - \zeta)x_n \quad (11)$$

$$F_2(\zeta) = \beta_n \cosh(h - \zeta)\beta_n + B_0 \sinh(h - \zeta)\beta_n$$

$$M_x = \beta_n \cosh(h - \eta)\beta_n + B_0 \sinh(h - \eta)\beta_n, \quad N_x = \beta_n \sinh(h - \eta)\beta_n + B_0 \cosh(h - \eta)\beta_n$$

$$\beta_n = \{(1 - 1/x)\xi_k^2 - x_n^2/x\}^{1/2}$$

$$x_n : f(x_n) = x_n M_x \sin \eta x_n - K \beta_n N_x \cos \eta x_n = 0 \text{ を満足する } n \text{ 番目の正根 (各 } \xi_k \text{ に対し)}$$

2)  $X_n > \xi_k(x-1)^{1/2}$  のとき

$$F_1(\zeta) = L_x \cos(\eta - \zeta)x_n - KR_x(\beta_n/x_n) \sin(\eta - \zeta)x_n \quad (12)$$

$$F_2(\zeta) = \beta_n \cos(h - \zeta)\beta_n + B_0 \sin(h - \zeta)\beta_n$$

$$L_x = \beta_n \cos(h - \eta)\beta_n + B_0 \sin(h - \eta)\beta_n, \quad R_x = \beta_n \sin(h - \eta)\beta_n - B_0 \cos(h - \eta)\beta_n$$

$$\beta_n = \{x_n^2/x - (1 - 1/x)\xi_k^2\}^{1/2}$$

$x_n$ :  $f(x_n) = x_n L_x \sin \eta x_n + K \beta_n R_x \cos \eta x_n = 0$  を満足する  $n$  番目の正根 (各  $\xi_k$  に対し)

## 2.2 熱応力解析

熱応力解析にあたっては、 $\zeta_1 = \eta/2 - \zeta$ ,  $\zeta_2 = (h - \eta)/2 + \eta - \zeta$  のようにそれぞれの短円柱の中心を原点とした座標系に座標変換する。いま  $u_{rj}$ ,  $w_{zj}$  をそれぞれ  $\rho$ ,  $\zeta_j$  方向変位とし、 $\nu_j$ ,  $\alpha_j$  をそれぞれ材料のポアソン比、線膨張係数とすれば、変位の熱弾性基礎式の解は次式で与えられる。<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{u_{rj}}{r_0} &= \frac{\partial \Omega_j}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi_{0j}}{\partial \rho} + \zeta_j \frac{\partial \phi_{3j}}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \phi_{4j}}{\partial \zeta_j} \\ \frac{w_{zj}}{r_0} &= \frac{\partial \Omega_j}{\partial \zeta_j} + \frac{\partial \phi_{0j}}{\partial \zeta_j} + \zeta_j \frac{\partial \phi_{3j}}{\partial \zeta_j} - \rho \frac{\partial \phi_{4j}}{\partial \rho} - (3 - 4\nu_j)\phi_{3j} - 4(1 - \nu_j)\phi_{4j} \end{aligned} \quad (j=1, 2) \quad (13)$$

ここで、 $\Omega_j$ ,  $\phi_{ij}$  は次式を満足する。

$$\Delta_j \Omega_j = \frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \alpha_j T_j, \quad \Delta_j \phi_{ij} = 0, \quad (j=1, 2)(i=0, 3, 4) \quad (14)$$

$$\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j^2}$$

また、クラッド短円柱には外力が働かず、 $j=1$  と  $j=2$  の短円柱が端面で完全に接合されているとすれば、力学的境界条件は次式のように表わされる。

$$(\sigma_{z1})_{\zeta=0} = (\tau_{rz1})_{\zeta=0} = (\sigma_{z2})_{\zeta=h} = (\tau_{rz2})_{\zeta=h} = 0 \quad |\rho| \leq 1 \quad (15)$$

$$(\sigma_{z1})_{\zeta=\eta} = (\sigma_{z2})_{\zeta=\eta}, \quad (\tau_{rz1})_{\zeta=\eta} = (\tau_{rz2})_{\zeta=\eta}, \quad |\rho| \leq 1 \quad (16)$$

$$(u_{r1})_{\zeta=\eta} = (u_{r2})_{\zeta=\eta}, \quad (w_{z1})_{\zeta=\eta} = (w_{z2})_{\zeta=\eta}, \quad |\rho| \leq 1 \quad (17)$$

$$(\sigma_{r1})_{\rho=1} = (\sigma_{r2})_{\rho=1} = 0, \quad |\zeta_j| \leq \eta_j \quad (18)$$

$$(\tau_{rz1})_{\rho=1} = (\tau_{rz2})_{\rho=1} = 0, \quad |\zeta_j| < \eta_j \quad (19)$$

本解析モデルの軸対称性および有限性を考慮して、式(14)を満足する熱弾性変位ポテンシャル  $\Omega_j$  および応力関  $\phi_{ij}$  を次式のように置く<sup>3)</sup>。

$$\Omega_j = -\frac{1 + \nu_j}{1 - \nu_j} \alpha_j \frac{4r_0}{K_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{Q}(\xi_k)}{J_0^2(\xi_k)} J_0(\xi_k \rho) \sum_n \frac{\beta_n F_j(\zeta) \omega_n(\tau)}{(\beta_n^2 + \xi_k^2) f'(x_n)} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \phi_{0j} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m \rho)}{\beta_m J_1(\beta_m)} \left\{ A_{mj} \frac{\sinh(\beta_m \zeta_j)}{\cosh(\beta_m \eta_j)} + B_{mj} \frac{\cosh(\beta_m \zeta_j)}{\sinh(\beta_m \eta_j)} \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{nj} \frac{I_0(\gamma_{nj} \rho)}{\gamma_{nj}^2 I_1(\gamma_{nj})} \sin(\gamma_{nj} \zeta_j) + D_{nj} \frac{I_0(\delta_{nj} \rho)}{\delta_{nj}^2 I_1(\delta_{nj})} \cos(\delta_{nj} \zeta_j) \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\phi_{3j} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_m \rho)}{J_1(\beta_m)} \left\{ E_{mj} \frac{\sinh(\beta_m \zeta_j)}{\sinh(\beta_m \eta_j)} + F_{mj} \frac{\cosh(\beta_m \zeta_j)}{\cosh(\beta_m \eta_j)} \right\} \quad (22)$$

$$\phi_{4j} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ G_{nj} \frac{I_0(\delta_{nj}\rho)}{\delta_{nj}^2 I_1(\delta_{nj})} \sin(\delta_{nj}\zeta_j) + H_{nj} \frac{I_0(\gamma_{nj}\rho)}{\gamma_{nj}^2 I_1(\gamma_{nj})} \cos(\gamma_{nj}\zeta_j) \right\} \quad (23)$$

ここで、 $A_{mj}, B_{mj}, C_{nj}, D_{nj}, E_{mj}, F_{mj}, G_{nj}, H_{nj}$  は未定定数であり、 $J_N(\cdot), I_N(\cdot)$  はそれぞれN次の第一種ベッセル関数、変形ベッセル関数を表わす。また、 $\beta_m$  は  $J_0(\beta) = 0$  の第m番目の正根であり、 $\gamma_{nj} = (2n-1)\pi/(2\eta_j)$ 、 $\delta_{nj} = n\pi/\eta_j$  である。

式(20)–(23)を式(13)に代入すれば変位の表示式が得られ、さらにデュアメル・ノイマン則に代入すれば熱応力の表示式を得る。このようにして求まった応力および変位を境界条件式(15)–(19)に代入する。さらに、 $I_0(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $\gamma_{nj}\rho I_1(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $I_0(\delta_{nj}\rho)$ 、 $\delta_{nj}\rho I_1(\delta_{nj}\rho)$  を  $J_0(\beta_m\rho)$  に関して、 $I_1(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $\gamma_{nj}\rho I_0(\gamma_{nj}\rho)$ 、 $I_1(\delta_{nj}\rho)$ 、 $\delta_{nj}\rho I_0(\delta_{nj}\rho)$  を  $J_1(\beta_m\rho)$  に関してフーリエ・ベッセル展開し、 $\cosh(\beta_m\zeta_j)$  と  $\beta_m\zeta_j \sinh(\beta_m\zeta_j)$  については  $\cos(\delta_{nj}\zeta_j)$  または  $\cos(\gamma_{nj}\zeta_j)$  に関し、 $\sinh(\beta_m\zeta_j)$  と  $\beta_m\zeta_j \cosh(\beta_m\zeta_j)$  については  $\sin(\gamma_{nj}\zeta_j)$  または  $\sin(\delta_{nj}\zeta_j)$  に関してフーリエ展開すれば、それぞれの境界条件より  $\rho$  または  $\zeta_j$  に独立に未定定数に関する無限組の16元連立方程式が得られる。この連立方程式をさらに整理しまとめれば、結局本問題は次式のような形の  $F_{mj}, E_{mj}$  に関する四重の無限連立一次方程式を解く問題に帰着される。

$$F_{kj} + \sum_{m=1}^{\infty} \{S_{1j}F_{m1} + U_{1j}E_{m1} + S_{2j}F_{m2} + U_{2j}E_{m2}\} = X_{kj} \quad (j=1, 2; k=1, 2, 3, \dots) \quad (24)$$

$$E_{kj} + \sum_{m=1}^{\infty} \{Q_{1j}F_{m1} + V_{1j}E_{m1} + Q_{2j}F_{m2} + V_{2j}E_{m2}\} = Y_{kj} \quad (j=1, 2; k=1, 2, 3, \dots) \quad (25)$$

ここで、 $S_{ij}, U_{ij}, Q_{ij}, V_{ij}$  ( $i=1, 2$ ) および  $X_{kj}, Y_{kj}$  は既知関数であるが、ここではその表示式は省略する。式(24)(25)を数値的に解けば未定定数が決定され、熱応力が求められる。

### 3. 数値計算

数値計算例としては後述の実験で用いる試験片材料と対応して、ステンレス鋼と炭素鋼からなるクラッド短円柱を採用した。それぞれの材料の物性値を表1に示す。また簡単な場合として無次元加熱半径  $\rho_0$  の円形領域のみが一定熱流束  $Q_0$  で局部加熱される場合、すなわち  $Q(\rho) = Q_0(|\rho| \leq \rho_0)$  の場合について数値計算を行なった。このとき式(10)は次式ようになる。

$$\bar{Q}(\xi_k) = K_2 T^* \rho_0 J_1(\xi_k \rho_0) / (\xi_k r_0), \quad T^* = Q_0 r_0 / K_2 \quad (26)$$

また以下の数値計算例ではすべて、 $\rho_0 = 0.4$ 、 $B_0 = 1.0$ 、 $h = 2.0$  とした。まず、図2、3には接合面上の軸応力分布およびせん断応力分布の時間的変化を示す。 $\tau = 1.0$  ですでに定常値に達している。加熱部の軸方向変位のため、加熱半径内では引張の軸応力を示し、非加熱部の大きな拘束のため加熱半径よりも大きな半径の領域では圧縮の軸応力を示している。またせん断応力は加熱半径付近で最大を示している。図4および図5には中心軸上の軸応力分布および半径

	clad material: j=1 stainless-steel	base material: j=2 carbon-steel
$\alpha_j$	$17.9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$	$12.2 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
$E_j$	193 GPa	207 GPa
$K_j$	16.3 W/(mK)	53.4 W/(mK)
$\kappa_j$	$4.4 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$14.7 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
$\nu_j$	0.3	0.3

表1 材料の物性値



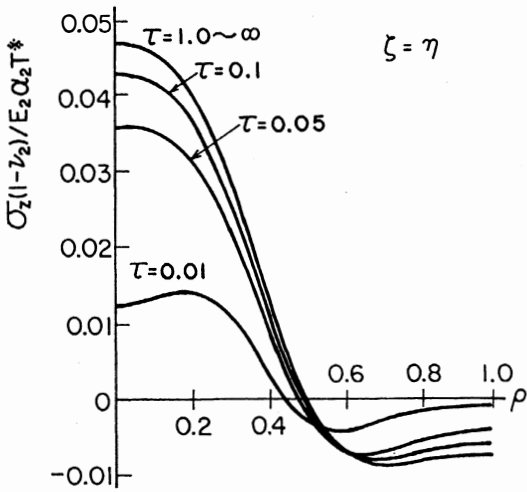


図2 接合面の軸応力分布の時間的変化

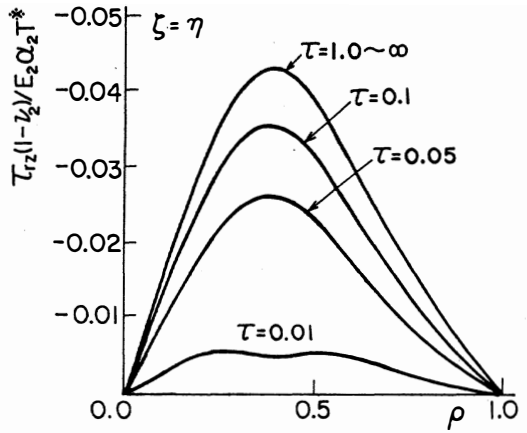


図3 接合面のせん断応力分布の時間的変化

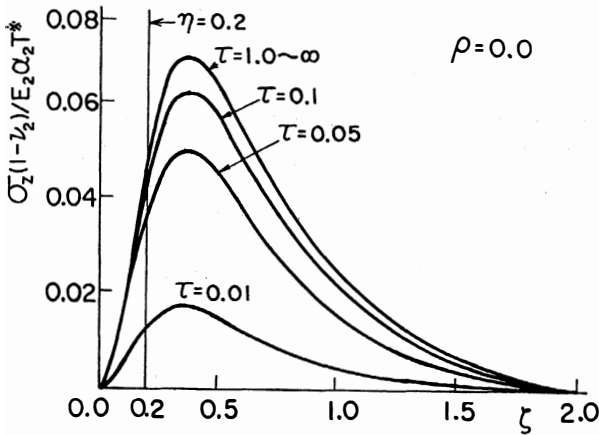


図4 中心軸上の軸応力分布の時間的変化

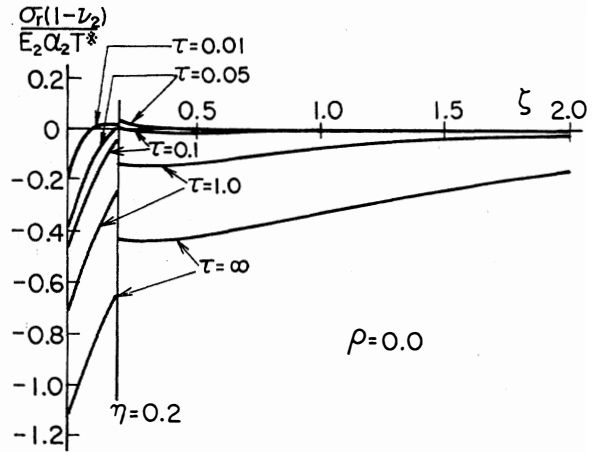


図5 中心軸上の半径(円周)応力分布の時間的変化

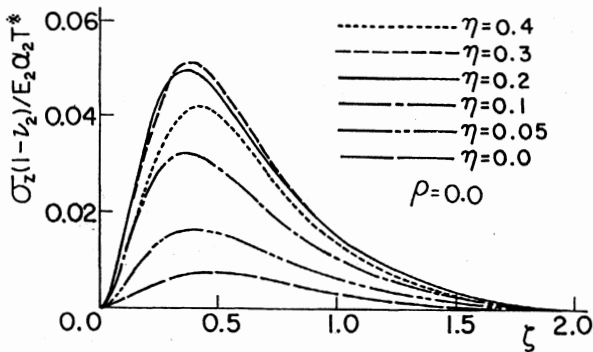


図6 クラッド部厚さが中心軸上の軸応力分布に及ぼす影響

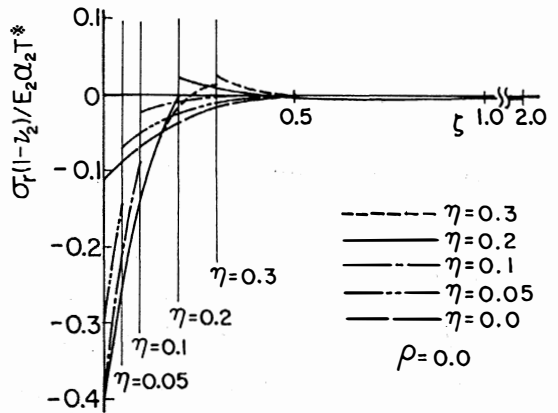


図7 クラッド部厚さが中心軸上の半径(円周)応力分布に及ぼす影響

(円周) 応力分布の時間的変化を示す。最大圧縮応力は加熱面中心での半径(円周) 応力に生じ、最大引張応力は中心軸上の  $\zeta=0.4$  付近での軸応力に生じている。以上の計算結果はすべてクラッド部と円柱半径の比  $\eta=0.2$  の場合の結果であるが、図6, 7には  $\tau=0.05$  の場合について中心軸上の軸応力および半径(円周) 応力分布に及ぼす  $\eta$  の影響を示す。クラッド端面中心の最大圧縮応力の値は、クラッド部が厚くなる程大きくなるが、 $\eta \geq 0.1$  ではほぼ一定値に漸近している。一方最大引張応力は本数値例ではクラッド部の厚さにはほとんど関係なく、いずれの場合にもほぼ  $\zeta=0.4$  付近での軸応力に生じており、その大きさはクラッド部が厚くなる程大きくなるが、 $\eta=0.3$  で最大を示し  $\eta > 0.3$  ではかえって小さくなる傾向を示している。

#### 4. 実 験

図8に示すようなクラッド短円柱のステンレス端面円形領域が溶融スズ(270°C)で過渡的に局部加熱される場合<sup>5)</sup> の非定常熱応力を測定した。熱応力測定法は小泉<sup>6)7)</sup> によって考案された熱電対挿入型抵抗ひずみゲージを用いた平均法による方法を採用した。すなわち図9のような熱電対を挿入した連続5枚組ゲージを作成し、このうちB, Dのゲージを図10のように実際の熱応力測定に使い、残りA, C, Eのゲージの見かけのひずみを測定し、AとC(CとE)の平均値をB(D)の見かけのひずみとし

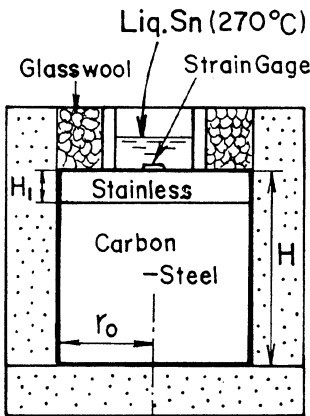


図8 試験片

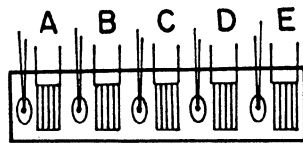


図9 高温用5枚組ゲージ

$r_0 = 50\text{mm}$ ,  $H_1 = 10\text{mm}$   
 $H = 100\text{mm}$

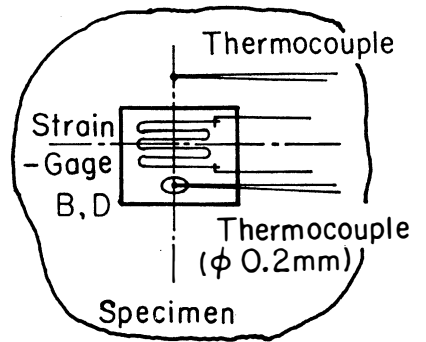


図10 熱応力測定用ゲージ

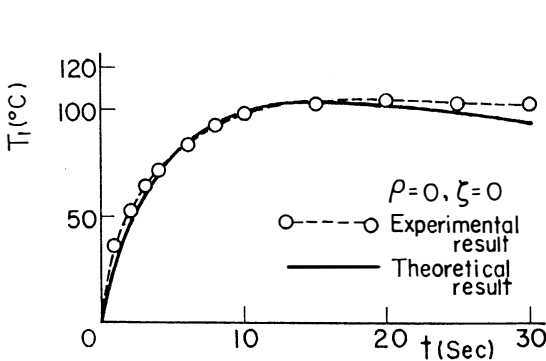


図11 加熱面中心温度の時間的変動

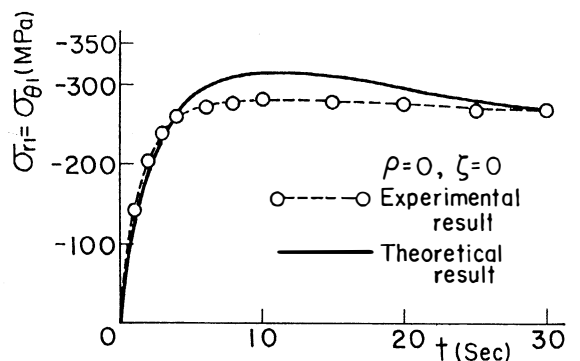


図12 加熱面中心での熱応力の時間的変動

て利用する方法を用いた。なお挿入した熱電対によりゲージ箔温度を推定している。

見かけのひずみの測定はA, C, EのゲージをB, Dゲージ接着部材料と同じ材料から成る微小試験片に接着し、恒温槽で長時間一定温度に保つことにより定常温度場を作り熱応力が無い状態でのひずみ（見かけのひずみ）を各設定温度毎に静ひずみ計で測定する。熱応力の測定は熔融スズで急激に加熱された瞬間からひずみゲージの出力（相当ひずみ）を動ひずみ則定器で温度変動とともに測定し、電磁オシログラフおよびペン書きレコーダーで過渡的な変動を記録する。得られた相当ひずみの結果を予め測定された見かけのひずみとゲージ素子温度結果を用いて温度補償した後、熱応力の結果を得る。

図11および図12には加熱面中心での温度および熱応力の時間的変動について、測定値と理論値の比較を示す。両者にはほぼよい一致がみられる。

## 5. 結 言

端面が局部加熱されるクラッド短円柱の非定常熱応力を解析し、ステンレス鋼と炭素鋼から成るクラッド短円柱について数値計算および測定実験を行ない次の結論を得た。

- (1) 接合面付近の基材内部で軸方向に最大引張応力が生ずる。また接合面上の加熱半径付近で最大のせん断応力が生ずる。
- (2) 最大応力の発生位置はクラッド厚さによってあまり影響を受けないが、ある値までの範囲ではクラッド部が厚くなるほど最大応力は大きくなる。
- (3) 熔融金属で局部加熱されるクラッド短円柱の加熱面中心の最大圧縮応力は、本解析結果でかなり正確に評価できる。

### 参 考 文 献

- 1) 石田, 機論, **52-476**, A (1986), 788.
- 2) 石田, 機論, **51-471**, A (1985), 2459.
- 3) Koizumi, T., Ishikawa, O. and Shibuya, T., J. Thermal Stress, **4-2** (1981), 249.
- 4) Koizumi, T., Z. AMM., **50** (1970), 747.
- 5) 五嶋・ほか2名, 非破壊検査, **23-11** (1974), 601.
- 6) 小泉, 非破壊検査, **11-3** (1962), 107.
- 7) 小高・小泉, 非破壊検査, **17-3** (1968), 484.

## Transient Thermal Stresses in a Finite Clad Cylinder

Takahito GOSHIMA

This paper deals with the transient thermal stresses in a finite clad circular cylinder, which is joined two finite circular cylinders of different materials together on the ends, subjected to partially and axisymmetrically heated on the clad end. The thermoelastic problem is formulated in terms of a thermoelastic displacement potential and three harmonic stress functions. Numerical calculations and the measurements by using resistance strain gages are carried out for the case of the clad cylinder which consists of stainless-steel and carbon-steel. The theoretical results were in agreement with the experimental ones.

[英文和訳]

### クラッド短円柱の非定常熱応力

五 嶋 孝 仁

端面が接合された異種材料の短円柱から成るクラッド短円柱がそのクラッド端面を非定常局部加熱されるときの非定常熱応力を取り扱う。本熱弾性問題の解析は熱弾性変位ポテンシャルと3つの調和応力関数を用いて行う。とくに、ステンレスクラッドと炭素鋼から成るクラッド短円柱について、数値計算を行い、また、ひずみゲージを用いて非定常熱応力の測定も合わせて行った。その結果、理論値と測定実験結果とは良い一致が見られた。

# ギ酸の接触分解に関する研究

中村 優子, 蓮覚寺聖一, 井上 正美, 西部 慶一

## 緒 言

メタノールやギ酸を貴金属面に接触させると、接触分解による脱水素化反応により水素吸着が起こることが知られている。パラジウムを用いて接触分解により生じた吸着水素を金属内に吸蔵させれば、例えば燃料電池の水素源として簡単に利用できるなどの利点が期待できる。

著者らは燃料電池用水素極へ利用する目的で、水素原料としてメタノール、ホルムアルデヒドおよびギ酸について、パラジウムを基体とした貴金属黒上での接触分解反応を追及し、液組成をアルカリとの混合液にした場合、貴金属黒の中では比較的ポピュラーな白金黒が接触分解には最も活性であることを見いだしてきた<sup>1),2)</sup>。一方、酸性溶液中で水素原料のギ酸はメタノールの酸化、および分解反応の中間生成物で、その H<sub>2</sub> への分解過程について多くの研究が報告されてきたが<sup>3),4)</sup>、アルカリ中での挙動についてはあまり研究されていない。

本報告では、電解液にアルカリを用いれば燃料電池構成材料の耐蝕性の面で有利であると思われるので、電気伝導性の良い30%水酸化カリウム中で白金黒付きパラジウムを用い、ギ酸の接触分解反応を検討した。

## 1. 実験方法

### 1.1 電 極

10×20mm のパラジウム板 (99.95% ニラコ (株) 製) に白金黒を付与し電極とした。また、接触分解水素量とギ酸濃度との関係を求める実験では、同じ面積のパラジウム板にパラジウム黒を付け、さらにその上に白金黒を付けた電極を用いた。

### 1.2 電 解 液

#### 1.2.1 接触分解用溶液

旭ガラス (株) 製特級水酸化カリウム30%溶液に、関東化学 (株) 製特級試薬ギ酸 (精製は行わなかった) を所定の濃度になるよう混合した。

#### 1.2.2 水素吸蔵量測定および Voltammogram 測定用電解液

1 mol · dm<sup>-3</sup> 水酸化カリウム溶液を 500 mA × 20 hr 前電解した後、充分脱気を行なって用いた。

### 1.3 接 触 分 解

密閉容器中で所定の濃度のギ酸溶液に電極を一定時間浸漬し接触分解を行なわせた。

### 1.4 接触分解に伴う水素量測定

接触分解後の試料を取り出し、蒸留水でよく水洗し、水素吸蔵量測定用電解液中へ移し、対極に白金を用いて、数 mA · cm<sup>-2</sup> の電流値で陽分極し、パラジウム中に吸蔵した水素をすべて放出したと思われる +500 mV vs. Pd-H 電極 (同一溶液中) に達するまでに要した電気量を、試料に吸蔵された水

素量 (A・sec) とした。

接触分解中、気相中への逸散水素量はガスクロ (日立製作所製263-50型) にて測定した。

### 1.5 接触分解後の試料の Voltammogram

接触分解後試料を取りだし、蒸留水で水洗後、 $1 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$  水酸化カリウム溶液中で陽分極を行なった。参照電極として Pd-H 電極を用い、対極には白金を用いた。Voltammogram は北斗電工(株)製ポテンシostat HAB-151 を用いた。

## 2. 結果および考察

Fig. 1 に、ギ酸と30%水酸化カリウム溶液の混合比を変え6hr接触分解をおこなった場合のパラジウム板に吸蔵された水素量の変化の様子を示す。ギ酸濃度15~20%で最大吸蔵量が得られ、それより高濃度側では濃度増加につれて吸蔵量は急激な減少傾向を示した。

Fig. 2 に各混合液中での吸蔵水素量の経時変化を示す。ギ酸濃度40vol%では数秒以内に吸蔵量が立ち上がり、その後変化はほとんど見られず、定常値に達した。一方、10、15vol%の場合、2~3hrまでは徐々に吸蔵量が増加し、その後極めてゆっくりと増加を続けた。しかし長期間放置後の吸蔵量を測定すると減少が見られた。これは接触分解時、気相中への散逸水素量は無視できる量であったが、序々に空気中の酸素が混入したためと思われる。

これらのことより、ギ酸濃度20%近傍を境に低濃度領域と高濃度領域では接触分解過程が異なると考えられる。

Fig. 3 にギ酸濃度40%溶液に各時間浸漬し接触分解を行なわせた試料を充分水洗後、ギ酸を含まないアルカリ液中で測定した電流-電位曲線を示す。どの曲線に対しても (A)、(B) 2種の酸化ピークが得られた。この2個のピーク群は2回目以降の走査では完全に消失しており、このピークが金属面の酸化などによるものではなく、表面吸着種によるものと推定される。電位が貴の領域の0.65V vs. Pd-H (同一溶液中) 付近のピーク (A) については接触分解時間に依存せず、(B) については分解に要した時間が短いほど (A) 側にシフトし、接触分解時間依存性が見られた。

Capon や Parson は<sup>5)</sup>、ギ酸の電解酸化に

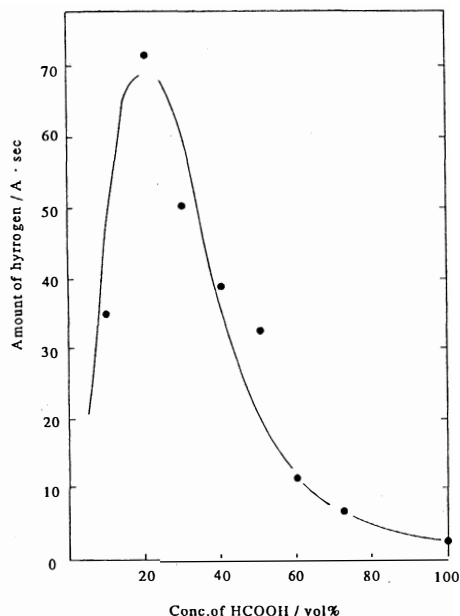


Fig. 1 Relation between concentration of formic acid in 30% KOH solution and amount of absorbed hydrogen in Pd plate

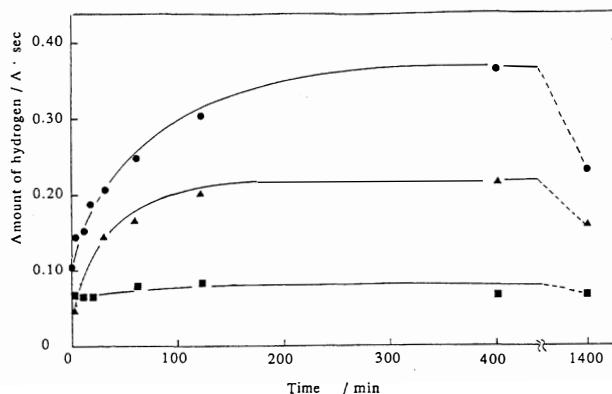


Fig. 2 Time course of the amount of absorbed hydrogen in Pd plate in HCOOH-30% KOH  
 ▲: 10vol% HCOOH ●: 15vol% HCOOH  
 ■: 40vol% HCOOH

対し、



を示し、(1)式で生じた反応中間体の吸着種  $\times\text{COOH}$  が(2)式に従って  $\text{CO}_2$  を生じる反応が主経路であるが、吸着水素が存在する水素領域では(1)式で生じた  $\times\text{COOH}$  が吸着水素と反応し強吸着種  $\times\text{COH}$  に変わり表面被毒種となって蓄積し酸化反応を阻害するとしている。彼らの提唱した酸化経路を妥当であるとすれば、接触分解反応に対してパラジウムを用いた場合、金属内部に取り込まれる原子状水素を  $[\text{H}]$  で表すと、(1)に対して解離反応、



および(2)、(3)式に対して



と書き換えることができる。従って、(A)のピーク群は反応(4)における反応中間体  $\times\text{COOH}$  生成によるものであり、(B)のピーク群は(6)式に従い  $\times\text{COOH}$  より派生した反応阻害物質によるものと考えられる。このことは、パラジウム内への吸着水素量が接触分解時間に関係なく僅かであること (Fig. 1) より、電極表面に被毒物質を生成し、水素が吸着されにくくなった実験事実と一致する。

また(A)のピークが数秒の短時間で得られることより、(4)式の反応速度は早いと考えられる。

Fig. 4、および Fig. 5 にアルカリ溶液中のギ酸濃度の比較的低い5%、および15%の場合の各接触時間における電流-電位曲線を示す。両曲線とも40%の場合に見られた0.65V vs. Pd-H (同一溶液中) 付近での吸着種の酸化に相当する(A)のピーク群が得られるが、(B)に相当するピーク群は検出されなかった。なお比較のために Fig. 4 にギ酸混合液中に浸漬する前のブランク試料の電流-電位曲線を実線で示す。15%の場合、(A)のピーク群は分解時間5分まではピーク電流は増加し、その後分解

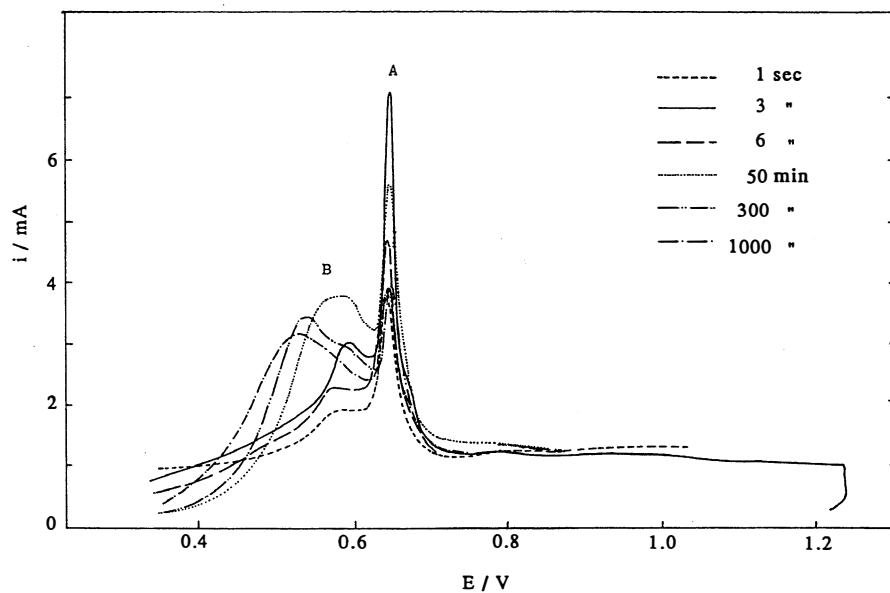


Fig. 3 Voltammograms of the surface species after the decomposition of HCOOH on Pd electrode with various dipping time in a 40vol% HCOOH-30% KOH solution

時間の増加につれて減少すると同時に、ピーク幅にも徐々に広がりが見られる。さらに、(B)に相当するピークが認められないことより、分解にともなって放出される水素はパラジウム内に吸蔵され、金属表面に吸着水素は存在せず、表面被毒物を生じる反応が進行しないためと考えられる。この推論によれば、Fig. 1 に示した水素吸蔵量の経時変化をよく説明できる。

従って、この場合の分解過程は、まず、(4)式により中間生成物  $\times\text{COOH}$  を生じ、ついで(5)式により水素吸蔵が進行する。

さらに、電流-電位曲線での走査速度とピーク電位の関係より、吸着種の情報を得るため、Srinivasan と Gileadi らの強吸着種の酸化反応に対する理論モデル<sup>5)</sup>を用いた。



の酸化反応に対して Langmuire 吸着が成り立ち、sweep 初期 ( $t=0$ ) に被覆率  $\theta=1$  を仮定すると faradaic current,  $i_F$  は

$$i_F = k_1 \theta \exp\left[\frac{(1-\alpha)EF}{RT}\right] \quad (8)$$

E: 電極電位,  $k_1$ : 速度定数,  $\alpha$ : 遷移係数, R: 気体定数, F: ファラデー定数  
逆反応の場合も同様と考えるとピーク電流  $i_p$  は

$$i_p = q\theta_p(1-\alpha)\frac{F}{RT}v \quad (9)$$

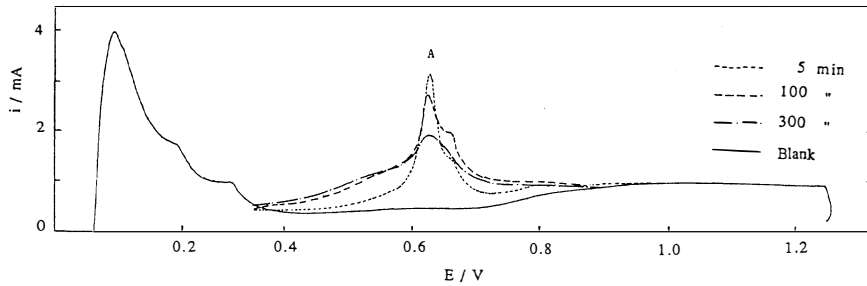


Fig. 4 Voltammograms of the surface species after the decomposition of HCOOH on Pd electrode with various dipping time in a 5vol% HCOOH-30% KOH solution

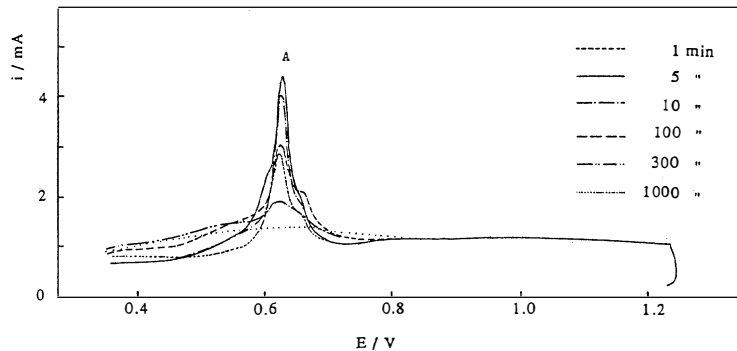


Fig. 5 Voltammograms of the surface species after the decomposition of HCOOH on Pd electrode with various dipping time in a 15vol% HCOOH-30% KOH solution



$\theta_p$ : ピーク電流値での被覆率,  $q$ : (7)式の吸着中間体の monolayer を形成するのに必要な電荷,  $V$ : 走査速度であらわせる。

よって, (8)と(9)よりピーク電流  $i_p$  に対応するピーク電位  $E_p$  は

$$E_p = \frac{RT}{(1-\alpha)F} \ln \frac{q(1-\alpha)F}{k_1 RT} + \frac{RT}{(1-\alpha)F} \ln v \quad (10)$$

として与えられる。

Fig. 6 に高いギ酸濃度80%における (A)(B) のピークに対するピーク電位と走査速度の関係を示す。これより (A) ピークの通過係数  $\alpha = 0.44$ , (B) に対して0.34を得た。Fig. 7 に低濃度側5%で得られた関係を示す。低濃度側では, (A) のピークに対し  $\alpha = 0.43$  を得た。Fig. 8 にギ酸のみの場合を示す。この場合も (A) ピークの通過係数  $\alpha$  は0.40, (B) に対して0.34を得た。これらのことから各濃度における (A), (B) ピークに属する吸着種は同一であるといえる。

以上のことより, (A) に対する吸着種は接触分解反応の反応中間体である  $\times\text{COOH}$ , (B) はそれより派生して分解反応を阻害している  $\times\text{COH}$  と推定すれば, 実験結果とよく対応している。

これまでギ酸の酸化はアルカリ溶液中では白金は不活性とされてきたが, 白金黒付きパラジウム板を用いた場合, 接触分解反応に関しては解離吸着によって生じた水素を金属内部に吸着

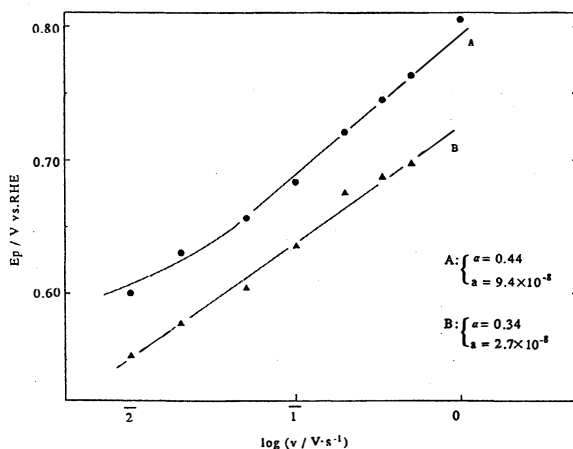


Fig. 6 Plots of the peak potential vs. the log of the sweep speed in 80 vol% HCOOH for a 5 minutes dip

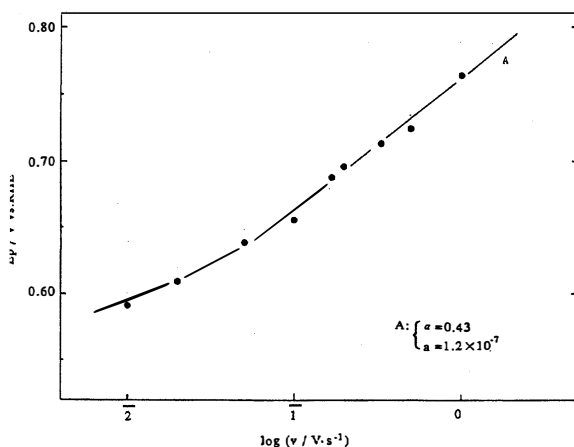


Fig. 7 Plot of the peak potential vs. the log of the sweep speed in 5 vol% HCOOH for a 5 minutes dip

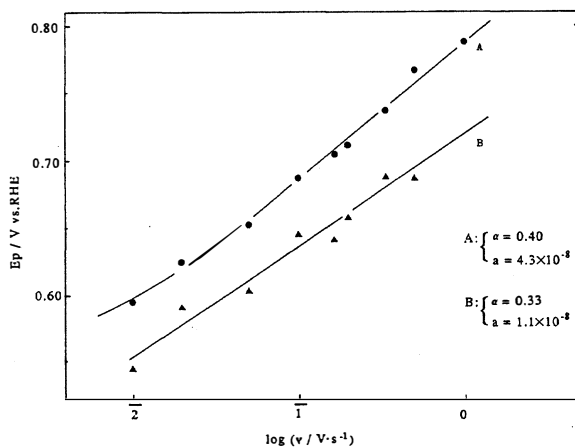


Fig. 8 Plots of the peak potential vs. the log of the sweep speed in 100 vol% HCOOH for a 5 minutes dip

するため、ギ酸の比較的低い濃度で活性を示した。

### 3. 結 論

ギ酸を30%水酸化カリウム溶液中で白金黒付きパラジウム板上で接触分解反応させた場合、ギ酸濃度約20%を境に高濃度側と低濃度側では分解過程において反応吸着種に違いが見られた。全濃度範囲では分解反応の中間体である吸着種  $\times\text{COOH}$  が生じている。低濃度側では吸着種  $\times\text{COOH}$  の  $\text{CO}_2$  へ分解を経て分解反応が進行しパラジウム板内への水素吸蔵量は増加するが、高濃度側では吸着種  $\times\text{COOH}$  が表面被毒種  $\times\text{COH}$  となって蓄積するため分解反応は阻止され、水素の吸蔵量が少ないことが明らかとなった。

#### 参 考 文 献

- 1) 中村優子, 蓮覚寺聖一, 白鳥 一: 電気化学協会講演要旨集, 第48回大会, 18(1981).
- 2) 中村優子, 蓮覚寺聖一, 白鳥 一: 電気化学協会秋季大会講演要旨集, 79(1981).
- 3) A. Capon and R. Parsons: *Electroanal. Chem.*, **45**, 205(1973).
- 4) A. Capon and R. Parsons: *Electroanal. Chem.*, **44**, 1(1973)
- 5) S. Srinivasan and E. Gileadi: *Electrochim. Acta* **11**, 321(1966)

電気化学会協会北陸支部秋季大会, 1988年10月発表

## Catalytic decomposition of formic acid in alkaline solution

Yuuko Nakamura, Seichi Rengakuji, Masami Inoue  
and Keiichi Nishibe

Department of Materials Science and Engineering, Faculty of Engineering, Toyama University

In order to obtain hydrogen as an energy source for fuel cell, the catalytic decomposition of formic acid was investigated on a platinized palladium plate in 30% KOH solution. The hydrogen once formed by the decomposition of formic acid was absorbed in platinized palladium plate by dipping method. The amount of absorbed hydrogen was increased with increasing the concentration of formic acid up to 20 vol% of formic acid and decreased above higher concentration. Voltammetric study demonstrates two kinds of adsorbed species of (A) and (B) according to the decomposition process. (A) was observed in any concentration of formic acid in alkaline solution, while (B) was not observed in dilute solution (below 20%). The properties of (A) and (B) were discussed.

[英文和訳]

### ギ酸の接触分解に関する研究

中村 優子, 蓮覚寺聖一, 井上 正美, 西部 慶一

水素を燃料電池用エネルギー源として使用する目的で、白金黒付きパラジウム板上30% KOH 溶液中でギ酸の接触分解を行なった。ギ酸の分解により生じた水素を白金黒付きパラジウム板に浸漬法により吸蔵させた。吸蔵された水素量はギ酸濃度 20vol% までは増加し、それを越える濃度では減少した。Voltammogram の研究より、分解過程に関して (A)、(B) 二種の吸着種の存在が明らかとなった。(A) の吸着種はアルカリ中のギ酸の全濃度範囲で観測されたが、吸着種 (B) はギ酸の薄い濃度領域 (20%以下) では観察されなかった。(A)、(B) の性質について検討した。



# ポアソン過程よりみたクロマト分離の移動単位数

田中 久弥, 川崎 博幸, 山本 辰美

## 緒 言

前報<sup>3)</sup>では、クロマトグラムの成分間での溶出時間差の分布を代表するものとして、それぞれの成分の溶出時間分布密度の特性値を用いて分離度を定義した。この分離度と分散比から任意の時間での分離効率を得られるがこれを左右する因子については、従来の  $R_s$  にたいするカラム理論段数の  $1/2$  乗因子があるにすぎない。

クロマトグラムの従来の理論段的な取扱いでは、J. King<sup>1)</sup> はじめ多くの研究者が指摘するように、カラムからの溶出量  $v$  のときに着目成分が入り口から  $i$  番目の段の移動相にある確率関数として、入り口段に供給された原料濃度にたいするその移動相濃度の比が  $(i-1)$  段のそれとの物質収支式の関係で記述される。この微分階差方程式と初期条件は、パラメータが固定相と移動相が平衡にあるその成分にたいする各段両相容積の逆数である Poisson 過程のそれらに対応するものである。いま、溶出量  $v$  を溶出時間  $t$  に変換すると、移動相濃度  $c(i, t)$  の方程式は次式のように

$$dc_i/dt = \eta(c_{i-1} - c_i) \quad (1)$$

パラメータ  $\eta$  が  $q/(V_U + KV_L)$ 、ここで  $q$  は流量、 $V_U$ 、 $V_L$  は移動相、固定相のそれぞれ容積、 $K$  は分配係数を表す、となり、 $i$  段自体は平衡段であり、ふたつの相での速度過程には基本的に無関係とみられる。この段理論では負荷を  $F$  としたとき、初期条件

$$c(0, 0) = F/(V_U + KV_L)$$

を用いた上式の Poisson 分布型の解

$$c(i, t)/c(0, 0) = \exp(-\eta t) \cdot (\eta t)^i / i! \quad (2)$$

では  $\eta t$  の平均および分散がいずれも  $i$  となる場合について、パラメータ  $\eta$  と理論段数  $i$  が関係付けられる。

本論文では、移動相、固定相での有限な速さの速度過程の代表時間  $\tau_R$  の逆数を Poisson 過程のパラメータとして、移動相通過時間  $t_c$  とその間における両相での迷走回数  $n$  の確率関数をつぎのように求めた。

通過時間  $\Delta t$  に一回迷走する確率  $P(1, \Delta t)$  を

$$P(1, \Delta t) = \Delta t / \tau_R$$

とし、二回以上迷走する確率を  $(\Delta t)^2$  の大きさとする。それより、一回も迷走しない確率  $P(0, \Delta t)$  は

$$P(0, \Delta t) = 1 - (\Delta t / \tau_R) - O(\Delta t)^2$$

とおける。ここで、通過時間  $t + \Delta t$  で  $n$  回の迷走をする確率  $P(n, t + \Delta t)$  は

$$P(n, t + \Delta t) = P(1, \Delta t)P(n-1, t) + P(0, \Delta t)P(n, t) \tag{3}$$

であるから、 $\Delta t \rightarrow 0$  として、 $O(\Delta t)^2$  を無視小とすれば、Poisson 過程  $P(n, t)$  に関する次の微分階差方程式をうる。

$$dP(n, t)/dt = \kappa [P(n-1, t) - P(n, t)] \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{初期条件: } P(n, 0) &= 1, n=0 \\ &= 0, n>0 \end{aligned} \tag{5}$$

のもとに、得られる解は Poisson 型確率関数である。

$$P(n, t) = (\kappa t)^n \cdot \exp(-\kappa t) / n! \tag{6}$$

ここで、 $\kappa = 1/\tau_R$  で、速度パラメータである。

いま、時間として移動相通過時間  $t_C$  を考えると、回数  $n$  の平均  $n_{av}$  は  $t_C/\tau_R$ 、さらに分散  $\sigma_n^2$  も  $t_C/\tau_R$  となるので、 $n$  の分布はひとつの因子で代表されることがわかる。これは従来の異相接触物質移動装置での移動単位数に対応するものである。

この移動単位数を実験的にその成分のクロマトグラムから求めるため、溶出時間分布密度  $f(t)$  の平均値  $t_E$  と分散  $\sigma^2$  で次のように表す。

平均溶出時間  $t_E$  と移動相通過時間  $t_C$  の差の大きさは

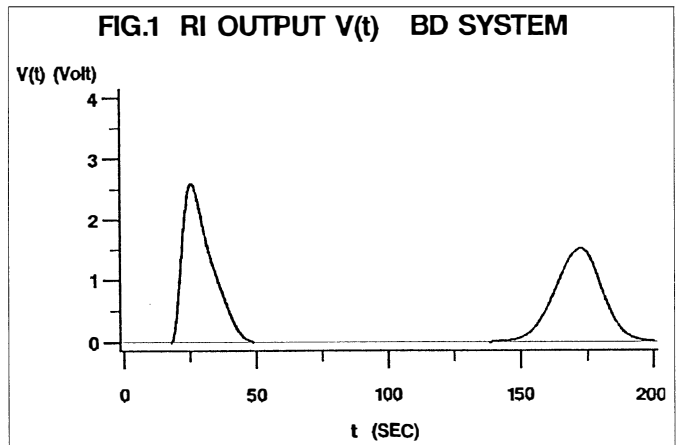
$$(t_E - t_C) \sim n_{av} \tau_R$$

であり、溶出時間の分散の大きさは

$$\sigma^2 \sim \tau_R^2 \sigma_n^2$$

である。ここで、 $\sigma_n^2$  は Poisson 分布の分散より平均値  $n_{av}$  であるから、 $n_{av}$  の大きさは

$$n_{av} \sim (t_E - t_C)^2 / \sigma^2$$



となる。したがって、両辺を等置する定数 $\xi$ を、その分布の分散が平均値 $n_{av}$ に一致するように、次のように

$$n_{av} = \xi(t_E - t_C)^2 / \sigma^2 \quad (7)$$

$\xi = 1/4$  とおくと、

$$n_{av} = (t_E - t_C)^2 / 4\sigma^2$$

となり、移動単位数は $t_C$ と $f(t)$ の特性値 $t_E, \sigma^2$ で表すことができる。分離度に関するパラメータとしては定数を外した次式の $N$ を移動単位数とする。

$$N \equiv (t_E - t_C)^2 / \sigma^2 \quad (8)$$

Poisson 過程からこのように1, 2各成分の移動単位数が表せれば、前報で定義した分離度

$$(t_{E1} - t_{E2}) / \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (9)$$

は次式のようにその1/2乗と分散比 $s \equiv (\sigma_2^2 / \sigma_1^2)$ で決まることがわかる。

$$(t_{E1} - t_{E2}) / \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} = \sqrt{N_1 / (1+s)} - \sqrt{N_2 s / (1+s)} \quad (10)$$

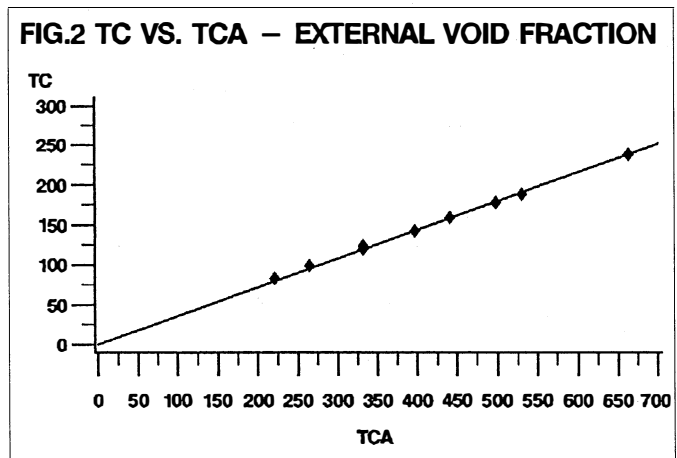
## 実験的検討

1) 実験の概要 実験は移動単位数を左右する移動相と固定相との間の物質移動過程について、

1) 速度パラメータについて固定相での拡散速度、有効容積を左右する成分の分子量を、2) 移動相通過時間についてカラム長さと流速をそれぞれ変化させて行った。

用いた装置と手順についてはすでに前報<sup>3)</sup>に述べた通りで半硬質のポリビニール系高分子ゲル(TOSO株式会社製 TOYOPEARLE-HW 40)によるポリエチレングリコール(PEG)のゲル濾過クロマトグラフィーである。溶出液

濃度は従来どうりRI検出器の電圧出力を一秒間隔でとらえた。とくに留意した点としては移動相通過時間 $t_C$ を求めるために、それぞれ他の実験条件について成分と等量のBlue Dextran—以下では



BD と略す——を用いたブランク実験を併行した。さらに、カラムを外した流通実験で同様の濃度ピークを検出して溶出時間分布についての端効果の補正を行った。実験条件はカラム長さで10, 15, 20 cm, 流量で0.8, 1.0, 1.2ml./min, PEG 分子量で公称値400, 800, 1000, 2000, 4000でいずれも濃度が0.1wt%である。なお、溶離液には蒸留水をもちいた。

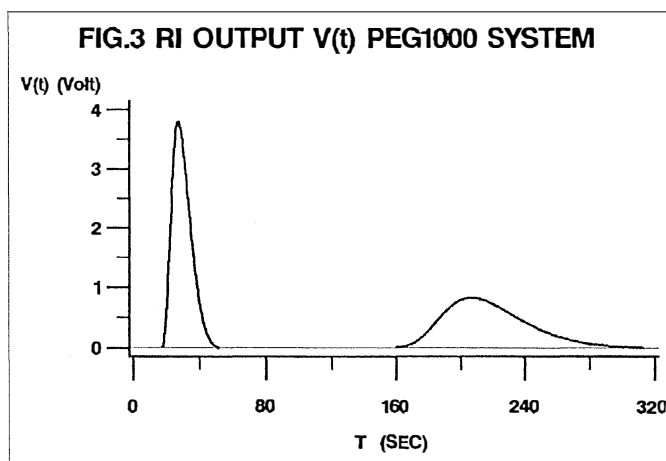
2) クロマトグラムから移動単位数の計算 RI 検出器の濃度に比例した出力電圧  $V(t)$  のピークから、溶出時間の分布密度  $f(t)$ , その平均  $t_E$  と分散  $\sigma^2$  をそれぞれ次式で求めた。

$$f(t) = V(t) / \int V(t) dt \quad (11)$$

$$t_E = \int t f(t) dt \quad (12)$$

$$\sigma^2 = \int (t - t_E)^2 f(t) dt \quad (13)$$

Fig. 1には移動相通過時間  $t_c$  の計算に用いたBDのクロマトグラムの一例を示した。左側のピークはカラムを外してその入口と出口のパイプを直結した場合の結果である。このふたつのピークよりEq. (11)で両者の溶出時間分布密度  $f(t)_{BD}$  を求め、Eq. (12)の各平均値を  $t_{EBD}$ ,  $t_{EOBD}$  として、移動相通過時間  $t_c$  を次式で計算した。



$$t_c = t_{EBD} - t_{EOBD} \quad (14)$$

Fig. 2には、得られた  $t_c$  を空塔速度  $u_0$  によるみかけ通過時間  $t_{cA} (\equiv L/u_0)$  にたいして点綴した。ふたつの通過時間は良好な直線関係を示しており、移動相である粒子外空隙部の容積率—外部空隙率  $\alpha$ —をこの勾配から求めることができた。その結果  $\alpha$  は0.360となった。

1, 2成分混合系のクロマトグラムは各成分単独の溶出時間分布密度  $f_i(t)$  ここで  $i = 1, 2$  がわかれば、RI 検出器の濃度にたいする加成性により  $\omega_i$  を各成分の組成分率とすれば、つぎの  $f_M(t)$  をもちいて得られる。

$$f_M(t) = \omega_1 f_1(t) + \omega_2 f_2(t)$$

また、前報の分離度も各成分の  $f_i(t)$  の平均  $t_E$  と分散  $\sigma^2$  で定義しており、以下で述べる  $f(t)$  は単独成分について得られたものである。各成分の平均  $t_E$  は  $t_c$  にたいするEq. (14)と同様それぞれのふたつのピークの  $f(t)$  からEq. (12)で得られる  $t_{Ei}$ ,  $t_{EOi}$  の差として求めた。

$$t_E = t_{Ei} - t_{EOi}$$

Fig. 3にはこの計算に用いたPEG-1000のクロマトグラムを一例として示した。

成分PEGの平均溶出時間をあらわす  $t_E$  とBDのように固定相のゲルに全く浸透しない成分のそれ、すなわち  $t_c$  とは固定相の各成分の有効容積率を  $\beta_i$  とすれば



$t_E - t_C = t_C(1 - \alpha)\beta_i/\alpha$  となり、  
 $(1 - \alpha)\beta_i/\alpha \equiv \delta_i$  とおけば

$$t_E = t_C(1 + \delta_i) \quad (15)$$

であるから、勾配  $(1 + \delta_i)$  の直線関係にあることがわかる。

Fig. 4 には 6 種類の分子量の PEG の平均溶出時間  $t_E$  を  $t_C$  にたいして点綴した。図より明らかなように全範囲で良好な直線関係が得られており、分子量の増加とともに勾配が減少していることがわかる。外部空隙率  $\alpha$  は分子量に一定とみられ、固定相の有効容積率  $\beta_i$  が小さくなっていることがわかる。勾配より得られた  $\beta_i$  の値は分子量の小さいほうから、0.597, 0.475, 0.354, 0.181, 0.0754, 0.0238 である。

成分 PEG の溶出時間の分散  $\sigma^2$  についても、それぞれふたつのピークの  $f(t)$  から Eq. (13) で得られる  $\sigma_i^2$  および  $\sigma_{0i}^2$  から

$$\sigma^2 = \sigma_i^2 - \sigma_{0i}^2 \quad (17)$$

として求めた。

吸着クロマトグラフィーの移動相と固定相にたいする物質収支の基礎式のラプラス変換解から導かれた平均値のまわりの 2 次モーメントとしての分散  $\sigma^2$  は次式のように表せる。<sup>2)</sup>

$$\sigma^2 = 2t_C[(t_{dif}\delta/15) + (t_C/Pe)(1 + \delta)^2] \quad (18)$$

ここで  $t_{dif} = R^2\beta/D_E$ ,  $Pe = uL/E$

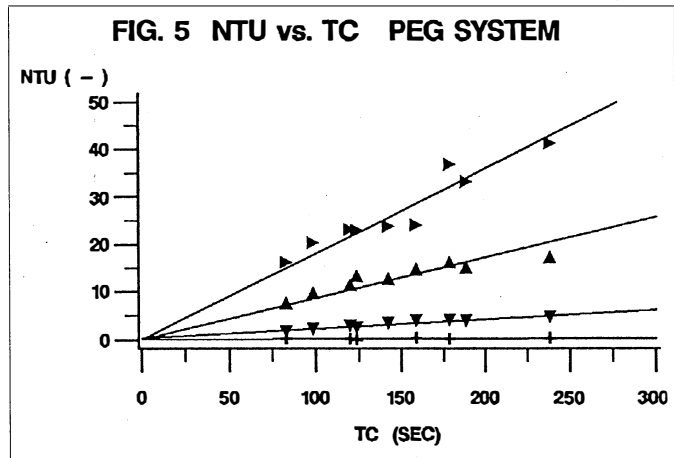
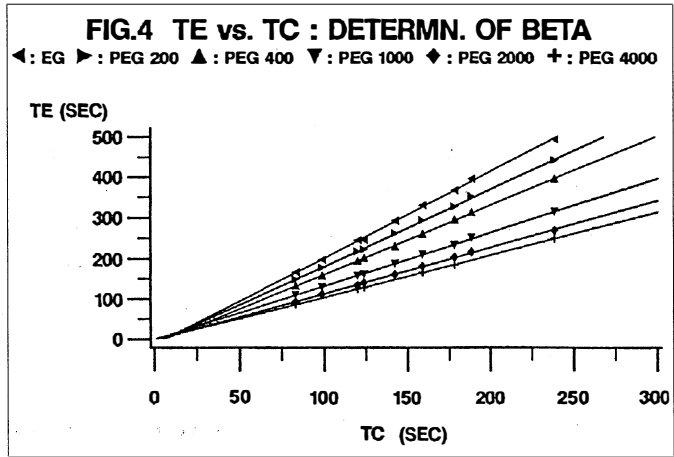
である。 $t_{dif}$  は半径  $R$  の球状ゲル内部における拡散過程の代表時間で、 $D_E$  はその拡散係数である。

また  $E$  は移動相でのカラム長さ方向の分散係数で、 $Pe$  数はこの分散の代表時間と  $t_C$  との比である。分散係数  $E$  が空隙速度  $u$  に比例するとすれば、 $\sigma^2/t_C$  と  $1/u$  とは直線関係で結ばれることになり切片より  $t_{dif}$  が求められる。

うえて述べた Eq. (18) の関係を Eq. (8) の移動単位数の関係に変形する。Eq. (15) より

$$t_C\delta = t_E - t_C$$

であるから、次式が得られる。



$$(t_E - t_C)^2 / \sigma^2 = t_C / 2 [(t_{dif} / 15\delta) + (1 + \delta)^2 t_C / Pe\delta^2] \tag{19}$$

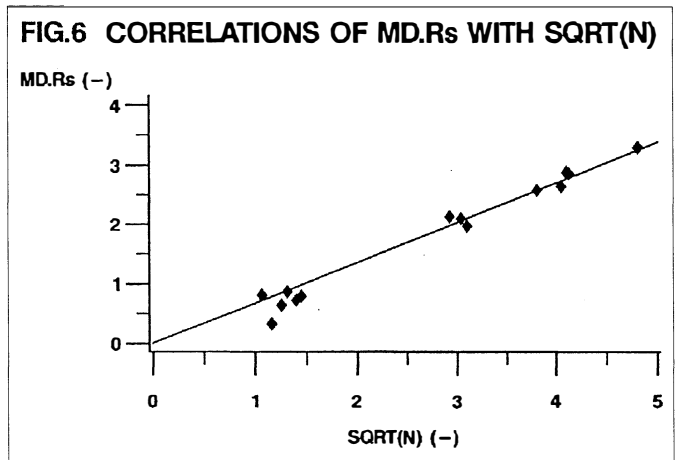
右辺のかっこ内のはじめの項はゲル内部の、また第二項は上で述べた Pe 数の内容より移動相でのそれぞれ移動過程の速度パラメータに対応していることがわかる。

Fig. 5 には Eq. (8) の移動単位数を  $t_C$  にたいして点綴した。図中の実線は原点を通る代表線をあらわしており、分子量の小さいほうからその勾配、したがって Poisson 過程の速度パラメータとその標準誤差は 0.593(0.0426), 0.180(0.00593), 0.0862(0.00364), 0.0220(0.000636), 0.00449(0.000156) となる。これらの結果から、直線性も比較的良好であり Eq. (19) の右辺括弧内で初項の効果が著しく、固定相での速度過程の早い遅いにより移動単位数が左右されていることが伺われる。

Fig. 6 には、以上のようにして求めたそれぞれの成分の移動単位数の1/2乗の差をとり、分離度をそれにたいして点綴した。Eq. (10) では、分散比  $s = 1.0$  の場合、勾配 0.707の直線関係をあたえるが、ここでは  $s = 1.0 \pm 0.20$  の範囲のデータについて原点をとる代表線を決めた結果、勾配は 0.675 (標準誤差 0.0141) となった。

分離度にたいして、移動単位数の1/2乗の差がそれを左右するひとつの因子とみられるが、溶出時間の分布からみれば、移動相通過

時間まわりの溶出時間の分布  $f((t - t_C) / \sqrt{\sigma^2})$  では、平均値が  $(t_E - t_C) / \sqrt{\sigma^2}$ 、分散が1になるので、その差の分布  $f(((t_1 - t_C) / \sqrt{\sigma_1^2}) - ((t_2 - t_C) / \sqrt{\sigma_2^2}))$  では、平均が  $((t_{E1} - t_C) / \sqrt{\sigma_1^2}) - ((t_{E2} - t_C) / \sqrt{\sigma_2^2})$ 、分散が2になることから、移動単位数の1/2乗因子の差はこの分布の代表値でもあることになる。



## 結 論

前報で定義した分離度を左右する因子として従来の平衡論的な理論段数にかわる速度論的な移動単位数を、固定相、移動相における迷走現象を Poisson 過程としてその速度パラメータ  $1/\tau_R$  より移動相通過時間  $t_C$  での迷走回数  $t_C/\tau_R$  として定義した。

公称分子量200ないし4000の PEG をもちいたゲル濾過のクロマトグラムから得られる溶出時間分布密度  $f(t)$  について端効果を補正した特性値  $t_E$ ,  $\sigma^2$  と BD で測定した通過時間を用いて Eq. (8) で算出した移動単位数  $N$  は移動相通過時間  $t_C$  にたいして原点を通る直線関係で表され、その勾配より分子量に関係する固定相内の移動過程の速度パラメータが見いだされた。

分離度は Eq. (10) のように、移動単位数  $N$  の1/2乗因子と分散比で表されるが、1/2乗因子の差を、分散で基準化した通過時間  $t_C$  まわりの溶出時間分布の差の代表値として分離度との対応をみた結果、分散比 1 を中心に比較的ひろい範囲にまたがる良好な相関式が得られた。

### Nomenclature

$c$ : concentration	[wt. %]	$R_s$ : degree of separation	[—]
$F$ : injection volume	[ml]	$s$ : variance ratio	[—]
$f(t)$ : elution time density function	[1/sec]	$t$ : elution time	[sec]
$i$ : stage	[—]	$u$ : interstitial velocity	[cm/sec]
$K$ : partition coef.	[—]	$V$ : phase volume	[ml]
$L$ : column length	[cm]	$\alpha$ : external void fraction	[—]
$N$ : number of transfer unit	[—]	$\beta$ : gel effective internal volume fraction	[—]
$n$ : degree of migration	[—]	$\gamma$ : fraction of composition	[—]
$P(n, t)$ : probability mass function	[—]	$\xi$ : constant	
$q$ : volumetric flow rate	[ml/sec]	$\kappa$ : rate parameter	[1/sec]
		$\tau_R$ : characteristic time of migration	[sec]

### Reference

- 1) King, C.J. : "Separation Processes" McGraw-Hill Chem. Eng. Series, N.Y. (1971)
- 2) Schneider, P : Chem. Eng. Science, 42, 1251 (1987)
- 3) 田中, 山本 : 富山大学工学部紀要, 43, 93 (1992)

この論文の一部は下記学会で発表した。

田中久弥, 山本辰美 : "クロマト溶出時間差の分布の特性値と分離能" 化学工学会 57年会 G117 大阪 (1992, April)

## Number of Transfer Unit in Chromatographic Separation as an Poisson Process

Tanaka, H., Kawasaki, H., Yamamoto, T.

As a separation determining factor, the number of transfer unit  $N$  of chromatographic column was derived from an Poisson migration process of rate parameter  $\kappa=1/\tau_R$  at moving phase convection time  $t_c$ . It was obtained from the elution time distribution density function  $f(t)$  with the mean  $t_E$  and variance  $\sigma^2$  for each component as  $(t_E - t_c)^2/\sigma^2$ . Calibrating the end effects of observed  $t_c$ ,  $t_E$  and  $\sigma^2$  of PEG system, the NTU could be plotted against  $t_c$  on several straight lines being determined by molecular weight. The degree of separation previously defined by  $(t_{E1} - t_{E2})/\text{SQRT}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  was linearly depended on the differences of square root  $N$ .

[英文和訳]

### ポアソン過程よりみたクロマト分離の移動単位数

田中 久弥, 川崎 博幸, 山本 辰美

クロマト操作の分離を左右する因子として、カラム内の迷走現象を移動相通過時間  $t_c$  における速度パラメータ  $\kappa=1/\tau_R$  の Poisson 過程から移動単位数を導いた。これは平均が  $t_E$ 、分散が  $\sigma^2$  の溶出時間の分布密度から  $(t_E - t_c)^2/\sigma^2$  として算出される。PEG 系で端効果を補正した  $t_c$ ,  $t_E$  と  $\sigma^2$  より、その移動単位数は  $t_c$  にたいしてそれぞれ分子量で決まる直線関係で表される。既に、 $(t_{E1} - t_{E2})/\text{SQRT}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  で定義した分離度は移動単位数  $N$  の1/2乗の差に線形的な依存関係を示す。

# パラジウム分散電極を用いた桂皮酸類の水素化

森田 晃弘, 佐山三千雄, 石塚 仍康\*  
井上 正美, 中村 優子, 蓮覚寺聖一, 西部 慶一

## 緒 言

不飽和化合物の水素添加反応は、金属触媒の存在下、高温高压の反応条件により行なわれている。反応には耐圧容器と精製された高压水素を用いるので、大量に水素化物の製造を行なうには装置の建設に多大の経費を要する。一方、電気化学的水素化は、常温常压下、室温で行なわれるので簡便ではあるが、反応諸条件の設定が複雑で未だ一般に普及していない。そこで、分散電極を用いた電気化学的水素化を試み、収率良く水素化を行なう反応系並びに反応条件を見いだしたので報告する。

## 1. 実験方法

試薬として  $\alpha$ -アセトアミド桂皮酸（東京化成，特級），塩化ニッケル，塩化パラジウム，ヘキサクロロ白金（IV）酸六水和物，活性炭素（和光純薬，特級），塩化コバルト（和光純薬，1級），三塩化ロジウム，三酸化イリジウム，水素化ホウ素ナトリウム（和光純薬），塩化ルテニウム（III）水和物（関東化学），四酸化オスミウム（Merck），過塩素酸ナトリウム（Merck，特級），エタノール（99%，日本アルコール工業）を用いた。

装置は Fig. 1 に示す様なガラス製電解セルを用いた。セル容量は陽，陰極セル共に 100ml で，その間をナフィオン膜(117)で隔てた。電極は陽極側に白金電極，陰極側にグラファイト電極を用いた。電解液として陽極側に  $1 \text{ mol/dm}^3$  過塩素酸ナトリウム 95ml を，陰極側にはエタノール 45ml，水 45ml，酢酸 5 ml にパラジウム-活性炭 0.4g，原料  $\alpha$ -アセトアミド桂皮酸 1 g を加えたものを用いた。直流電源には GPT322（高砂製作所），電流計は TYPE2011（横河電機）を用いた。

電解中セルの陰極側には高純度窒素ガスを通し，電磁的にかきまぜながら電圧を 10V に保った。水素化率は，一定時間ごとに反応液を注射筒に吸い取り，パラジウム-活性炭を遠心分離によって除いた後，エタノールで一定濃度に希釈し 277nm の UV 吸収強度の減少より求めた。

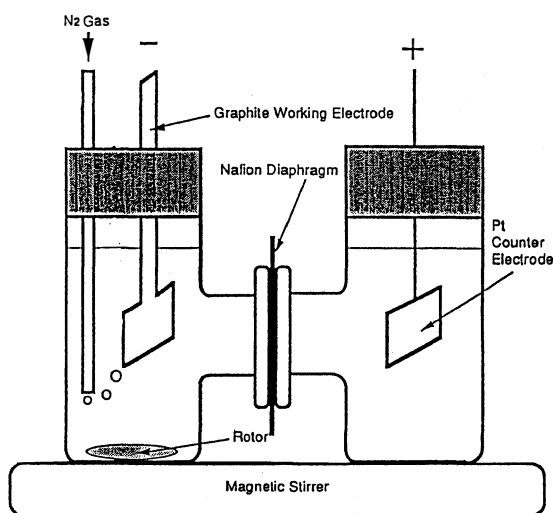


Fig. 1 Apparatus for the electrolytic hydrogenation of cinnamic acids

## 2. 結果および考察

### 2.1 アセトアミド桂皮酸の電解水素化における VIII 族金属の活性

VIII 族金属を活性炭に吸着させたものを分散電極として、アセトアミド桂皮酸の水素化を行なった。結果を Table 1 に示す。陰極をグラファイト板とし、エタノール-水 (1 : 1) を電解液として基質を溶解させた後、室温で24時間水素化を行なった。パラジウム-活性炭を加えずにグラファイト極のみで電解を行なっても水素化は殆ど進まない。この系に金属-活性炭を分散させて電解を行なうと、パラジウムで最も高い変換率を与え、ロジウム、白金、ニッケルが次に良い結果を与えた。また、オスmium、イリジウム、ルテニウム、コバルトでは低い値を示した。パラジウムが特に高い変換率を示したのは、パラジウムの高い水素化力と水素保持力によるものと考えられる。ここで起こる電解水素化はグラファイト電極上で発生した水素を活性炭上の金属微粒子が受取り、この活性水素で不飽和化合物の水素化を行なうものと考えられる。

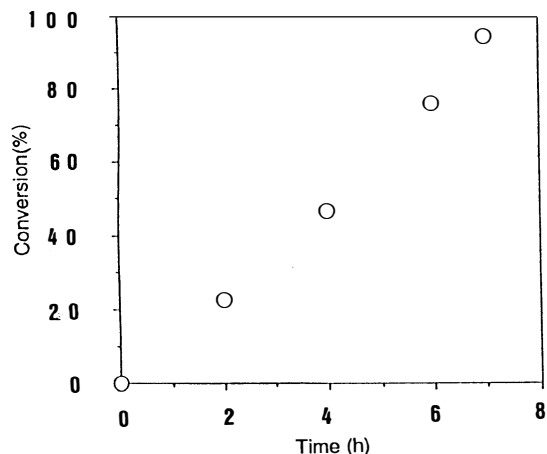
### 2.2 アセトアミド桂皮酸の電解水素化における最適条件の設定

パラジウム-活性炭分散系を用いて、電解水素化を効率良く行なうための条件を検討した。溶媒は原料を溶解し、同時に電解質の過塩素酸ナトリウムを溶解するものでなければならない。また、反応後に水素化物との分離が容易でなければならない。この条件に適したものとしてエタノール

Table 1 Effect of VIII group metal-charcoal in the electrolytic hydrogenation of  $\alpha$ -acetamidocinnamic acid

Catalyst	Conv.(%)
None(graphite)	10.3
Co	22.7
Ni	41.5
Ru	29.1
Rh	67.7
Pd	100
Os	23.1
Ir	24.4
Pt	49.6

$\alpha$ -Acetamidocinnamic acid (1.0g), 10% metal-charcoal (0.4g), EtOH-H<sub>2</sub>O (1:1), CH<sub>3</sub>COOH(5ml), 1mol/dm<sup>3</sup>NaClO<sub>4</sub>(95ml), and 10V were used. Reaction was carried out for 24 hrs at room temperature.



$\alpha$ -Acetamidocinnamic acid (1.0g), 10%Pd-C(0.4g), EtOH-H<sub>2</sub>O(1:1)(90ml), CH<sub>3</sub>COOH(5ml), electrolytes: cathode;NaClO<sub>4</sub>(1.4g), anode; 1mol/dm<sup>3</sup>NaClO<sub>4</sub>(95ml), and 10V were used. Reaction was carried out at room temperature.

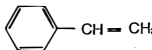
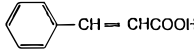
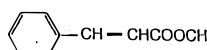
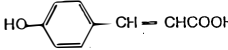
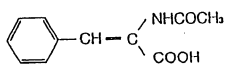
Fig. 2 Time course of conversion in the electrolytic hydrogenation of  $\alpha$ -acetamidocinnamic acid on microelectrodes of Pd-charcoal

ルー水系を選んだ。また、反応の進行にしたがって系はしだいにアルカリ性を示す様になるので、あらかじめ酢酸を添加した。電圧は水素化速度と副生成物を考慮して10Vとした。これらの条件下、10%Pd-活性炭を用い、室温で水素化を行なった結果を Fig. 2 に示す。水素化の初期に短い誘導期が認められたが2時間を過ぎるとほぼ直線的に水素化が進行し、7時間で完結した。この間、電流値は50mA から70mA へと増加した。また、アセトアミド桂皮酸の水素化に対する電流効率率は60%に達した。担体としての活性炭に対するパラジウム量も水素化速度に影響を及ぼす。活性炭量を一定にし、パラジウム量を変えて電解水素化を行なった結果を Fig. 3 に示す。活性炭に対しパラジウム量1%まで急激に水素化速度が大となるが、5%ではほぼ飽和に達した。一般に水素化はパラジウム量が増すと共に速度が増すと考えられるので、ここでみられる傾向はグラファイト極からパラジウム-活性炭上への水素移行が律速となっているものと考えられる。

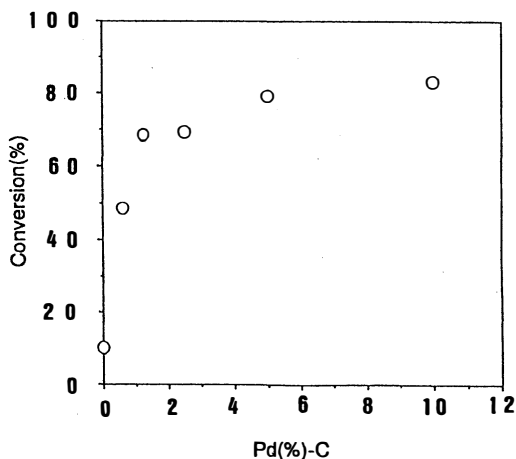
### 2.3 種々の不飽和化合物に対する電解水素化

10%パラジウム-活性炭を用い、スチレンおよび桂皮酸誘導体について電解水素化を行なった結果を Table 2 に示す。用いた原料の内、桂皮酸メチルで最も高い水素化率を示し、次いでカルボキシル基を持つアセトアミド桂皮酸、p-ヒドロキシ桂皮酸、桂皮酸の順に低くなった。スチレンはエタノー

Table 2 Hydrogenation of several alkenes on the dispersed micro-electrodes of Pd-charcoal

Substrate	Solvent (EtOH:H <sub>2</sub> O)	Conv. (%)
	2:1	44.0
	1:1	69.7
	1:1	97.2
	1:1	75.2
	1:1	83.5

10%Pd-C(0.4g),EtOH-H<sub>2</sub>O(90ml),CH<sub>3</sub>COOH(5ml), electrolytes: anode; 1mol/dm<sup>3</sup>NaClO<sub>4</sub>(95ml), cathode; NaClO<sub>4</sub>(1.5g), and 10V were used. Reaction was carried out for 6hrs at room temperature.



$\alpha$ -Acetamidocinnamic acid(1.0g), 10%Pd-C(0.4g)EtOH-H<sub>2</sub>O(1:1)(90ml), CH<sub>3</sub>COOH(5ml), electrolytes cathode, NaClO<sub>4</sub>(1.5g), anode; 1mol/dm<sup>3</sup>NaClO<sub>4</sub>(95ml), and 10V were used. Reaction was carried out for 6 hrs at room temperature.

Fig.3 Effect of the amount of Pd on charcoal on the hydrogenation of  $\alpha$ -acetamidocinnamic acid

ルー水（1：1）には溶解しないのでエタノール水（2：1）を用いた。この場合には水素化が最も遅れた。しかし、電解時間を長くすれば水素化率は向上し、アセトアミド桂皮酸では7時間でほぼ100%に達する。反応後、パラジウム-活性炭を遠心分離した後に減圧下で溶媒を留去し、エタノール可溶部を採ったのちエタノールを留去し粗結晶を得た。この粗結晶は水酸化ナトリウム溶液に溶解させて濾過したのち塩酸酸性として酢酸エチル抽出により精製した。得られた白色結晶はUV、IRスペクトルが標準物質のものと一致した。電気化学的な方法によりパラジウム-活性炭の分散微小電極を用い、常温常圧で簡便に二重結合の水素化を行なうことが出来た。これを応用して不斉水素化を行なうことが考えられる。即ち、基質として用いたアセトアミド桂皮酸のように水素化体のアルファ炭素が不斉炭素である場合には、電極を不斉な高分子膜で修飾して行なった電解不斉水素化<sup>1)</sup>や不均一ロジウム触媒系での不斉水素化が報告されているので、<sup>2,3)</sup>パラジウムを適当な不斉試薬で修飾すれば不斉水素化が起こるものと期待される。

### 3. 結 論

種々のVIII族金属を活性炭に担持させ、電解液に懸濁させたものを分散電極として桂皮酸類の水素化を行なった。用いた金属の中ではパラジウムが最も高い活性を示した。活性炭に対するパラジウム量は5%で水素化速度が飽和し、室温、7時間で水素化が完結した。

\* 日本医薬品工業株式会社 〒930 富山市総曲輪

#### 参 考 文 献

- 1) Y. Ohkatsu, K. Abe, T. Morimoto, T. Kusano, T. Osa: DENKI KAGAKU, **59**, 123, (1991).
- 2) M. Inoue, K. Ohta, N. Ishizuka, S. Enomoto: Chem. Pharm. Bull., **31**, 3371 (1983).
- 3) N. Ishizuka, N. Togashi, M. Inoue, S. Enomoto: Chem. Pharm. Bull., **35**, 1686 (1987).



## The Hydrogenation of Cinnamic Acids on Palladium-Dispersed Microelectrodes

Akihiro Morita\*\*, Michio Sayama\*, Naoyasu Ishizuka\*\*\*,  
Masami Inoue\*, Yuuko Nakamura\*\* Seichi Rengakuzi,  
and Keiichi Nishibe

\*Department of Chemical and Biochemical Engineering, Faculty of Engineering, Toyama University

\*\*Department of Materials Science and Engineering, Faculty of Engineering, Toyama University

\*\*\*Nihon Iyakuin Kogyo Co., Ltd.

The hydrogenation of cinnamic acids was carried out by using a technique of electrochemistry. We used graphite as cathode and Pd-charcoal powders as microelectrodes which were dispersed in a electrolyte of EtOH-H<sub>2</sub>O-AcOH-NaClO<sub>4</sub>. The cell was separated by a Nafion membrane (Type 117). A 5% Pd on charcoal powder dispersed in a cathode gave an excellent result for the hydrogenation under the conditions at 10V for 7hrs.

〔英文和訳〕

### パラジウム分散電極を用いた桂皮酸類の水素化

森田 晃弘, 佐山三千雄, 石塚 仍康, 井上 正美  
中村 優子, 蓮覚寺聖一, 西部 慶一

電気化学的に桂皮酸類の水素化を行なった。陰極にグラファイト板とPd-活性炭を微小電極として用い、電解液のEtOH-H<sub>2</sub>O-AcOH-NaClO<sub>4</sub>に分散させた。陽極室と陰極室はナフィオン膜(117)で分離した。陰極電解液に分散させた5%Pd-活性炭は10V、7時間で水素化に優れた結果を与えた。



## 平成3年度修士論文概要一覧

[電気工学専攻]

### 単細胞生物の電界効果

岩見 裕一

本研究では、三段階電界融合法を用いてヒメゾウリムシの同種間の細胞を融合しその融合細胞からダブレットを得た。そのダブレットは細胞分裂でクローンを増やしていくが、数ヶ月で元の正常細胞に戻ってしまった。異種間のゾウリムシの細胞を融合し、その融合細胞からモンスターを得た。また色々な種類のゾウリムシに電界を印加しその外形の変化を観察した。またこれらの融合細胞の外形の変化と、生物の進化の関係をカタストロフィー理論を用いて考察した。

### 視覚障害者のための音声一点字変換装置に関する研究

久保 哲

本研究は、点字に関する知識を持たない晴眼者が、普及型パーソナルコンピュータを用いて、視覚障害者向けの点字書籍の作成を音声入力によって行える装置の研究を行なった。音声認識方法は単音節認識とした。単音節認識方法として、母音部の後、子音部の認識を行なう2段階認識法を用いた。FFTを2度行なうことにより、母音度合いを測定し、それにより母音部抽出及び、セグメンテーションを行なった。認識結果を点字に変換し、モニター画面上に表示した。

### 結合4本線路形変成器の特性解析

小池 雅人

本研究では、広帯域特性をもつ通信用変成器の解析/設計をめざし、結合4本線路形変成器について、特性の理論解析及び実験値との比較を行った。まず、結合4本線路について分布定数論的に伝送理論を考察し、8端子対回路網の基本式を導出した。次に、巻線比1:2:1のハイブリッド変成器について、漏洩係数、整合係数、速度比等が動作減衰量に与える影響を調べた。その結果、理論値と実験値によい一致が見られ、本法の理論解析が通信用変成器の設計に有効であることが明らかにされた。

## 2本の同軸線路を使用した線路形変成器の解析

越 野 修 一

本研究は、2本の同軸線路を使用した線路形変成器について挿入損と平衡度の周波数特性の分布定数論的考察による計算および測定により低周波域の特性劣化を解析し、それを補償することで広帯域化を図るものである。補償方法として、変成器の出力側負荷にコイルを接続したり、2本の同軸線路の出力側接合部を接地することを試みた。その結果は、挿入損が少し増加したが、平衡度が大幅に改善されることが明らかとなり、広帯域な特性が得られた。

## 言語訓練支援システムの開発に関する研究

斉 藤 勝

生成する問題の構造及び反応時間を考慮した失語症の評価・訓練システムの開発を試みた。第1に、個々の検査語について意味的に近い語から、遠い語まで、5段階に分けた課題で行い、検査語と選択語との意味的距離と、反応時間のデータを取り、これらを基にファジィ推理論を用い、アナログ的に理解度を測定するシステムを開発した。第2に、その評価結果に基づく、学習者の理解度に対応した訓練プログラムを、自動生成するシステムを開発した。

## 交流電圧による懸垂碍子の閃絡破壊に関する基礎研究

澤 田 慎 一

今後の超高压送電に対応するため、懸垂碍子を小型軽量化する検討をした。交流電圧による懸垂碍子の閃絡破壊実験の観察から、従来の沿面の漏洩抵抗のみの等価回路ではなく、碍子磁器部分の浮遊静電容量をも考慮した梯子型の等価回路を考えた。そこで、最適な条件を提示し、最適な等価回路の回路定数を得た。次に、高耐電圧にするための考え方を提示し、模擬碍子による実験と数値計算により、今後の指針を得た。

## 音波 CT の有限要素シミュレーション

津 田 明 彦

長波長の定常波を境界上の送波器から入射し、領域内の密度分布による散乱・屈折の影響を送受波器により観測データとして計測し、その情報をもとに密度分布を決定することを試みた。2次元領域を FEM を用いて離散化し、グリーンの定理から導出される感度解析理論に基づいた密度分布決定の基本式を用いて数値シミュレーションを行った。また、逆問題解法に伴う悪条件性への対応と、計算時間の軽減のための未知数削減法に対しても工夫した。

## コオロギの発音時における中胸神経節の入出力特性に関する研究

戸 鳴 真 也

雄のコオロギの縦連合神経束を電気刺激し、発音行動を解発することに成功した。また雌や幼虫のコオロギにも同様の実験を行ない、雌や幼虫のコオロギには中胸神経筋内に発音に関与する神経系が発達していないことも確認することができた。さらに中胸神経節の入出力特性から、中胸神経節内どのように情報処理が行なわれているかを考察し、求愛歌を作り出す中胸神経節のモデルをたてたので報告する。

## オープンコア形電磁リニア・アクチュエータの等価回路と 推力特性に関する研究

中 村 文 孝

電氣的エネルギーを直接直線的な機械エネルギーに変換させる推力発生装置の必要性に伴い、リニアドライブの研究が盛んに行われている。そこで今回オープンコア形電磁リニア・アクチュエータの特性解析法を検討した。装置の磁気等価回路から電気等価回路を誘導し、被加速子の位置により回路定数が変化することを考慮して、推力特性を算定する方法を提案した。解析結果と実測値は、よく一致し、解析法として非常に優れた手法であることを確認した。

## 圧電セラミックスの分極シミュレーションおよび振動解析

森 田 誠

圧電体の分極は長時間にわたって高電界をかけることによって達成される。この分極分布は有限要素法によって解析されているが、これらは時間をかけ最終分極状態で分極がなされたものとしている。分極を2回以上の電界印加によって行う場合、これを解く方法がなかった。ここでは初期分極を与えることができ、分極が時間とともに変わる様子が表現できるモデルを提案する。また分極が完全でない状態の場合、振動にどのような影響を及ぼすかを解析した。

## On the Frequency Characteristics of a 3-D Cavity by Finite Element Method

A.N.M. Zaheed Uddin Mahmood

導波管や空洞共振器などにおける電磁波の様子を解析することは實際上重要で、有限要素法の適用が試みられている。しかし、実用的には問題が残されており、物理的に存在しないスプリアス解が計算解に混入する問題の処理や計算の効率化・精度の点でも現在検討段階にある。本研究は3次元電磁界を有限要素法で解析したもので、定式化の特徴はエッジ要素とラグランジュ乗数を併用している点にある。空洞共振器の固有値やマイクロフィルタの散乱行列の計算を行った結果、スプリアス解が抑制できると共に本法の妥当性が示された。

## A Study of Time Period and Characteristic of Forearm Electromyography in the Writing Activity of Alphabet Characters

Siti Meiningsih

The writing is a typical example of unimanual activities which is performed by human beings. They write alphabetical characters from left to right with certain angle in favor of each individual. In the present study, relations between the time periods required to write lower-case alphabetical characters “a” to “z” at some different angles to a horizontal line and the amplitudes of electromyogram signals recorded from forearm extensor and flexor muscles during writing. The subjects were divided into 3 groups: right-handed (11 persons), left-handed (2 persons), and left-right-handed (4 ambidextrous persons) groups. The time period was the biggest in writing angle of 20, despite of the handedness. It decreased when writing angle increased from 20 to 80, reached to a shortest level at an angle of 80 or 90, and then increased together with further increase of writing angle, resulting in a U shape curve. In any groups and in the use of any hands, the amplitude of EMG signals was the lowest at such an angle at least within differences in writing angle from 0 to 10. In addition, EMG recording in any groups indicated that the use of non-dominant hand required the bigger force than in the use of dominant

hand in writing with the angle of 80 or 90. The results suggest that the writing angle in favor of each individual is chosen reasonably from a biological point of view. The results were also discussed in relation with brain asymmetries.

## 視覚誘発衝動性眼球運動の特性に関する研究

任 春 力

衝動性眼球運動のうち、視覚誘発サッケードに関する研究を行い、次の結果を得た。サッケードの最高速度は視標の速さにより変化することや、サッケードの不応期は、視標の速さ及び予測機能と密接に関連することや、速い視標の場合はサッケードの不応期が短く、遅い視標の場合は不応期が長いことが得られた。また、不応期は位置ランダム視標に対しては短く、時間ランダム視標に対しては長いことがわかった。更に、補正サッケード発生の確率は目標の振幅だけにより変わるのではなく、目標の速度にも関係することや、視覚中心位置から離れるサッケードより、中心位置に近づくサッケードの最高速度が速いことがわかった。

### 〔工業化学専攻〕

## 石炭アルキル化物のガス化

安 藤 重 裕

Zn-Butyl iodide 系下で処理 (Nor. press., 130°C, 5h) した三種の石炭 (天北炭, 太平洋炭, 夕張炭) の水添ガス化特性 (400~500°C, H<sub>2</sub> Init. 100atm, 0~3h) に就いて検討した。概してアルキル基導入数が多くなるにつれガス化率も漸次高くなり、且つ炭種を選択することによってその略全てを 500°C の低温で、ガス化することが可能である事を示した。

## N-アルキル及びN-ニトロスルフィルイミンの合成とその反応性

井 関 恒 久

ボラン-ピリジン錯塩存在下、N-未置換スルフィルイミンとアルデヒド及びケトンとを反応させたところ、いままで合成の困難であったN-アルキルスルフィルイミンが得られた。反応速度を測定し反応機構を検討した。またN-トシルスルフィルイミンを濃硝酸と濃硫酸の混酸で処理したところ、新規化合物であるN-ニトロスルフィルイミンが得られた。N-ニトロスルフィルイミンの熱分解反応、種々の求核剤との反応、酸化反応、還元反応について検討した。

## 水平電極型無隔膜 Zn-Br<sub>2</sub> 二次電池

小 川 範 雅

近年、米国を中心に研究、開発されてきた電解液循環型 Zn-Br<sub>2</sub> 二次電池は隔膜を使用しているため電池内部抵抗が高く、メンテナンスも悪い。また、電解液を循環させるためにポンプを必要とするなど不利な点が多くある。これに代わる電池として、正極と負極を水平に配置した無隔膜 Zn-Br<sub>2</sub> 二次電池を試作、試験した。その結果、トリエチルアミン塩酸塩を電解液に0.4M添加した場合、デンドライト抑制効果と副反応抑制効果を併せもつ電圧効率90%、クーロン効率80%、エネルギー効率70%程度の性能を持つ電池が得られた。

## Purification and Characterization of Tissue Inhibitor of Metalloproteinases family from Various Biological Materials

金 木 達 朗

細胞外マトリックス成分の分解調節因子のひとつとして知られるヒト TIMP の遺伝子をクローニングし、大腸菌に導入してβ-ガラクトシダーゼ-TIMP の融合タンパク質やリコンビナント TIMP の発現を試みた。融合タンパク質は競合 EIA の標識抗原として利用でき、リコンビナント TIMP-2 は HLE 培養細胞由来のネイティブ TIMP-2 と比べて異なる立体構造を保持していることが示された。

## 七員環を含む新しい共役系化合物の合成研究

来 田 丈 太 郎

七員環を含む縮合多環系化合物の重要な中間体であるシクロヘプタ-1, 4-ジオンモノエチレンアセタールを4-シクロヘプテノン为原料として大量合成法の開発に成功した。またこの中間体を用いて四員環-1, 2-ジオンの縮環化合物であるビスシクロ[5.2.0]ノナン-1(7), 2, 5-トリエン-4, 8, 9-トリオンの合成を行い、その骨格合成に成功し目的化合物まで脱水素反応を残すのみとなった。



## SPE 電解法によるオゾン製造

京 極 康 弘

水電解によるオゾン製造に SPE 電解法を適用した。固体電解質は陽イオン交換膜を使用し、両面に陽極として  $\beta$  型二酸化鉛、陰極として白金を接合して実験に供した。陽極室に水のみを供給して水電解したところ、 $17.5\text{A}/\text{dm}^2$  でオゾン発生電流効率は 8% に達した。また、従来電解法に比べて高電流密度で槽電圧が低く、エネルギー効率を高められることを確認した。オゾン分解速度を調べたところ、純水中で  $43.7\text{nmol}/1\cdot\text{sec}$  ( $25^\circ\text{C}$ ,  $360\mu\text{mol}(\text{O}_3)/1(\text{H}_2\text{O})$ ) であることが分かった。

## 亜鉛—アルキルハライド系に於ける石炭の可溶化機構の研究 —RZnX 系化合物の生成と石炭可溶化性との関係—

権 田 清 志

Zn-C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>I 系で石炭を処理するとその多くがベンゼンに可溶化する。Zn と C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>I との反応に於て生成、存在すると考えられる BuZnI, Bu<sub>2</sub>Zn, ZnI<sub>2</sub> や C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>I を種々組み合わせて検討した結果、Zn-C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>I 系に於ては BuZnI と Bu<sub>2</sub>Zn の平衡混合物が生成し、これが活性種となって C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>I (アルキル化剤) 存在下にブチル化が起こり、石炭が可溶化するものと考えられた。

## 二重異性化重合による新規両親媒性高分子の合成とその応用

島 倉 將 和

環状シュードウレア類である 2-アミノ-2-オキサゾリン類の環状アミン部位にベンゼン環、アルコール基、ケトン基、アミド基、二重結合を有する環状シュードウレア類を合成し、合成に及ぼす置換基の効果の検討を行った。また合成した環状シュードウレア類のスルホン酸エステル系開始剤による開環異性化重合及びハロゲン化アルキル系開始剤による二重異性化重合を行い重合に及ぼす置換基の効果について検討を行った。

## 二相系電解酸化によるアルケンのエポキシ化

高 嶋 一 英

陽イオン交換膜，ナフィオン117で分離した電解槽を用いて陽極に二酸化鉛，陰極に白金を使用し，ジ-n-オクチル錫，金属酸化物の存在下，水-ベンゼン二相系においてアルケンを常温で24時間定電位電解したところ，アルケンのエポキシ化が起こった。金属酸化物にタングステン酸を用い，相間移動剤 TOMAC の存在下，酸化電位 1.5V vsSCE の条件で，1-オクテンよりエポキシ体が収率28.8%で得られた。

## S, S-ジフェニル-S-フルオロチアザインとアミン類の反応 —N-モノ置換スルホンジイミン, S-アミノチアザインの合成—

高 田 英 一

チアザイン類は SN 三重結合を有する珍しい有機硫黄化合物でありその性質と反応性には未知である所が多い。そこで比較的合成し易い S-フルオロチアザインとアミン類との反応を行い，さらに分子軌道計算による理論的考察と比較検討した。その結果一級アミンとの反応により今まで合成し難いと思われていた N-モノ置換スルホンジイミンの新規合成方法を確立した。また二級アミンとの反応により新規チアザインである S-アミノチアザインの合成に成功したのでその性質と反応性について研究した。

## S-フルオロチアザインの生成とアルカリ加水分解反応に関する 立体化学的及び動力学的検討

竹 内 球

N-ハロスルフィリミンから合成されるフルオロチアザインは SN 三重結合を有する珍しい化合物である。本研究では，SN 三重結合の生成とその硫黄上における置換反応の機構を立体化学的及び動力学的手法により明らかにした。また，フルオロチアザインと炭素求核剤との反応を行いイミノスルホニウムイリドを初めて合成した。さらに，N-ブロマスルフィリミンと銀塩との反応やフルオロチアザインとカルボン酸塩との反応で親規チアザイン中間体を通ることを示した。

## 石炭の化学構造—LC 並びに GPC 分別物の構造特性—

西 博

夕張，太平洋両炭ブチル化物の中性ヘキサン可溶分（原炭当り各76%，42%）中，共に56%と高い比率を占めた極性留分を更に，①繰り返しブチル化による低分子量化，②含酸素基の定量，③脱水素化反応，④水素化分解して，その構造を詳しく調べた。その結果，夕張炭極性留分は3～4環の芳香環と約2環のナフテン，又太平洋炭極性留分は2～3環の芳香環と約1環のナフテンをそれぞれ骨格としてこれらに C<sub>4</sub>H<sub>9</sub> 基や OH 基，OC<sub>4</sub>H<sub>9</sub> 基等の含酸素基が結合した構造である事が分かった。両炭極性留分のモデル構造を提示した。

## Thermal Behavior and Mass Spectrometry Studies of 2-Oxazolidinone Derivatives

平 田 文 彦

5-(*p*-置換フェノキシメチル)-3-フェニルカルバモイル-2-オキサゾリジノン誘導体 (PPO) のマススペクトルの速度論的な取扱いにおいては，置換基効果が認められたが，熱的データ（活性化エネルギー，融解熱）には認められなかった。TG-GC/MS 測定から PPO の電子衝撃と熱分解による開裂の相違は解明された。さらに，空気零囲気下の PPO の熱分解速度は，窒素零囲気下の値と比べて増加する傾向が見られた。

## アズレン [2,1-b]-3,8-メタノ [10] アヌレンの合成と性質に関する研究

矢 崎 順 一

1-ホルミル-2 (6-ホルミル-1, 3, 5-シクロヘプタトリエン-1-イル) アズレンを低原子価のチタンを用いて分子内カルボニルカップリング反応を行うことによって，アズレン [2,1-b]-3,8-メタノ [10] アヌレンを合成した。<sup>1</sup>H-NMR スペクトルから，この化合物は周辺18π電子系の共役の寄与の存在と，アズレン核の方が架橋 [10] アヌレンより非局在化の程度が大きいことがわかった。

## Synthesis and Polymerization of Conjugated Diacetylenes

矢 元 正 俊

両末端に種々の芳香環をもち、スペーサーとして8個のメチレン基を導入した新規共役ジアセチレン化合物の合成を行なった。そしてそれらの重合性および得られたポリマーの物性について検討を行なった。重合性については主に紫外線重合による時間-重合率曲線から検討を行ない、また得られたポリマーの物性については各溶媒に対する溶解性およびそのポリマー溶液のサーモクロミズム、ソルバトクロミズムやポリマー結晶のX線回折、熱分析、熱分解生成物の確認等を行なった。

### [金属工学専攻]

#### $\beta'$ 銅-亜鉛合金の相分解過程

青 木 勝

本合金を623K以下の低温で焼鈍すると板状の $\alpha$ 相が分解生成する。この生成機構について議論が盛んであるが、この機構を論ずる上で最も重要である $\alpha$ 相の正確な形状は未だに不明である。本研究では、 $\beta'$ 母相を優先腐食することで $\alpha$ 相を浮き彫りとし、母相との結晶方位関係を考慮した、正確な形状を求めることに成功した。さらに623Kより高温で存在するとされる棒状の $\alpha$ 相が623K以下で存在することも見いだした。

#### 高分解能電子顕微鏡による格子像のコンピューターシミュレーション

磯 村 克 明

近年の透過型電子顕微鏡の発達は、材料を構成する原子を直接観察することを可能とした。しかし、得られた顕微鏡像（高分解能像）は、試料内での動力学的回折効果やレンズ収差により真の姿を現さないことが多い。本研究では、コンピューターシミュレーション法によって透過型電子顕微鏡の結像過程を再現し、未知な結晶構造を持つ材料から得られた高分解能像の解析に成功した。

## 難処理性製錬原料からの貴金属成分の湿式回収法に関する基礎的研究

板 倉 浩 二

難処理性製錬中間産物のひとつである銅や鉛のアノードスライムには Au, Ag および Pt 等の貴金属が含まれており, これらからの Ag および Au の効率的な湿式回収法に関する基礎的研究の一環として, 電気化学的および浸出実験ならびに熱力学および電極反応論的観点からの考察を行って検討した。その結果より, 鉛アノードスライムからの高純度 Ag の効率的な湿式回収プロセスの提案を行い, また, 銅および鉛アノードスライム酸浸出残渣からの Au の効率的な酸化浸出処理の有効性を示した。

## Ti-6Al-4V 合金に形成される $\alpha/\beta$ 界面相

佐 藤 正 孝

Ti-6Al-4V 合金に生成する  $\alpha/\beta$  界面相についてその形態, 結晶学および形成起源について解析を行ない,  $\alpha/\beta$  界面相の中で典型的な柱状界面相は *f.c.c* 構造を示すがその他の界面相は *f.c.c*, *h.c.p* 両構造が存在し, 全体としては *f.c.c* 構造が優勢であった。 $\alpha/\beta$  界面相と  $\gamma$  水素化物には結晶学的な類似性が確認されたが水素化物と同定はできなかった。

## 蔞酸イオンによる酸性塩化物水溶液からの金の還元析出に関する電気化学的研究

三 賀 朋 尚

金等の貴金属の使用量は急速な拡大の傾向を示している。しかし, これらの貴金属成分は資源的に乏しいため, 難処理性製錬原料やスクラップ等からの製錬回収が重要な検討課題である。そこで, 本研究は貴金属の効率的な湿式処理法の確立に関する基礎資料を得る目的で, 蔞酸イオンを還元剤にした金クロロ錯イオンを含む酸性塩化物水溶液からの金の還元析出過程に及ぼす各因子の影響について, 電気化学的測定ならびに還元実験を行い, 電極反応論的観点と動力学的観点から考察した。

## 53Fe-15Cr-26Ni 合金における $\gamma'$ 相および $\eta$ 相の析出と成長

高澤 裕 眞

Fe-Ni 基耐熱合金 A286 の時効硬化と微視組織の変化を解析し、 $\gamma'$  相の成長を Ostwald 成長機構に基づく Lifshitz-slyozov-wagner の理論を適用して速度論的に解析し、 $\gamma'$  相から移行する  $\eta$  相の生成および成長過程についても詳細に解析した。

## Ti-Ni 合金の相変態と形状記憶能に及ぼす Ni 含有量の影響

瀧 田 朋 之

3 種類の Ti-50.4, Ti-50.8 および Ti-51.7 at.%Ni 合金について熱延温度、冷延後の焼なまし条件および Ni 含有量が変態組織、すなわち  $B_2$ , R, M 相の生成消滅、組織および形状記憶能に及ぼす影響について解析を行ない、形状記憶能が熱延温度、冷間加工度、拘束焼鈍温度、変態温度によって微妙に変化することが明確となった。

## 加工熱処理した Al-Mg<sub>2</sub>Si 基合金の時効析出過程

成 田 宏 治

時効硬化型アルミニウム合金である本合金は、Mg<sub>2</sub>Si 濃度の違い、特に 1wt% を境として機械的性質が大きく変化することが知られている。しかし、この Mg<sub>2</sub>Si 濃度と時効析出組織の関係について詳細に調べられた研究はない。本研究では、Mg<sub>2</sub>Si 濃度を 0.2~1.6wt% と変化させた合金の時効析出過程を透過型電子顕微鏡観察とマイクロビッカース硬度測定により解明した。そして、時効硬化しなかった低 Mg<sub>2</sub>Si 合金を加工熱処理によって時効硬化させることに成功した。

## Al 基合金の腐食特性に及ぼす Ga の影響

野 村 弘 明

我国で使用される大部分の Al 地金が輸入されている。これらの地金中には微量の Ga 成分が含有されているため、腐食挙動に影響を与えるものと考えられる。そこで、Al 基合金の腐食特性に及ぼす Ga の影響を明確にする研究の一環として、HClO<sub>4</sub> 水溶液中における Al-Ga 合金のアノード溶解特性、ならびに、ハロゲンイオンを含む環境では孔食を生成する事から、NaCl を含む H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> 水溶液中における孔食特性に及ぼす Ga の影響について検討した。

## Ti-15V-3Cr-3Sn-3Al 合金の時効による $\alpha$ 相の析出

牧 野 武 彦

$\beta$  型チタン合金である Ti-15-3 を用いて溶体化処理後の時効による  $\alpha$  相の析出様式について解析した結果、Menon らが Ti-Cr 二元合金で観察した normal  $\alpha$  と black plate  $\alpha$  相の 2 形態は本合金でも認められたが black plate  $\alpha$  相が極端に高濃度側の  $\beta$  相と平衡しているという事実は認められず、normal と black plate 間は連続的変化であること等が明らかとなった。

## 53Ni-15Cr-20Co 合金における $\gamma'$ 相の析出と成長

張 小 岷

Nimonic 105 合金の  $\gamma'$  相の析出硬化特性と微視構造を解析した結果、Nembach らが指摘したように固溶化熱処理後の水冷程度では  $\gamma'$  相の析出を抑止できず、抑止するためには 10<sup>4</sup>K/s 程度の冷却速度が必要であった。 $\gamma'$  相の平均粒径の 3 乗と時効時間との間には直線関係が成立し、成長速度の活性化エネルギーとして 266kJ/mol が得られた。

〔機械工学専攻〕

### 非定常局部加熱される有孔無限板の円孔縁き裂の 応力拡大係数に関する研究

中 林 秀 明

円孔縁にき裂を有する無限板が時間とともにステップ状に変化する熱源によって非定常加熱される  
とき、き裂先端に生ずる熱応力拡大係数を解析した。単一き裂と一對のき裂の2通りの場合に対し、  
熱源が静止している場合と円孔周囲を回転移動している2通りの加熱条件の場合について解析し、数  
値的に種々のパラメタの影響を検討した。また、円孔縁き裂を有する板についてひずみゲージを用い  
て応力拡大係数の測定を行い数値結果と比較した。

### 伝熱促進体を含む氷の融解過程に関する研究

濱 田 俊 克

本研究は、太陽熱をはじめとする熱エネルギーを有効に利用するための潜熱蓄熱装置の性能向上を  
目的とする。蓄熱材料の相変化特性を改良するため、水中に銅素線により作成した格子、及びアルミ  
ニウムを主成分とした発泡金属を伝熱促進体として充填したものを蓄熱材料とし、氷の蓄熱実験を行  
った。その中で、伝熱促進体の体積割合、形状、及び液相内に発生する自然対流が融解過程に及ぼす  
影響を検討した。

### 散水による屋根雪融雪に関する実験的研究

前 野 満

北陸地方を初めとする豪雪地域に住む人々にとって、屋根雪処理は冬期間大きな問題となっており、  
人力による屋根の雪下ろし作業は困難になってきている。そこで、屋根雪処理技術の開発の一つとし  
て、設備コストと維持コスト等の経済的な観点から、融雪型による屋根雪処理を取り上げる。本研究  
は、スプリンクラーを用いて屋根面に散水し融雪を行う方法であり、この融雪効果を検討する。それ  
と同時に3種のスプリンクラーの散水性能の評価を行う。



## 溶湯鍛造アルミニウム合金の空中及び腐食疲労き裂伝ば挙動に及ぼす 微視組織の影響に関する研究

矢 口 達 也

溶湯鍛造アルミニウム合金の疲労き裂伝ば挙動に及ぼす微視組織の影響を明らかにするため、微視組織の異なる3種類の供試材(AC8A-T6, AC8A-F, AC4C-T6)を用いて大気中及び腐食環境下での疲労き裂伝ば試験を行った。その結果、大気中の疲労き裂伝ば挙動が、複合組織の寸法・形状の違いによるき裂伝ば経路の影響を受ける事を明らかにし、また腐食環境下の疲労き裂伝ば挙動が、活性溶解と二次き裂発生の影響を受けて変化する事も明らかにした。

## 平板と異なるすきまを持つ直列2円柱からの渦放出に関する研究

張 克 儉

主流に垂直で、かつ平板と異なるすきまを持って設置された直列2円柱まわりの流れについて、円柱後流における渦放出周波数の測定および流れの可視化実験を行った。その結果、(1)渦放出周波数に関する跳躍現象の発生する2円柱間隔とすきまの関係、(2)ある2円柱間隔と平板とのすきまにおける非対称流の存在、(3)上流側円柱端からの吹き上げ流と2円柱後流における渦放出周波数の関係などが明らかとなった。

[生産機械工学専攻]

## SUS304 鋸刃切断における被削性評価に関する研究

安 藤 弘 紀

メタルソーによる切断の問題点を解明し、切削加工性を改善することを目的として、各種条件でSUS304の連続鋳造丸棒の切断を行った。その結果、工具形状としてすくい面の幅は0.7~0.8mm、溝ピッチは0.8mm、側面逃げ角は1.5度、すくい角は-20度、工具材種はP20、切削条件として、切削速度は50~60m/min、送り量は0.07mm/toohの条件が比較的良好な結果を示した。

## チタン合金およびニッケル基合金における研削性評価に関する研究

加藤 智 仙

難削材であるチタン合金やニッケル基合金の研削性を評価する目的で、在来型の砥石による研削加工を行い、研削比、仕上げ面性状、研削面残留応力の観点から研削性を検討した。その結果、チタン合金の研削にはG C砥石、ニッケル基合金にはW A砥石が適していた。また、チタン合金では砥石周速度が低速の方が研削比（金属除去量／砥石損耗量）が大きくなる結果が得られた。

## ゾーンプレート干渉縞の解析方法に関する研究

神 谷 和 秀

ゾーンプレート干渉縞の解析において、オーバーサンプリング法をFFT干渉計測法に用いて、スペクトルの分解能を上げ、キャリア周波数周辺にある形状情報の範囲を決定する方法を検討した。その結果、キャリアを完全に分離、除去することができ、傾き成分をなくすことができた。形状情報の範囲を決定するアルゴリズムの確立により、自動解析および解析時間の短縮ができた。また個人誤差をなくすことができた。

## 高強度アルミニウム—セラミックス粒子 複合材料の高速超塑性加工に関する研究

松 本 博 明

難加工材として知られるアルミニウム—セラミックス粒子複合材料の製造工程中に超塑性を付与することによって、その塑性加工性を改善することを目的とした。その結果、従来の超塑性材料よりも極めて高速度で超塑性を示す複合材料の製造条件が明らかとなった。また、セラミックス粒子体積率の異なる複合材料を作製し、圧縮、及び引張超塑性特性を比較評価した。さらに、その超塑性変形機構について考察した。

## 金属材料の機械加工における水溶性切削油剤の影響に関する研究

三津目 忠 男

市販されている水溶性切削油剤の切削性に及ぼす影響を検討し、その特性を改善した高性能な油剤の開発を目的とするもので、試作したベース油および添加剤を調整した切削油剤が機械加工性に及ぼす影響についての検討を行った。その結果、市販の油剤に比べて加工性が向上し、塩素系、硫黄系の極圧添加剤では研削加工、タップ加工によって、それぞれ異なる効果がみられた。

〔化学工学専攻〕

### 回転振動円板による微細粒子群の連続形状分離

石 神 利 道

スパイラルガイド付傘型回転振動円板を用いた連続形状分離装置を試作し、この装置による微細不規則形状粒子群の形状分離の可能性について実験的に検討した。不規則形状粒子の3次元形状を有効に評価できる形状測定法および形状指数を採用し、回収粒子群の形状解析を行った結果、本装置によって約50 $\mu\text{m}$ の微細粒子群の形状分離も可能であり、また分離特性（分離効率）は、各種操作条件および円板表面素材によって影響を受けることが確かめられた。（化学工学会第24回秋季大会（1991年10月、名古屋）において発表）

### 水で練った粘土層の物性値と電気浸透的脱水

加 藤 和 彦

粘土、長石および水の混合層を実験試料として、脱水による粘土層のかさ容積変化特性および粘土層のOSP変化を測定し、それらが含水率および長石混合分率の関数で表される実験式を導出した。同じ実験試料を用いた電気浸透的脱水実験を行い含水率分布などを測定した。層内で電位勾配による水分移動とOSP勾配によるそれが相互に独立に作用するという単純なモデルにより解析を行い、実験値との比較を行った。解析値と実測値は良好に一致した。

## 同体摩擦法によるぜい性碎料の温度上昇およびメカノケミカル変化

黒川 寛 幸

本論文は、同体摩擦法によるぜい性碎料の温度上昇に関して二次元非定常熱伝導を適用して理解解析を行い、温度分布の計算値が熱電対法による実験値とほぼ一致することを示したものである。さらに、同体摩擦によって生成される超微粉体にはメカノケミカル変化が生じていることをX線回折により明らかにしてから、結晶転移における圧力-温度状態図について熱伝導論的および熱力学的に詳細に考察して、相転移機構を解明した。

## 相変化を伴う凝固過程における移動現象

五 箇 洋 子

本研究では、矩形容器内の水の冷却過程の数値解析を有限差分法を用いて行い、非定常自然対流現象を定量的に解明することを試みた。また、左右壁面温度一定での側面冷却現象の実験を行い数値計算と比較・検討を行った。更に、上下壁面及び左壁面の3方断熱の場合の側面冷却現象実験と数値計算の比較・検討も行った。その結果、定性的一致を得ることができ、定常状態での伝熱メカニズムを把握することができた。

## 固定化オキシダーゼを用いたグルコン酸の生産に関する研究

坂 田 圭 祐

グルコースオキシダーゼによるグルコースからのグルコン酸の生産を目的として、包括、物理吸着、共有結合による三種類の固定化オキシダーゼを調製し、反応速度パラメーターについて検討を行った。その結果、アルギン酸ゲルビーズによる包括固定化酵素は、基質の拡散抵抗、および副生成物のゲル内への蓄積により反応効率が低下することがわかった。また、グルコン酸の生産には、物理吸着固定化酵素が、最適であることがわかった。

## 均一懸濁状態の固一液系攪拌槽の攪拌動力に関する研究

左 波 一 彦

均一懸濁状態の固一液系攪拌槽の攪拌動力に及ぼす、懸濁粒子の容積分率、粒子径分布、平均粒子径、粒子と液との密度差の影響を、球形固体粒子を用いて詳細に検討し、攪拌動力とそれらの諸因子との間に相関式を得た。次に、この結果をもとに、固一液系スラリー操作の一つである湿式球形造粒の進行に伴う攪拌動力の変化について検討を加え、攪拌動力の変化は造粒プロセスの進行の指標となることを明らかにした。(粉体工学会誌, Vol. 29, No. 4, pp. 269 (1992)に掲載, 化学工学会秋季大会発表 (1991年10月)にて発表)

## 有限要素法による乱流促進体間の流動解析

畑 利 幸

本研究はこれまで実験的に捉えてきた乱流促進体間の流れ挙動及び伝熱促進のメカニズムを有限要素法を用いた数値解析により理論的に捉えることを試み、定性的に実験と一致した結果を得た。計算はパソコンの使用を前提として行い、パソコンによる計算によっても流れ挙動や流れが及ぼす伝熱促進効果を定性的に再現することができ、実験の場合と同様な手法で、計算結果から促進体設置の有効性を評価することが可能であることを示した。

## 造粒と粉碎と分粒との同時操作による微細造粒粒子設計

林 田 健 志

粉末新素材の開発にともなう粉体工学的問題の解決法の一つに、微粉末を流動性の高い微細球状粒子に成形加工し、処理する方法が考えられる。本修論では、連続式回転円錐型容器を用いた造粒と粉碎と分粒との同時操作について、その造粒プロセスをモデル化することにより造粒機構を明らかにすると同時に、造粒特性に及ぼす操作条件の影響について検討し、微細造粒粒子生成、設計についての指針を与えた。さらに、それらの結果をもとに計算図表を作成し、より簡単な微細粒子設計法について示した。(粉体工学会誌, Vol. 28, No. 5, pp. 300 (1991)に掲載, 化学工学会第24回秋季大会 (1991年10月, 名古屋)にて発表)

〔電子工学専攻〕

## 電源回路故障診断エキスパートシステムの作成

浅野 一夫

コンピュータやOA機器等に組み込まれている電源回路（直流安定化電源装置）は、地方の中堅エレクトロニクスメーカーで多く生産されている。よって、大規模な故障診断や修理のシステムがなく、多くの場合専門家による手作業での故障診断、修理が行われている。そこで、専門知識を持たない人が手軽に故障診断、修理ができ、また専門家の労力、時間の削減を目的とした故障診断エキスパートシステムを作成した。

## 液晶配向用ラングミュアープロジェクト膜の作製とその特性

尾山 実

ラビング処理の要らない配向処理法のひとつとしてラングミュアープロジェクト（LB）法を用いてLB膜を作製し、この膜を液晶配向膜として液晶セルを作製した。実験に用いたLB法は垂直浸漬法で基板が水面に対して垂直に上下する手法である。この手法を用いてアラキジン酸LB膜、ポリイミドLB膜の2種類について液晶セルを作製した。そのセルについて各特性を調べ、LB膜の液晶配向膜としての有効性を検討した。

## オブジェクト指向を取り入れた論理型言語の作成

金山 昌仙

論理型言語 Prolog は人工知能、エキスパートシステムの研究などに広く使われている。しかし、大規模なプログラムを開発する際において、プログラムのモジュール化に関する機能の欠如、少ないデータ型、プログラム全体に渡って有効な変数がないなど、不足している機能が多い。それら、不足している機能、およびオブジェクト指向の概念を加えることによって、大規模なプログラムの構築を容易にした拡張 Prolog 処理系を作成した。

## Si 基板上への InSb 薄膜の成長

川 島 茂 信

Si (100) 基板上に InSb 薄膜を成長させ、蒸着時のフラックス比 (Sb/In) の影響、蒸着後の熱処理の効果を調べた。それによると、フラックス比を高くすると、ホール移動度がほとんど温度変化しない試料ができた。また、他の全ての試料は全温度領域において n 型を示したのに対して、蒸着後に 300°C で熱処理を行った場合は、熱処理時間を 20 分とすると、低温で p 型高温で n 型の試料ができた。しかし、バルク InSb に比べると、室温移動度は 1 桁以上低くなっている。

## 反強誘電性液晶セルにおける分子配列とその電気光学的特性

櫻 井 鉄 史

反強誘電性液晶は表示焼き付きの問題がないと言う利点を有する。これを表示デバイスとして実用化するにあたって鍵となる立ち下がり応答特性の改善を試みた。その結果、立ち下がり時の印加電圧に対し負の駆動パルス印加することで、立ち下がり時間を約 30 $\mu$ s と従来法と比較して二桁以上短縮できた。また、反転電流測定の結果より分子回転モデルを考察し、負パルス電圧値には最適値が存在することを示した。

## MBE 成長 (Si<sub>12</sub>Ge<sub>4</sub>)<sub>10</sub>/Si(001) 超格子界面の成長温度依存性

新 谷 哲 也

Si(001) 基板上に成長温度 200°C, 300°C, 400°C, 500°C で (Si<sub>12</sub>Ge<sub>4</sub>)<sub>10</sub> 超格子を、成長温度 450°C で (Si<sub>12</sub>Ge<sub>4</sub>)<sub>4</sub> 超格子を分子線エピタキシー法で成長させ、超格子界面の急峻性および超格子構造に対する成長温度依存性を、X 線回折、ラマン散乱、高分解能 (格子像) 透過型電子顕微鏡で評価した。どの成長温度でも超格子構造を形成させることができた。しかし、200°C, 300°C, 500°C では界面は急峻であるが、400°C 付近では界面の急峻性は失われる。この原因として Ge の偏析現象が考えられる。

## 高温超伝導薄膜の MBE 法による作製とその特性

鈴木 浩 司

MBE (分子線エピタキシー) 装置を用い, Bi 系超伝導薄膜をその層状構造に従いながら積み上げ構築することを試みた。通常は蒸着と同時に進行する酸化及び結晶化を, 蒸着/酸化/結晶化の独立したプロセスとして分離し, 各々を望ましい条件で行うことにより, MgO (100) 面上に Bi 系酸化物超伝導体の 2201 相 ( $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CuO}_6$ ) の結晶構造を 1 ユニットセル単位でエピタキシャル成長させることに成功した。得られた薄膜は絶縁体的であった。

## オブジェクト指向と状態遷移モデルに基づくシーケンス制御用言語の作成

滝 田 啓 司

現在, シーケンス制御のプログラミングにはラダーダイアグラム方式が広く用いられているが, この方式はプログラムの構造化, 可読性, 保守性などに問題を持っている。そこでオブジェクト指向と状態遷移モデルに基づく新しい言語を作成した。制御対象を階層構造をなすオブジェクトの集合とみなすことでプログラムの構造化が可能となり, 制御対象の動作を状態遷移を枠組みとして記述することでプログラムの可読性が増した。

## 有機 EL 薄膜素子の電氣的・光学的特性

中 茂 樹

有機 EL 薄膜素子の実用化の鍵となる劣化機構について検討した。ITO/TPD(ホール輸送層)/Al 単層構造と ITO/TPD/Alq3(発光層)/Al 二層構造の印加電圧—電流密度特性, 定電圧劣化特性を検討した結果, 類似の傾向を示したことより TPD 層による電流制限, 劣化が特性に影響していると推定した。また, 二層構造における発光輝度の劣化特性を併せて考えると, 非発光再結合電流の増大を伴うことを示した。



## Bi 系酸化物超伝導体の MBE 成長

鍋 澤 浩 文

シャッター制御を用いた MBE 法で Bi 系酸化物超伝導体の 2201, 2212 相を作製し、作製した薄膜の表面状態を RHEED, 定量分析および Cu の酸化状態を XPS, 結晶性を XRD を用いて評価した。2201 相は基板温度を 700~750°C, Bi, Cu 付着後のオゾン吹き付け時間 300 秒の条件で最も良い結晶性を示した。また 2212 相は, MgO 基板の上に直接蒸着しても形成されないが, a-b 軸の格子定数が等しい 2201 相をバッファ層にすると形成されることが分かった。

## 強誘電性カイラルスメクチック液晶セルの層構造制御

二 宮 徳 博

強誘電性液晶セルの層構造を X 線回折法により調べた。同一主骨格 (同一チルト角) を持ち異なる自発分極を持つ液晶材料と, ネマチック液晶では異なるプレチルト角を持つポリイミド配向処理を組み合わせた。この組み合わせでは, 層傾斜角は自発分極, 配向処理に依らず分子のチルト角の大きさにより一義的に決定されることを明らかにした。また, 容量-電圧特性の結果よりコーン上での分子位置に対するモデルを示した。

## ニューラルネットワークによるカラー画像のベクトル量子化に関する研究

南 朋 之

カラー画像におけるカラー情報圧縮の一方法としてベクトル量子化がある。本研究では, 対象とするカラー画像の適応的ベクトル量子化に, 自己組織型のニューラルネットワークを用いることを提案する。種々のカラー画像について, ニューラルネットワークの諸パラメータを変えてベクトル量子化を行い, 得られた画像の主観評価並びにパラメータ値の検討を行った。その結果, 量子化レベル 64 前後, 学習回数 300 回程度でほぼ良好な量子化画像が得られることが分かった。



平成 5 年 3 月 発行

富山県富山市五福3190番地

富山大学工学部紀要委員会

# Contents

1 . Dynamics of pneumatic transmission lines and equivalent systems .....Yukio MATSUMOTO.....	1
2 . Heat transfer coefficient and radiation efficiency of high electric current bus .....Nagayasu IKEDA, Iwao KITAMURA, Seiji GOTO Toshinari YAMAZAKI, Takakazu TAKAHASHI, Kunio SAWADA Yoshiaki HASHIMOTO, Kohichi KAWAMURA.....	5
3 . Walking pattern of a multiped robot by analyzing the movement of an insect .....Kazuya MIYAKE, Iwao KITAMURA, Toshinari YAMAZAKI Takakazu TAKAHASHI, Seiji INAGAKI, Nagayasu IKEDA.....	11
4 . The Logical Design of Minimal Three-level NAND Circuits (I) —P-N cube method— .....Hideo MATSUDA, Takashi MIYAGOSHI, Toyomasa HATAKEYAMA .....	21
5 . The Logical Design of Minimal Three-level NAND Circuits (II) —The Improvement of P-N Cube Method— .....Takashi MIYAGOSHI, Hideo MATSUDA, Kazuto OOSAWA Toyomasa HATAKEYAMA.....	31
6 . Dressing Method for The Schrödinger Eigenvalue Problem .....Tsutomu KAWATA.....	41
7 . Paillve Transcendents and Its Linearizations .....Tsutomu KAWATA.....	53
8 . Transient Thermal Stresses in a Finite Clad Cylinder .....Takahito GOSHIMA.....	65
9 . Catalytic decomposition of formic acid in alkaline solution .....Yuuko NAKAMURA, Seichi RENGAKUJI, Masami INOUE and Keiichi NISHIBE.....	73
10. Number of Transfer Unit in Chromatographic Separation as an Poisson Process .....Hisaya TANAKA, Hiroyuki KAWASAKI, Tatsumi YAMAMOTO.....	81
11. The Hydrogenation of Cinnamic Acids on Palladium-Dispersed Microelectrodes .....Akihiro MORITA, Michio SAYAMA, Naoyasu ISHIZUKA Masami INOUE, Yuuko NAKAMURA, Seichi RENGAKUJI and Keiichi NISHIBE.....	89
12. Abstracts of Master degree's thesis in 1992 .....	95