三角行列分解と行列リーマン・ヒルベルト問題

富山大学工学部情報処理　川　田　　勉

1．緒　　言

いわゆる逆散乱法とは，解きたい非線形発展方程式をA）あるスペクトラル方程式と同伴する時間方程式に分解し，B）逆スペクトラル理論により解こうとするものであり，これによって設定された初期値問題は一連の線形演算に帰着される。指定された非線形方程式に対しA）のプロセスが可能かどうかは一般的には非常に難かしい問題である。直接A）のプロセスを考える代りに，まずB）を考え，ついで時間発展方程式と連立して，解ける非線形方程式のリストを作っていく。この立場に立つと，どの程度迄のスペクトラル方程式の逆理論が構成できるかという事が重要となってくる。この事自身も簡単な事ではないが，従来迄の結果を拡張するという試みが，高階化，多次元化の方向で努力されている。本文では，高階系への拡張という方向を議論するものであり，以下，時間を省く。正規形の行列スペクトラル方程式　$\Phi_x=\Omega\Phi$で考える。この際Ωの構造を，どの様に取るかという問題があるが行列のオーダーをM（2, 3, …）とする以外は，次の形に限定する。

$$\Phi x=(i\lambda A+Q(x))\Phi \tag{1.1 a}$$

λ はスペクトラル・パラメーターで一般に複素数($\lambda=\xi+i\eta$)である，又Aは対角実定数行列，

$$A\triangleq \mathrm{diag.}[a_1,a_2,\cdots,a_M],\quad a_1<\cdots<a_M, \tag{1.1 b}$$

$Q(x)$ は，非対角ポテンシャル行列である。$M=3$ の時は，有名な三波相互作用方程式のスペクトラル問題であり，すでにZakharov–Manakov(1)，Kaup(2) によって解かれている。我々は，三波相互作用方程式の考察を行い，jost 函数$\Phi(\lambda,x)$ の完全性，逆問題を解くGel'fand–Levitan形積分方程式の一般化，線形化された三波相互作用方程式の解となる〝2乗固有函数〞とその完全性，更には線形化方程式の非斉次一般解の構成を行った。(3) これらは，形式的にはうまく遂行されたのであるが，数学的厳密性に欠けている。従来の 2 × 2 では生じなかったjost 函数の解析接続の困難が原因となって，G－L方程式の一般化に必要な変換演算子の積分核表示，jost 函数の完全性条件等が不明確に定義されたのである。他方，素粒子論等においては，アイソトピック空間に対応した高階系への拡張が重要である。Zakharov　等に始まるリーマン・ヒルベルト問題による扱いがあり，(4,5) 〃解析的因子分解法〃(6,7) によって，ソリトン解が直接的に構成できる。けれど，この方法は初期値問題を解く事ができなかった。最近，我々は，この方法が連続スペクトラムの存在する問題も含めて，従来の逆散乱に完全に対応できる事を$M=2$ の典型であるAKNS 方程式(8) について示した。(9,10) 所で$M=3$ なる式（1.1)にも行列リーマン・ヒルベルト問題を導出できる(3) が，留意すべきはAKNS 方程式の際(9) も同様，jost 函数の解析性の既知な事実を使っている点であり，逆散乱理論を構築しようという本文の主旨にそぐわない。これは，ともかくjost 函数の解析性を明かにする事の重要性に他ならない。

式（1.1 a）で，$Q(x)$ は$x\to\pm\infty$で急減少（もっと強く，ある閉区間 $a\leqq x\leqq b$ 以外で零としても

良い。) とする。この時exp($i\lambda Ax$) を式（1．1）の真空解と呼ぶ。ここで次の行列を導入する，

$$\boldsymbol{\Psi}(\xi,x)\triangleq\exp(-\mathrm{i}\xi Ax)\cdot\boldsymbol{\Phi}(\xi,x)\,,\qquad(\xi=\mathrm{Re}.\lambda)\tag{1.2}$$

簡単な計算から，これは（x，ξ）に関し一様に有界で，$x\to\pm\infty$で$\boldsymbol{\Psi}(\xi,\ x)\to C^{\pm}(\xi)$ とでき，x独立な散乱行列S(ξ) が定義できる。

$$S(\xi)\triangleq C^{+}(\xi)[C^{-}(\xi)]^{-1}.\tag{1.3}$$

問題は，複素数λ に対し定義可能な行列を見い出す事である。Caudrey[11] によれば，次の函数

$$\boldsymbol{\Theta}(\lambda,\ x)\triangleq\boldsymbol{\Phi}(\lambda,\ x)\exp(-i\lambda Ax)\tag{1.4}$$

が，それを与える。然るに，$\boldsymbol{\Theta}$の方程式

$$\boldsymbol{\Theta}x=\mathrm{i}\lambda[\mathrm{A},\ \boldsymbol{\Theta}]+Q(x)\boldsymbol{\Theta},\quad([\mathrm{A},\ \boldsymbol{\Theta}]=\mathrm{A}\boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{\Theta}\mathrm{A})\tag{1.5}$$

は，次の変換に関し不変である，

$$\boldsymbol{\Theta}\to\boldsymbol{\Theta}^{1}=\boldsymbol{\Theta}e^{-iAx}G(\lambda)e^{-i\lambda Ax}.\tag{1.6}$$

この不変性がリーマン・ヒルベルト問題に転化していくのだが，この時（1.6)式右辺の行列Gを散乱行列Sで表示せねばならない。式（1.4)で$x\to\pm\infty$とすると判る様に，$\boldsymbol{\Theta}$の（λ，x）に関する一様有界性から，$C^{\pm}(\lambda)$ 従って$\boldsymbol{\Theta}(x=\pm\infty)$ が下三角又は上三角行列とならねばいけない。この重要な事実は，すでに文献(３)に表れていたが，実はShabat が最初に示したものである。[12] 彼は，この三角行列を使って逆散乱理論の数学的構成を行っている。この三角行列は，行列SでGを定める際の媒介を行うが，この際に冗長度が存在し，これを適当に処理せねばならない。換言すれば，式（1.1)に対する行列リーマン・ヒルベルト問題は一意に定まらないのである。[13] 一方この性質を利用すれば，最も簡潔なリーマン・ヒルベルト問題を与える事ができる。[13, 14] これを主リーマン・ヒルベルト問題と呼ぼう。この選択も含めて，一般のMに対し，リーマン・ヒルベルト問題の具体的表示を与えるのは簡単でない。本文の主たる目的は，この部分の解明にある。散乱行列の一意的三角行列分解が研究され，その逐次表示が与えられる。この分解と，先の三角行列を比較する事によって冗長度の削除が行われる。

2．スペクトラル解の解析性

式（1.2)で導入された$\boldsymbol{\Psi}(\xi,\ x)$は，次の積分方程式を満たす。

$$\boldsymbol{\Psi}(\xi,\ x)=C^{\pm}(\xi)+\int_{\pm\infty}^{x}\mathrm{e}^{-i\zeta Ay}Q(y)\,\mathrm{e}^{i\zeta Ay}\boldsymbol{\Psi}(\xi,\ y)\,\mathrm{d}y.\tag{2.1}$$

これはVolterra 型なので，Neumann 級数は$Q(x)$ の条件から(ξ，x) に関し一様に収束する。そこで次の函数を考える。

$$S(\xi,\ x)\triangleq\boldsymbol{\Psi}(\xi,\ x)[C^{-}(\xi)]^{-1}.\tag{2.2}$$

式（1．3）から$x\to+\infty$について$S(\xi,\ x)\to S(\xi)$ となる。所で（2.1)，（2.2)式から

$$S(\xi,\ x)=E+\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-i\zeta Ay}Q(y)\mathrm{e}^{i\zeta Ay}S(\xi,y)\,\mathrm{d}y.\tag{2.3}$$

$S(\xi, x)$は，(ξ, x) に関し有限であり，そこで 第j 列ベクトル$\boldsymbol{s}_j(\xi, x)$ を取り出し，Neumann 級数に展開し，$1/\xi$ のベキを取り出す。

$$\boldsymbol{s}_j(\xi, x)=|j>+\int_{-\infty}^{x} e^{-i\xi A y} Q(y)\, e^{i\xi A y}\, \boldsymbol{s}_j(\xi, y)\,dy=\sum_{n=0}^{\infty} I_n(\xi, x)\,. \tag{2.4}$$

$I_n(x)$ は，次の遂次列で与えられる。

$$I_{n+1}(\xi, x)=\sum_{k,\ell=1}^{M}\int_{-\infty}^{x}|k>q_{\ell}^{k}(y)\, e^{-i\xi(a_k-a_\ell)y}<\ell|I_n(\xi, y)\,dy;\quad I_1=|j>. \tag{2.5}$$

但し $Q=\sum|k>q_\ell^k<\ell|$. $1/\xi$ のオーダーを評価する，指数函数に注意して部分積分を行って，

$$I_2(\xi, x)=-\frac{1}{i\xi}\sum_{k(\neq j)}|k>\frac{q_j^k(x)}{a_k-a_j}\, e^{-i\xi(a-a_j)x}+O(\xi^{-2}),$$

$$I_3(\xi, x)=-\frac{1}{i\xi}\,|j>\sum_{\ell(\neq j)}\int_{-\infty}^{x}\frac{q_\ell^j(y)q_j^\ell(y)}{a_\ell-a_j}\,dy+O(\xi^{-2}),$$

$I_3\cong\xi^{-1}|j>$を（2.5）式に使えば，$I_4(\xi, x)=O(\xi^{-2})$ をえる。結局，次式となる。

$$\boldsymbol{s}_j(\xi, x)-|j>=-\frac{1}{i\xi}\left\{\sum_{k(\neq j)}|k>\frac{q_j^k(x)}{a_k-a_j}\, e^{-i\xi(a_k-a_j)x}+|j>\sum_{\ell(\neq j)}\int_{-\infty}^{x}\frac{q_\ell^j(y)q_j^\ell(y)}{a_\ell-a_j}\,dy\right\}+O(\xi^{-2}). \tag{2.6}$$

問題は複素面上での議論である。すでに述べたが式(1.4)の$\boldsymbol{\Theta}$がこれを可能にする事を示そう。式(1.5)を積分方程式に直す。$\boldsymbol{\Theta}|j>=\boldsymbol{\theta}_j$,c_jを積分定数としてFredholm型方程式をえる，

$$\boldsymbol{\theta}_j(\lambda, x)=c_j|j>-\left\{K_j\int_{-\infty}^{x}+(E+K_j)\int_{x}^{\infty}\right\} e^{i\lambda(A-a_j)(x-y)}\, Q(y)\,\boldsymbol{\theta}_j(\lambda, y)\,dy. \tag{2.7}$$

対角定数K_jは，後で適当に定められる。Fredholm型ではVolterra 型の様に簡単に収束しない。
M＝2のケースでは，この状態を避けて，θ_1，θ_2 を共にVolterra 型に帰着できる。M≧3では，それは不可能である。θ_j が有界となる様に K_j を設定できる事に注目する。簡単にいえば，積分内の指数項の発散を消す様に K_j を選択する。明らかに全λ面上で指数項を押えられなく，上半面と下半面に分けて考える必要がある。上・下半面に対し，式(2.7)の各量に肩字〝P，N″を付加して区別する。この時，各K_j は1ケの自由度を残して定まる，

$$K_j^P=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} & & & (j) & & \end{array}\\ (j) & \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & k_j^P & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}\end{array},\quad K_j^N=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} & (j) & & \end{array}\\ (j) & \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & k_j^N & \\ & & & & -1 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}\end{array}. \tag{2.8}$$

この$K_j^{P,N}$ に対し$\boldsymbol{\theta}_j^{P,N}$ は上・下半面で解析函数となる。さて，式（2.7)によれば，

$$\lim_{x\to\infty}\boldsymbol{\theta}_j^P(\lambda, x)=c_j^P(\lambda)|j>-\lim_{x\to\infty} e^{i\lambda(A-a_j)(x-b)}.\ K_j^P\int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda(A-a_j)(b-y)}\,\boldsymbol{\theta}_j^P(\lambda, y)\,dy. \tag{2.9}$$

但し，$Q(x)$は $a\leqq x\leqq b$ 以外では零(Compact support)とした。式(2.8)から，列ベクトル$\boldsymbol{\theta}_j^P(x=\infty)$の

第1～第j成分のみが値を持ち，従って行列$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}(x=\infty)$は上三角行列$U^{\mathrm{P}}$となる。その際，式(2.9)の積分項の前に出した指数部は$|\lambda|=\infty$で解析的とならない。この事を式で示せば，上半面で解析的な三角行列$U^{\mathrm{P}}(\lambda)$が存在して，$x\to\infty$について

$$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}(\lambda,\ x)\to \mathrm{e}^{i\lambda A(x-b)}\ U^{\mathrm{P}}(\lambda)\mathrm{e}^{-i\lambda A(x-b)} \tag{2.10}$$

と書け，更に次の行列は（対角成分は別にして）$\mathrm{Im}.\lambda=+\infty$を解析域に含まない。

$$U_0^{\mathrm{P}}(\lambda)=\mathrm{e}^{-i\lambda Ab}\ U^{\mathrm{P}}(\lambda)\mathrm{e}^{i\lambda Ab}\ . \tag{2.11}$$

他のケースもまとめよう。$x\to\{-\infty,\ +\infty\}$に応じて

$$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}(\lambda,\ x)\to\ \mathrm{e}^{i\lambda Ax}\{L_0^{\mathrm{P}}(\lambda),\ U_0^{\mathrm{P}}(\lambda)\}\ \mathrm{e}^{-i\lambda Ax}, \tag{2.12 a}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{N}}(\lambda,\ x)\to\ \mathrm{e}^{i\lambda Ax}\{\ U_0^{\mathrm{N}}(\lambda)\ ,\ L_0^{\mathrm{N}}(\lambda)\ \}\ \mathrm{e}^{-i\lambda Ax}. \tag{2.12 b}$$

さて，これ以降の議論には，式（1.1）の随判系を導入せねばならない。

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_x=-(\mathrm{i}\lambda A+Q^{\mathrm{T}}(x))\ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}.$$

省略するが，随判系の各量（チルドを付す）は，今迄のと同様に導入する。但し，

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}\triangleq e^{-\mathrm{i}\lambda Ax}\ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}\triangleq\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}\,e^{-\mathrm{i}\lambda\mathrm{A}x}.$$

式（2.12）に相当するものは，$x\to\{-\infty,\ +\infty\}$に対し

$$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathrm{P}}(\lambda,\ x)\to\ \mathrm{e}^{-i\lambda Ax}\{\ \widetilde{U}_0^{\mathrm{P}}(\lambda)\ ,\ \widetilde{L}_0^{\mathrm{P}}(\lambda)\ \}\ \mathrm{e}^{i\lambda Ax}, \tag{2.12 c}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathrm{N}}(\lambda,\ x)\to\ \mathrm{e}^{-i\lambda Ax}\{\widetilde{L}_0^{\mathrm{N}}(\lambda)\ ,\ \widetilde{U}_0^{\mathrm{N}}(\lambda)\ \}\ \mathrm{e}^{i\lambda Ax}. \tag{2.12 d}$$

式（1.6）の不変性を使って$x=\pm\infty$で規格化された解$\boldsymbol{\Theta}_{\pm}$を構成する，

$$\{\ \boldsymbol{\Theta}_{-},\ \ \boldsymbol{\Theta}_{+}\}\ =\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}\ \mathrm{e}^{i\xi Ax}\{[L_0^{\mathrm{P}}]^{-1}\ ,\ [U_0^{\mathrm{P}}]^{-1}\}\mathrm{e}^{-i\xi Ax}$$

$$=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{N}}\ \mathrm{e}^{i\xi Ax}\{[U_0^{\mathrm{N}}]^{-1}\ ,[L_0^{\mathrm{N}}]^{-1}\}\mathrm{e}^{-i\xi Ax}, \tag{2.13 a}$$

$$\{\ \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_{-},\ \ \boldsymbol{\Theta}_{+}\}=\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathrm{P}}\ \ \mathrm{e}^{-i\xi Ax}\{[\widetilde{U}_0^{\mathrm{P}}]^{-1},\ [\widetilde{L}_0^{\mathrm{P}}]^{-1}\}\mathrm{e}^{i\xi Ax}$$

$$=\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^{\mathrm{N}}\ \ \mathrm{e}^{-i\xi Ax}\{[\widetilde{L}_0^{\mathrm{N}}]^{-1},[\widetilde{U}_0^{\mathrm{N}}]^{-1}\}\mathrm{e}^{i\xi Ax}\ . \tag{2.13 b}$$

$x\to\pm\infty$に対し，明かに$\boldsymbol{\Theta}_{\pm}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_{\pm}\to E$である。又，簡単な計算から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ [\ \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_{\pm}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{\Theta}_{\pm}]=\mathrm{i}\xi[A,\ \widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_{\pm}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}_{\pm}]$$

であり，従って

$$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_{\pm}^{\mathrm{T}}\ (\xi,\ x)\ \boldsymbol{\Theta}_{\pm}(\xi,\ x)\ =E. \tag{2.14}$$

式(2.13)を（2.14）に代入すると，上下半面に解析接続できる行列$G^{\mathrm{P,N}}(\lambda)$が定義できる。仮りに，$G^{\mathrm{P}}(\lambda)$を取り上げると，

$$G^{P} \triangleq [\tilde{\Theta}^{P}]^{T} \Theta^{P} = e^{i\zeta A x}[\tilde{U}_0^{P}]^{T} L_0^{P} e^{-i\zeta A x},$$

指数項が存在しても上半面で解析的なのだから，$[\tilde{U}_0^{P}]^{T} L_0^{P}$，従って$G^{P}$ は対角行列でなければならない。この関係をまとめると，

$$G^{P} \triangleq [\tilde{\Theta}^{P}]^{T} \Theta^{P} = [\tilde{U}_0^{P}]^{T} L_0^{P} = [\tilde{L}_0^{P}]^{T} U_0^{P} \quad , \tag{2.15 a}$$

$$G^{N} \triangleq [\tilde{\Theta}^{N}]^{T} \Theta^{N} = [\tilde{L}_0^{N}]^{T} U_0^{N} = [\tilde{U}_0^{N}]^{T} L_0^{N}. \tag{2.15 b}$$

更に式（2.13）より散乱行列と（1．6）式で示した行列Gに関して，次の関係が成立つ，

$$\begin{cases} S(\xi) = e^{-i\xi A x}[\Theta_{+}(\xi, x)]^{-1} \Theta_{-}(\xi, x) e^{i\xi A x}, \\ \\ \tilde{S}(\xi) = e^{i\xi A x}[\tilde{\Theta}_{+}(\xi, x)]^{-1} \tilde{\Theta}_{-}(\xi, x) e^{-i\xi A x}, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} [\Theta^{N}(\xi, x)]^{-1} \Theta^{P}(\xi, x) = e^{i\xi A x} G(\xi) e^{-i\xi A x}, \\ \\ [\tilde{\Theta}^{N}(\xi, x)]^{-1} \tilde{\Theta}^{P}(\xi, x) = e^{-i\xi A x} \tilde{G}(\xi) e^{i\xi A x}. \end{cases} \tag{2.17}$$

式（2.12）を考慮して，行列 S, G 等を三角行列（L, U）で書ける。

$$S = U_0^{P}[G^{P}]^{-1}[\tilde{U}_0^{P}]^{T} = L_0^{N}[G^{N}]^{-1}[\tilde{L}_0^{N}]^{T}, \tag{2.18 a}$$

$$\tilde{S} = \tilde{U}_0^{N}[G^{N}]^{-1}[U_0^{N}]^{T} = \tilde{L}_0^{P}[\tilde{G}^{P}]^{-1}[L_0^{P}]^{T}, \tag{2.18 b}$$

$$G = [G^{N}]^{-1}[\tilde{U}_0^{N}]^{T} U_0^{P} = [G^{N}]^{-1}[\tilde{L}_0^{N}]^{T} L_0^{P}. , \tag{2.19 a}$$

$$\tilde{G} = [G^{N}]^{-1}[U_0^{N}]^{T} \tilde{U}_0^{P} = [G^{N}]^{-1}[L_0^{N}]^{T} \tilde{L}_0^{P}, \; . \tag{2.19 b}$$

式（2.15），（2.18）より次式が成立つ．

$$\tilde{S}^{T}(\xi) S(\xi) = E. \tag{2.20}$$

$S = [s_j^i]$ として，次の様な主小行列式を定義しよう，

$$\det_j S \triangleq \begin{pmatrix} s_1^1 & \cdots & s_j^1 \\ \vdots & & \vdots \\ s_1^j & \cdots & s_j^j \end{pmatrix}, \quad \det^k S \triangleq \begin{pmatrix} s_k^k & \cdots & s_M^k \\ \vdots & & \vdots \\ s_K^M & \cdots & s_M^M \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

式（2.11）と $\det_j(LU) = \det_j L \cdot \det_j U$ 等に留意して，式（2.18）から次の関係をえる。

$$\det_j S = \det_j L^{N} \cdot \det_j \tilde{L}^{N} / \det_j G^{N}, \quad \det^k S = \det^k U^{P} \cdot \det^k \tilde{U}^{P} / \det_j^k G^{P}, \tag{2.22 a}$$

$$\det_j \tilde{S} = \det_j \tilde{L}^{P} \cdot \det_j L^{P} / \det_j G^{P}, \quad \det^k \tilde{S} = \det^k \tilde{U}^{N} \cdot \det^k U^{N} / \det G^{N}, \tag{2.22 b}$$

明らかに $(\det_j \widetilde{S}, \det^k S)$ は，上半面で，$(\det_j S, \det^k \widetilde{S})$ は下半面で解析的となる。

3．リーマン・ヒルベルト問題

すでに述べた様に，式（2.17）がリーマン・ヒルベルト問題になっていく。その際，行列 $G, \widetilde{G}$ を各 S 行列要素を使って表示したい。而るに，式（2.18),(2.19)から判るのだが，一意にそれを行えない。その理由は，任意な行列の一意的三角分解は対角成分を 1 とする〝強″(上・下）三角行列(U, L）と対角行列(D)の積の形（LDU 又は UDL で与えられるのに対し，式（2.18）に使われた三角行列の対角成分は 1 でないからである。この部分を明確にするために，とにかく S 行列の一意的分解を定義する。

$$S \triangleq S_L^N S_D^N S_U^N = S_U^P S_D^P S_L^P, \quad \widetilde{S} \triangleq \widetilde{S}_L^P \widetilde{S}_D^P \widetilde{S}_U^P = \widetilde{S}_U^N \widetilde{S}_D^N \widetilde{S}_L^N \tag{3.1}$$

ここに $S_{L,U}$ 等は強三角，S_D は対角，肩字 P, N は主小行列式（2.22）との比較による対角部分 $S_D, \widetilde{S}_D$ の上・下半面における解析性に応じて付加された。つまり$(S_D^N, \widetilde{S}_D^N)$ は下半面で，$(S_D^P, \widetilde{S}_D^P)$ は上半面で解析的である。式（3.1）を（2.20）に代入すると，

$$\widetilde{S}_D^P S_D^P = \widetilde{S}_D^N S_D^N = E, \tag{3.2 a}$$

$$[\widetilde{S}_L^P]^T S_U^P = [\widetilde{S}_U^P]^T S_L^P = [\widetilde{S}_U^N]^T S_L^N = [\widetilde{S}_L^N]^T S_U^N = E. \tag{3.2 b}$$

式（2.17）の左辺の逆行列を式（2.15）で書き直す事ができる，

$$[\widetilde{\Theta}^N]^T \Theta^P = e^{i\xi Ax} G_{NP} e^{-i\xi Ax}, \quad [\widetilde{\Theta}^P]^T \Theta^N = e^{i\xi Ax} G_{PN} e^{-i\xi Ax}. \tag{3.3 a}$$

但し，

$$G_{NP} = [\widetilde{U}_0^N]^T U_0^P = [\widetilde{L}_0^N]^T L_0^P, \quad G_{PN} = [\widetilde{U}_0^P]^T U_0^N = [\widetilde{L}_0^P]^T L_0^N. \tag{3.3 b}$$

ここで，U_0, L_0 等を強三角行列（L_1, U_1 等）と対角行列（D_L, D_U 等）に一意分解しよう，

$$L_0^{P,N} = L_1^{P,N} D_L^{P,N}, \quad U_0^{P,N} = U_1^{P,N} D_U^{P,N}, \quad \widetilde{L}_0^{P,N} = \widetilde{L}_1^{P,N} \widetilde{D}_L^{P,N}, \quad \widetilde{U}_0^{P,N} = \widetilde{U}_1^{P,N} \widetilde{D}_U^{P,N}. \tag{3.4}$$

これを式（2.18）に代入し，式（3.1）と比較すれば，まず強三角部分は

$$\begin{cases} S_L^N = L_1^N, \ S_U^N = [\widetilde{L}_1^N]^T, \quad S_L^P = [\widetilde{U}_1^P]^T, \ S_U^P = U_1^P, \\ \widetilde{S}_L^P = \widetilde{L}_1^P, \ \widetilde{S}_U^P = [L_1^P]^T, \quad \widetilde{S}_L^N = [U_1^N]^T, \ \widetilde{S}_U^N = \widetilde{U}_1^N, \end{cases} \tag{3.5 a}$$

と一意に対応する。これと（3.2 b）を使って式（2.15）を整理すれば

$$G^P = \widetilde{D}_U^P D_L^P = \widetilde{D}_L^P D_U^P, \quad G^N = \widetilde{D}_L^N D_U^N = \widetilde{D}_U^N \mathrm{D}_L^N. \tag{3.6}$$

これを（3.5 a）に対応する対角成分の関係に適用すると，

$$\begin{cases} S_D^N = D_L^N [D_U^N]^{-1} = \widetilde{D}_L^N [\widetilde{D}_U^N]^{-1} = [\widetilde{S}_D^N]^{-1}, \\ S_D^P = D_U^P [D_L^P]^{-1} = \widetilde{D}_U^P [\widetilde{D}_L^P]^{-1} = [\widetilde{S}_D^P]^{-1}. \end{cases} \tag{3.5 b}$$

明かに冗長があって，$S_D^{P,N}$ 等を与えても $D_{L,U}^{P,N}$ 等は定まらない。少し吟味すれば判るが，$D_L^{P,N}$ を固定すれば他は定まる。特に，次の選定が許される。

$$D^{P,N}_{L,U}=\widetilde{D}^{P,N}_{L,U}. \tag{3.7}$$

以下，この条件下で議論を進める。先の関係式（3.6),(3.5b),(3.3b）は，次の様になる，

$$G^{P}=D^{P}_{U}D^{P}_{L},\quad G^{N}=D^{N}_{U}D^{N}_{L}, \tag{3.8}$$

$$S^{N}_{D}=D^{N}_{L}[D^{N}_{U}]^{-1}=[\widetilde{S}^{N}_{D}]^{-1}\ ,\quad S^{P}_{D}=D^{P}_{U}[D^{P}_{L}]^{-1}=[\widetilde{S}^{P}_{D}]^{-1}\ , \tag{3.9}$$

$$G_{NP}=D^{N}_{U}[\widetilde{S}^{N}_{U}]^{T}S^{P}_{U}D^{P}_{U}=D^{N}_{L}S^{N}_{U}[\widetilde{S}^{P}_{U}]^{T}D^{P}{}_{L}, \tag{3.10a}$$

$$G_{PN}=D^{P}_{U}S^{P}_{L}[\widetilde{S}^{N}_{L}]^{T}D^{N}_{U}=D^{P}_{L}[\widetilde{S}^{P}_{L}]^{T}S^{N}_{L}D^{N}_{L}. \tag{3.10b}$$

付録に示した関係(A.3),(A.7),(B.2a),(B.3a)等によれば，式（3.9）の対角行列は，

$$S^{N}_{D}=\mathrm{diag.}\left[\ s_{11},\frac{\mu^{N}_{2}}{s_{11}}\ ,\frac{\mu^{N}_{3}}{\mu^{N}_{2}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\widetilde{s}_{MN}}{\mu^{N}_{M-2}}\ ,\ \frac{1}{\widetilde{s}_{MM}}\ \right], \tag{3.11a}$$

$$S^{P}_{D}=\mathrm{diag.}\left[\ \frac{1}{s_{11}},\ \frac{\widetilde{s}_{11}}{\mu^{P}_{2}}\ ,\ \frac{\mu^{P}_{2}}{\mu^{P}_{3}},\ \cdots\cdots,\ \frac{\mu^{P}_{M-2}}{s_{MM}}\ ,\ s_{MM}\ \right]. \tag{3.11b}$$

ここに$\mu^{P,N}_{j}$は（B.4）式の一般化であり，2≦j≦M−2の時に存在する。　，

$$\mu^{N}_{j}\triangleq|\,s_{11},\cdots,s_{jj}|=|\widetilde{s}_{j+1,j+1},\cdots,\widetilde{s}_{MM}|,\ \mu^{P}_{j}\triangleq|\widetilde{s}_{11},\cdots,\widetilde{s}_{jj}|=|\,s_{j+1,j+1},\cdots,s_{MM}|\ . \tag{3.12}$$

これによれば，$\mu^{P,N}$なる函数はM≦4で本質的であるといえる。さて，式(3.9),(3.11)から，次の様に（3.7）式の行列を定める。

$$\begin{cases} D^{N}_{L}=\mathrm{diag.}[\ s_{11},\ \mu^{N}_{2},\cdots,\widetilde{s}_{MM},\ 1]\ ,\quad D^{N}_{U}=\mathrm{diag.}[\ 1,\ s_{11},\cdots,\mu^{N}_{M-2},\ \widetilde{s}_{MM}]\ , \\ \\ D^{P}_{L}=\mathrm{diag.}[\widetilde{s}_{11},\ \mu^{P}_{2},\cdots,s_{MM},\ 1]\ ,\quad D^{P}_{U}=\ \mathrm{diag.}[\ 1,\ \widetilde{s}_{11},\cdots,\mu^{P}_{M-2},\ s_{MM}]\ . \end{cases} \tag{3.13}$$

式(3.10)の主小行列式を取り，（3.9）式を使うと，

$$\det{}_{j}\,(\,S^{P}_{D}[S^{N}_{D}]^{-1})=\det{}_{j}(\,S^{N}_{U}[\widetilde{S}^{P}_{U}]^{T}),\quad \det{}^{k}(\,S^{N}_{D}[\,S^{P}_{D}]^{-1})=\det{}^{k}([\widetilde{S}^{N}_{U}]^{T}S^{P}_{U}). \tag{3.14}$$

これは，行列$D^{P,N}_{L,U}$の成分に関するスカラー形リーマン・ヒルベルト問題である。$D^{P,N}_{L,U}(\lambda)$は上下半面に解析接続でき，$|\lambda|\to\infty$で単位行列に漸近する事から，強三角行列部分が実軸上で与えられゝば，$D^{P,N}_{L,U}$の各成分は一意に再構成できる事になる。この事実は，強三角行列が連続スペクトルに関する散乱データとなる事を暗示する。さて，例えば（3.10b）式の$D^{P}_{U}S^{P}_{L}[\widetilde{S}^{N}_{L}]^{T}D^{N}_{U}$の(1−1),($M-M$) 要素を取出そう。(1−1)要素は明かに1である。一方，($M-M$)要素は付録Aから$\widetilde{s}_{M1}\widetilde{s}_{M1}+\cdots+s_{MM}\widetilde{s}_{MM}$となるが$S^{T}S=E$, つまり$\widetilde{s}_{jk}=\sum_{m}\widetilde{s}_{mj}s_{mk}$よりやはり1となる。従って，

$$G^{0}_{NP}\triangleq E-G_{NP},\quad G^{0}_{PN}\triangleq E-G_{PN}, \tag{3.15}$$

を導くと，これらの(1−1)，($M-M$)要素は消失する。この事実は，式(3.3a)，(3.15)より得られる解析接続を与える式の簡単化に貢献する，

$$\boldsymbol{\Theta}^{P}(\lambda,\ x)=E-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-\lambda}\ \boldsymbol{\Theta}^{N}(\xi,\ x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Ax}[\,G^{N}(\xi)]^{-1}G^{0}_{NP}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Ax}\quad(\mathrm{I\,m.}\,\lambda>0), \tag{3.16a}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{N}(\lambda,\ x)=E+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-\lambda}\ \boldsymbol{\Theta}^{P}(\xi,\ x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Ax}[\,G^{P}(\xi)]^{-1}G^{0}_{PN}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Ax}\quad(\mathrm{I\,m.}\,\lambda<0). \tag{3.16b}$$

これと少し異った関係を次の様に求めることができる。(2.13 a)式等より，次の様な関係をえる。

$$\boldsymbol{\Theta}_{+}=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}[D_{\mathrm{U}}^{\mathrm{P}}]^{-1}\mathrm{e}^{i\xi Ax}[\widetilde{S}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-i\xi Ax}=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{N}}[D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{N}}]^{-1}\mathrm{e}^{i\xi Ax}[\widetilde{S}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}]^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-i\xi Ax}, \tag{3.17 a}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{-}=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}[D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}]^{-1}\mathrm{e}^{i\xi Ax}S_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}\mathrm{e}^{-i\xi Ax}=\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{N}}[D_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}]^{-1}\mathrm{e}^{i\xi Ax}S_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}\mathrm{e}^{-i\xi Ax}. \tag{3.17 b}$$

例えば，(3.17 a) 式を分解すると，

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{P}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}=-\sum_{\mathrm{k}=1}^{j-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{P}}<\mathrm{k}|[\widetilde{S}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}]^{\mathrm{T}}|\mathrm{j}>\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{\mathrm{kj}}x}+\sum_{\mathrm{k}=\mathrm{j}+1}^{\mathrm{M}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{N}}<\mathrm{k}|[\widetilde{S}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}]^{\mathrm{T}}|\mathrm{j}>\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{\mathrm{kj}}x}. \tag{3.18}$$

但し，$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}[D_{\mathrm{U}}^{\mathrm{P}}]^{-1}=(\hat{\theta}_1^{\mathrm{P}}, \hat{\theta}_2^{\mathrm{P}}, \cdots)$，$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{N}}[D_{\mathrm{L}}^{\mathrm{N}}]^{-1}=(\hat{\theta}_1^{\mathrm{N}}, \hat{\theta}_2^{\mathrm{N}}, \cdots)$ 又$\beta_{\mathrm{kj}}=\mathrm{a}_{\mathrm{k}}-\mathrm{a}_{\mathrm{j}}$ である。これは，ベクトル形式のリーマン・ヒルベルト問題べあり$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{P}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{N}}$ に関してのコーシー積分表示をえるが，(3.16)式と同様にその形は解かれていない。これは，従来のケースがすべてそうであった様に，解法はそんなに簡単でない。これとは別に，式(2.7)から判る様に，行列$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P,N}}$はフレドホルム方程式に従うが，次の成分

$$\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{P}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{\theta}_{1+},\quad \boldsymbol{\theta}_4^{\mathrm{N}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_4^{\mathrm{N}}=\boldsymbol{\theta}_{+4},\quad \boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{N}}=\boldsymbol{\theta}_{1-},\quad \boldsymbol{\theta}_4^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{\theta}_{-4}\quad (\mathrm{M}=4) \tag{3.19}$$

に限り，ボルテラ方程式に従う。故にこの各成分は，各々の上下半面上に特異点（極）を持たず，λ独立な核を持った積分演算子（変換演算子）表現を持つ。$M=2$ では$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P,N}}$ の成分は式(3.19) のもののみで，直接逆問題を解く Gel′fand-Levitan 方程式が得られる。これらの事柄が $3\leqq M$ でどうなるかは次節で論じられるが，式(3.18)に現れている行列$\widetilde{S}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}$, $\widetilde{S}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}$が散乱データ行列と呼ばれるにふさわしい事と，$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P,N}}$とポテンシャル$Q(x)$ を結ぶ関係が必要であるという事である。行列リーマン・ヒルベルト問題の変分操作を行って，次の表示が求まる，[10,14]

$$\begin{aligned}Q(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\ \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{P}}(\xi,\ x)[G^{\mathrm{P}}(\xi)]^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Ax}G_{\mathrm{PN}}^{0}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Ax}]\,\mathrm{d}\xi\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A,\ \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{N}}(\xi,\ x)[G^{\mathrm{N}}(\xi)]^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Ax}G_{\mathrm{NP}}^{0}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Ax}]\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{3.20}$$

4．逆　散　乱

$M=3,4$のケースにおける逆理論の構成を考える。$M=3$ ではボルテラ形(3.19)以外の成分$\theta_2^{\mathrm{P,N}}$が存在するが，式 (3.18) によれば

$$\boldsymbol{\theta}_{2+}=\frac{\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{P}}}{\widetilde{s}_{11}}+\boldsymbol{\theta}_3^{\mathrm{P}}\frac{\widetilde{s}_{21}}{\widetilde{s}_{11}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{12}x}=\frac{\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{N}}}{\widetilde{s}_{33}}+\boldsymbol{\theta}_3^{\mathrm{N}}\frac{\widetilde{s}_{23}}{\widetilde{s}_{33}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{32}x}. \tag{4.1}$$

これよりθ_2^{P}, θ_2^{N}に関し解けた形のコーシー積分表示を得る。

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{P}}/\widetilde{s}_{11})(\lambda,\ x)\\(\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{N}}/\widetilde{s}_{33})(\lambda,\ x)\end{array}\right\}=|2>+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-\lambda}[\boldsymbol{\theta}_3^{\mathrm{N}}\widetilde{\gamma}_3^2e^{-\mathrm{i}\xi\beta_{23}x}-\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{P}}\widetilde{\gamma}_1^2e^{\mathrm{i}\xi\beta_{12}x}](\xi,\ x). \tag{4.2}$$

但し，$\widetilde{\gamma}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{j}}=<\mathrm{j}|\{\widetilde{S}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{P}}+\widetilde{S}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}\}|\mathrm{k}>$. θ_1^{P}, θ_3^{N}の表示も同様に与えられるが，変換演算子の核が定義できる。

$$K^{\mathrm{P}}(x,\ y)=-\frac{\beta_{12}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{P}}(\xi+\mathrm{i}\epsilon,x)-|1>\}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{12}(x-y)}\,\mathrm{d}\xi,$$

$$K^{\mathrm{N}}(x,\ y)=-\frac{\beta_{23}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\ \theta_3^{\mathrm{N}}(\xi-\mathrm{i}\varepsilon,\ x)-|3>\}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\beta_{23}(x-y)}\,\mathrm{d}\xi.\quad(\ 0<\varepsilon\ll 1)\tag{4.3}$$

この核に関する閉じたGel' fand- Levitan　方程式，又式(3.16),(3.20),(4.3)より核とポテンシャルの関係が求まる。[14]　我々は式(3.13)の行列が零点を持たない（連続スペクトルのみ）としている。

$M=4$ のケースの解析は複雑であるが付録Bに示した S 行列の分解を使えば，式(3.18)が書き下せる。

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{P}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{N}}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{N}}\gamma_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{21}x}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{\mathrm{N}}\tilde{\rho}_3^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{31}x}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_4^{\mathrm{N}}\tilde{\gamma}_4^1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{41}x},\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_4^{\mathrm{N}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_4^{\mathrm{P}}=-\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{\mathrm{P}}\gamma_4^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{34}x}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{P}}\tilde{\rho}_2^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{24}x}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{P}}\tilde{\gamma}_1^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{14}x},\end{cases}\tag{4.4 a}$$

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{P}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{N}}=\boldsymbol{\theta}_4^{\mathrm{N}}\tilde{\gamma}_4^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{42}x}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{\mathrm{N}}\tilde{\rho}_3^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{32}x}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{P}}\tilde{\gamma}_1^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{12}x},\\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{\mathrm{N}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{P}}\tilde{\gamma}_1^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{13}x}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{P}}\tilde{\rho}_2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{23}x}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_4^{\mathrm{N}}\tilde{\gamma}_4^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\beta_{43}x}.\end{cases}\tag{4.4 b}$$

但し，

$$\tilde{S}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}1, & & & \\ \tilde{\gamma}_1^2, & 1, & & \\ \tilde{\gamma}_1^3, & \tilde{\rho}_2^3, & 1, & \\ \tilde{\gamma}_1^4, & \tilde{\rho}_2^4, & -\gamma_4^3, & 1\end{bmatrix},\quad \tilde{S}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}1, & -\gamma_1^2, & \tilde{\rho}_3^1, & \tilde{\gamma}_4^1\\ & 1, & \tilde{\rho}_3^2, & \tilde{\gamma}_4^2\\ & & 1, & \tilde{\gamma}_4^3\\ & & & 1\end{bmatrix}.\tag{4.5}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_1^{\mathrm{P}}(=\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{P}})$ と $\hat{\boldsymbol{\theta}}_4^{\mathrm{N}}(=\boldsymbol{\theta}_4^{\mathrm{N}})$ は（4.3）式の様に λ 独立な核を定義するが（4.4 a）式より判る様に，それらのコーシー積分表示には，$\boldsymbol{\theta}_{2;3}^{\mathrm{P};\mathrm{N}}$ が含まれる。$M=3$ では，これは(4.1)，(4.2)式を使って消去されそれでGel' fand- Levitan方程式が構成されたが，今のケースではその操作は困難である。(4.1)式に相当する式は(4.4 b)で変数が倍に増えたのに応じて２ケの関係があるのだけれど，それを使って，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_2^{\mathrm{P}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_3^{\mathrm{N}}$ の閉じた形のコーシー積分表示が作れないのである。それが可能になるのは $\tilde{\rho}_3^2$, ρ_2^3 が消失するケースである。

$$\tilde{\rho}_3^2\triangleq\frac{|\tilde{S}_{23},\ \tilde{S}_{44}|}{|S_{33},\ \tilde{S}_{44}|}=0,\quad \tilde{\rho}_2^3\triangleq\frac{|\tilde{S}_{11},\ \tilde{S}_{32}|}{|\tilde{S}_{11},\ \tilde{S}_{22}|}=0.\tag{4.6}$$

この困難は，ボルテラ形成分をベースにしている事に留意しよう。もっと広い意味で(4.4)式に対する解法が研究されるべきである。少くとも(4.5)式は，$\tilde{\rho}_3^2$, $\tilde{\rho}_2^3$ を小パラメーターとみて摂動解を持っており従って解の存在がいえる。（4.6）式の持つ意味，極の寄与による解の研究が，今後の課題となろう。

5．結　言

$M\times M$ 次のスペクトラル問題の解析性が明らかにされ，それに関与する三角行列の代数が調べられた。スペクトラル解や，散乱行列の主小行列式の構成を与えるリーマン・ヒルベルト問題の一般形式が与えられ，逆散乱の問題がこれらの解法に帰着された。最も重要な結果は（3.18）式に示すリーマン・ヒルベルト問題であり，散乱（行列）データーが S 行列の三角分解で得られる２種の三角行列に相当する事を示している。この表示を変分して，ポテンシャルの変分と散乱データーの変分を関係付ける式が得られる可能性があり，高階系の線形化問題に対し重要である。更に，この関係は逆問題を直接解くGel' fand- Levitan方程式の導出に使われ，実際 $M\leqq 3$ で成功する。けれど，$4\leqq M$ では大きな困難に見舞れ，ある条件(4.6)が課されないと，Gel' fand- Levitan方程式は簡単に求まらないのである。

参 考 文 献

(1) V. E. Zakharov and S. V. Manakov: JETP Soviet Phys. **42**(1976) 482
(2) D. J. Kaup: Studd. Appl. Math. **55**(1976) 9
(3) T. Kawata: Research Report of IPP Nagoya Univ., 1983, No.IPPJ-**641**
(4) A. A. Belavin and V. E. Zakharov : Phys. Lett. **73**B (1978) 53
(5) V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov: Commun. Math. Phys. **74**(1980) 21
(6) V. E. Zakharov and A. B. Shabat: Func. Anal. Appl. **13**(1980) 13
(7) 川田 勉：富山大学工学部紀要，**35**，p101，昭和59年３月
(8) M. J. Ablowity, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur: Stud. Appl. Math. **53**(1974) 249
(9) T. Kawata: J. Phys. Soc. Jpn **51**(1982) 3381
(10) T. Kawata: J. Phys. Soc. Jpn **53**(1984) 2879
(11) P. J. Caudrey: Physica **6D**(1982) 51
(12) A. B. Shabat: 1980 Plenum Publishing Co., translated from Differential Equations, **15**(1979) 1824
(13) T. Kawata: "Triangular Factorigations and Riemann-Hilbert Problem of the AKNS Equation", J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 57
(14) T. Kawata: "Riemann-Hilbert Problem and Inverse Scattering Method for the 3×3-Spectral Problem", J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 885.

付録Ａ．　散乱行列の三角分解

行列 S（その要素を s_{ij} とする）の一意的三角分解を具体的に調べる。

A1）LDU分解

対角要素を１とする強三角行列 $L(=[\ell^j_m])$, $U(=[u^m_k])$ と対角行列 $D(=[d_m])$ で $S=LDU$ と分解する。この分野は一意であり，次の関係から遂次的に L, D, U が決定できる。

$$s_{jk}=\sum_{m=1}^{\inf(j,k)} \ell^j_m d_m u^m_k \qquad (j,k=1,\ \cdots,\ M)\ . \tag{A,1}$$

但し和は m＝１より (j, k) の小さい値迄とられる。s_{jk} が M 次行列の要素である事から $s_{jk}=s^{(M)}_{jk}$ と記すと

$$s^{(M-1)}_{jk}=\det\begin{bmatrix} s^{(M)}_{11}, & s^{(M)}_{1k} \\ s^{(M)}_{j1}, & s^{(M)}_{jk}\end{bmatrix} \triangleq |s^{(M)}_{11},\ s^{(M)}_{jk}|\quad (2\leqq j, k),\ s^{(M-2)}_{jk}=|s^{(M-2)}_{22},\ s^{(M-1)}_{jk}|\quad (3\geqq j,\ k),\ \cdots,$$

の様に（$M-1$）次，（$M-2$）次の行列の要素を構成してゆける。この一般項は

$$s^{(M-n+1)}_{jk}=|s^{(M-n+2)}_{n-1,n-1}\ ,\ s^{(M-n+2)}_{jk}|\quad (2\leqq n\leqq j, k\leqq M) \tag{A.2a}$$

で与えられ，これを使えば，三角行列成分は次式で与えられる。

$$\ell^j_n=\frac{s^{(M-n+1)}_{jn}}{s^{(M-n+1)}_{nn}}\ ,\qquad U^n_k=\frac{s^{(M-n+1)}_{nk}}{s^{(M-n+1)}_{nn}}\ . \tag{A.2b}$$

対角成分も同様に決定できる，

$$d_1 = s_{11}^{(M)},\ d_2 = \frac{s_{22}^{(M-1)}}{s_{11}^{(M)}},\ d_3 = \frac{s_{33}^{(M-2)}}{s_{11}^{(M)}\ s_{22}^{(M-1)}},\ \cdots,\ d_n = \frac{s_{nn}^{(M-n+1)}}{s_{11}^{(M)}\ s_{22}^{(M-1)} \cdots s_{n-1,n-1}^{(M-n+2)}} \qquad (A.2c)$$

これと違った表示わある。$S=LDU$の主小列式を取れば容易に判るように,

$$d_1 = s_{11},\quad d_2 = \frac{|s_{11},\ s_{22}|}{s_{11}},\quad d_3 = \frac{|s_{11},\ s_{22},\ s_{33}|}{|s_{11},\ s_{22}|},\ \cdots,\ d_n = \frac{|s_{11}, \cdots, s_{n-1,n-1},\ s_{nn}|}{|s_{11},\ \cdots,\ s_{n-1,n-1}|}. \qquad (A.3)$$

これらより，主小行列式と（A.2a）式の行列要素の間に何等かの関係が期待される。実際，計算をしてみると，次の関係が得られる。

$$s_{jk}^{(M-2)} = s_{11}\,|s_{11},\ s_{22},\ s_{jk}|,\qquad s_{jk}^{(M-3)} = (s_{11})^2\,|s_{11},\ s_{22}|\cdot|s_{11},\ s_{22},\ s_{33},\ s_{jk}|. \qquad (A.4)$$

A2）UDL分解

改めて$S=UDL$とすれば，式（A.1）に対応して,

$$s_{jk} = \sum_{m=\sup(j,k)}^{M} u_m^j\, d_m\, \ell_k^m. \qquad (A.5)$$

$1 \leqq j,\ k \leqq M-n$ において，各要素は次式で与えられる。

$$s_{jk}^{(M-n)} = |s_{jk}^{(M-n+1)},\ s_{M-n+1,M-n+1}^{(M-n+1)}|, \qquad (A.6a)$$

$$u_{M-n}^{j} = \frac{s_{j,M-n}^{(M-n)}}{s_{M-n,M-n}^{(M-n)}},\quad \ell_K^{M-n} = \frac{s_{M-n,k}^{(M-n)}}{s_{M-n,M-n}^{(M-n)}},\quad d_{M-n} = \frac{s_{M-n,M-n}^{(M-n)}}{s_{MM}^{(M)}\ s_{M-1,M-1}^{(M-1)} \cdots s_{M-n+1,M-n+1}^{(M-n+1)}}: \qquad (A.6b)$$

式（A,3），（A.4）に対応して

$$d_M = s_{MM},\quad d_{M-1} = \frac{|s_{M-1,M-1},\ s_{MM}|}{s_{MM}},\quad d_{M-2} = \frac{|s_{M-2,M-2},\ s_{M-1,M-1},\ s_{MM}|}{|s_{M-1,M-1},\ s_{MM}|},\ \cdots,$$

$$d_{M-n} = \frac{|s_{M-n,M-n},\ s_{M+n-1,M-n+1} \cdots,\ s_{MM}|}{|s_{M-n+1,M-n+1}, \cdots,\ s_{MM}|}, \qquad (A.7)$$

$$s_{jk}^{(M-2)} = s_{MM}\,|s_{jk},\ s_{M-1,M-1},\ s_{MM}|,\quad s_j^{(M-3)} = (s_{MM})^2\,|s_{M-1,M-1},\ s_{MM}|\cdot|s_{jk},\ s_{M-2,M-2},\ s_{M-1,M-1},\ s_{MM}|. \qquad (A.8)$$

これら式（A.3），（A.4），（A.7），（A.8）は，分解のケースLDU, UDLに独立な表示を与える。尚，ここでは随伴行列Sについては省略する。

付録B．4×4散乱行列（M＝4）

ここでは$M=4$の散乱行列を扱う。$\det S=1$，$\tilde{S}^{T}S=E$の条件も課される。まず,

$$\tilde{S} = [S^{T}]^{-1} \equiv \begin{bmatrix} |s_{22}, s_{33}, s_{44}|, & -|s_{21}, s_{33}, s_{44}|, & |s_{21}, s_{32}, s_{44}|, & -|s_{21}, s_{32}, s_{43}| \\ -|s_{12}, s_{33}, s_{44}|, & |s_{11}, s_{33}, s_{44}|, & -|s_{11}, s_{32}, s_{44}|, & |s_{11}, s_{32}, s_{43}| \\ |s_{12}, s_{23}, s_{44}|, & -|s_{11}, s_{23}, s_{44}|, & |s_{11}, s_{22}, s_{44}|, & -|s_{11}, s_{22}, s_{43}| \\ -|s_{12}, s_{23}, s_{34}|, & |s_{11}, s_{23}, s_{34}|, & -|s_{11}, s_{22}, s_{34}|, & |s_{11}, s_{22}, s_{33}| \end{bmatrix}. \qquad (B.1)$$

式（A.2）－（A.4）を使えば，SのLDU分解を，その表示法に独立な形で与えることができる。今，式(3.1)の$S=S_L^N S_D^N S_U^N$ に従うとする。而るに$\det S=1$より，対角部S_D^Nは

$$\mathrm{d}_1 = s_{11},\quad \mathrm{d}_2 = \frac{|s_{11},\, s_{22}|}{s_{11}},\quad \mathrm{d}_3 = \frac{\tilde{s}_{44}}{|s_{11},\, s_{22}|},\quad \mathrm{d}_4 = \frac{1}{s_{44}}.$$

すなわち,

$$S^{\mathrm{N}}_{\mathrm{D}} = \mathrm{diag.}\left[\, s_{11},\ \frac{|s_{11},\, s_{22}|}{s_{11}},\ \frac{\tilde{s}_{44}}{|s_{11},\, s_{22}|},\ \frac{1}{\tilde{s}_{44}} \right]. \tag{B 2 a}$$

三角行列の方は，次の通りである。

$$S^{\mathrm{N}}_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 1, & & & \\ \dfrac{s_{21}}{s_{11}}, & 1, & & \\ \dfrac{s_{31}}{s_{11}}, & \dfrac{|s_{11},\, s_{32}|}{|s_{11},\, s_{22}|}, & 1, & \\ \dfrac{s_{41}}{s_{11}}, & \dfrac{|s_{11},\, s_{42}|}{|s_{11},\, s_{22}|}, & -\dfrac{\tilde{s}_{34}}{\tilde{s}_{44}}, & 1 \end{bmatrix},\quad S^{\mathrm{N}}_{\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} 1, & \dfrac{s_{12}}{s_{11}} & \dfrac{s_{13}}{s_{11}}, & \dfrac{s_{14}}{s_{11}} \\ & 1 & \dfrac{|s_{11},\, s_{23}|}{|s_{11},\, s_{22}|}, & \dfrac{|s_{11},\, s_{24}|}{|s_{11},\, s_{22}|} \\ & & 1, & -\dfrac{\tilde{s}_{43}}{\tilde{s}_{44}} \\ & & , & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.2b}$$

UDL分解$S=S^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U}}S^{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}}S^{\mathrm{P}}_{\mathrm{L}}$の方も同様に求まる。対角部は,

$$S^{\mathrm{P}}_{\mathrm{D}} = \mathrm{diag.}\left[\, \frac{1}{\tilde{s}_{11}},\ \frac{\tilde{s}_{11}}{|s_{33},\, s_{44}|},\ \frac{|s_{33},\, s_{44}|}{s_{44}},\ s_{44} \right], \tag{B.3a}$$

となる。一方，三角部は，次の通りである。

$$S^{\mathrm{P}}_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 1 & , & & \\ -\dfrac{\tilde{s}_{12}}{s_{11}} & ,\ 1 & , & \\ \dfrac{|s_{31},\, s_{44}|}{|s_{33},\, s_{44}|}, & \dfrac{|s_{32},\, s_{44}|}{|s_{33},\, s_{44}|}, & 1, & \\ \dfrac{s_{41}}{s_{44}}, & \dfrac{s_{42}}{s_{44}}, & \dfrac{s_{43}}{s_{44}}, & 1 \end{bmatrix},\quad S^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} 1, & -\dfrac{\tilde{s}_{21}}{s_{11}}, & \dfrac{|s_{13},\, s_{44}|}{|s_{33},\, s_{44}|}, & \dfrac{s_{14}}{s_{44}} \\ & 1, & \dfrac{|s_{23},\, s_{44}|}{|s_{33},\, s_{44}|}, & \dfrac{s_{24}}{s_{44}} \\ & & 1, & \dfrac{s_{34}}{s_{44}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{B.3b}$$

(B.2)，(B.3)式において，チルドと$S_{\mathrm{L,U}}$の肩字"P, N" の反転をすれば，式(3.1)の随伴行列$\tilde{S}$の三角分解が求まる。その際，式(3.2)が依然として課される。その内式(3.2a)によれば,

$$\mu^{\mathrm{P}} = |\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{22}| = |s_{33},\, s_{44}|,\quad \mu^{\mathrm{N}} = |s_{11},\, s_{22}| = |\tilde{s}_{33}, \tilde{s}_{44}| \tag{B.4}$$

が定義できる。式 (3.13) にすでに示したが,

$$\begin{cases} D^{\mathrm{N}}_{\mathrm{L}} = \mathrm{diag.}[\, s_{11},\ \mu^{\mathrm{N}},\ \tilde{s}_{44},\ 1\,],\quad D^{\mathrm{N}}_{\mathrm{U}} = \mathrm{diag.}[\, 1,\ s_{11},\ \mu^{\mathrm{N}},\ \tilde{s}_{44}\,]. \\ D^{\mathrm{P}}_{\mathrm{L}} = \mathrm{diag.}[\, \tilde{s}_{11},\ \mu^{\mathrm{P}},\ s_{44},\ 1\,],\quad D^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U}} = \mathrm{diag.}[\, 1,\ \tilde{s}_{11},\ \mu^{\mathrm{P}},\ s_{44}\,]. \end{cases} \tag{B.5}$$

直交関係 (3.2b) 式より，次式が得らろる。

$$\tilde{s}_{11}|s_{31}, s_{44}| + \tilde{s}_{12}|s_{32}, s_{44}| + \tilde{s}_{13}|s_{33}, s_{44}| = s_{42}|\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{22}| + s_{43}|\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{23}| + s_{44}|\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{24}| = 0,$$

$$|\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{23}| + |s_{32}, s_{44}| = 0. \tag{B.6}$$

これは，チルド及び添字の位置の反転に対しても依然として成立つ。

Triangular Factorizations and Matrix Riemann-Hilbert Problems

Tsutomu KAWATA

An important type of M×M-th spectral problems are studied for developing its inverse scattering theory. Under the assumption of the potential on a compact support, we show that the spectral solution can be continued analytically into the upper or lower spectral plane and result in triangular states at $x=\pm\infty$. The trianqular factorization of the scattering matrix is studied generally and the inverse problems reduced to a "principal" type of Riemann–Hilbert problems. The scattering data is given by the "strongly" triangular matrices for the scattering matrix. For $M\leqq 3$ the Gel'fand–Levitan integral eguation which solves the inverse problems systematically derived, while this falls difficult for $4\leqq M$.

〔英文和訳〕

三角行列分解と行列リーマン・ヒルベルト問題

川　田　　勉

M×M次オーダーの重要なスペクトラル方程式の逆散乱法が研究される。有限台上でのみ値を持つポテンシャルを仮定して，解のスペクトラル平面の上下半面への解析接続可能性と $x\to\pm\infty$ で三角行列状態を取る事が示される。一般的に散乱行列の三角行列分解が行われ，これにより逆問題は〝主行列リーマン・ヒルベルト問題〟に帰着される。又，散乱データは，散乱行列を分解して得られる三角行列部に相当する事が判る。$M\leqq 3$ では，逆問題を解く所のGel'fand–Levitan積分方程式が体系的に求まるが，$4\leqq M$ では大きな困難におちいる。

（1984年10月31日受理）