

ある非線形微分方程式の図式解法とその考察

明石 一*・中川 孝之・大住 剛

The graphical method and the consideration for the solution of a certain nonlinear differential equation

Hajime AKASHI・Takayuki NAKAGAWA・Tsuyoshi OSUMI

The equations describing the movement of the hydraulic driving mechanism are got in the form of the simultaneous first-order differential equations.

This paper shows the method how the solutions of these equations are graphically obtained in the phase plane applying Liénard's method and the considerations of these results obtained.

1. はしがき

ある油圧駆動系に生ずる振動現象をあらわす基礎方程式は、二つの連立一階非線形微分方程式であらわされる。この解析の方法を位相面上において取扱うとき、現象に関係する変数相互の関係と、これらの変数の時間的変化の有様が一見してわかり、現象を考察するのに便利である。

この位相面上における解を近似的にもとめる作図法に、 δ 法や Liénard 法などがある。これらの方法は限られた形の微分方程式に適用できるが、一般的な場合には作図を行なうためにある工夫をしなければならない。

筆者らの油圧駆動系のピストンの運動を取扱った例では、動作方程式はあとでのべるように、より一般的な形をしている。それで、良く知られた Liénard 法をただちに利用できない。そこで、このような例に Liénard 法を拡張した方法を用いると、ある非線形微分方程式の位相面上の解が図式的にもとまり、また変数の時間的変化も簡単な計算から求められ、

さらに系の動作の安定性を図式的に示されることを報告する。

2. 微分方程式とその作図解を求める方法

さきにもべたある油圧系のピストンの振動を明らかにするための運動方程式は、つぎの一般的な微分方程式であらわされる。

$$a_0 \frac{dx}{dt} = a_1 y - Q(x) \quad (1)$$

$$b_0 \frac{dy}{dt} = -b_1 x + R(y) \quad (2)$$

ここで、 $Q(x) = a_2 F_0(x)$ 、 $R(y) = b_2 - b_3 y$ 、 $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ は定数で、 $F_0(x)$ は x の多項式である。(1)、(2)より t を消去して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_0 b_1}{b_0 a_1} \frac{\{ \frac{b_2 - x - \frac{b_3}{b_1} y \}}{\{ y - \frac{a_2}{a_1} F_0(x) \}} \}} \quad (3)$$

となり、ただちに式(3)を満足する解曲線を位相平面

* 京大工

上に求めることはできない。

いま、 $a_0 b_1 / b_0 a_1 = m^2$ とおき、 $X \equiv mx, Y \equiv y, b_2 / b_1 = \ell_1, b_3 / b_1 = \ell_2, a_2 / a_1 = \ell_3$ として xy 平面の代りに XY 平面を考え、この面上で式(3)は

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-X - (m\ell_2)Y + (m\ell_1)}{Y - \ell_3 F_0(\frac{X}{m})} = \frac{-X - m\ell_2 Y + m\ell_1}{Y - \ell_3 F_0(\frac{X}{m})} \quad (4)$$

となる。このとき、 XY 面上の状況点変化の有様はつぎの方法によってもとめられる。

xy 平面上の特性を XY 面上に写しかえると、図1のように画かれ特異点 S が定まる。

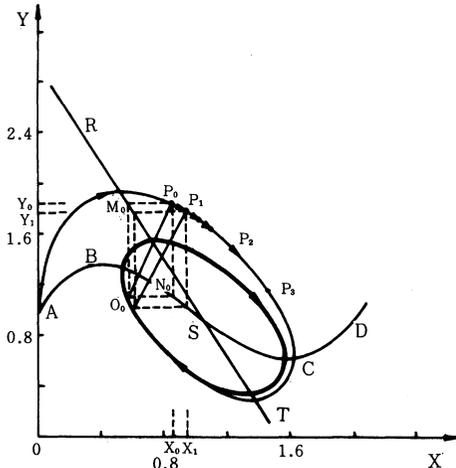


図-1 作図法

また、この特異点の性質は、この点の $\ell_3 F_0'(\frac{X_0}{m})$ と $(\frac{1}{m\ell_2})$ との値によって、あとで考察するように、特異点が安定点か不安定点、そして近傍での状況点の特徴(渦状点か結節点か)が理論的に定まる。本節で作図方法のみをしめす。

すなわち、図上 $P_0(X_0, Y_0)$ より X, Y 軸に垂線を下し、これと曲線 $ABCD$ の交点を N_0 、線分 RST の交点を M_0 とし、三点 $P_0 N_0 M_0$ を頂点とした矩形の対角線 $\overline{P_0 O_0}$ は解曲線の接線に垂直である⁽¹⁾。したがって、 $P_1(X_1, Y_1)$ は $\overline{P_0 O_0}$ に直角な解曲線上の微小線分上に定められる。つぎに P_1 点において P_0 点において行なった手続きを繰返し行い、 P_2, P_3, \dots 点を求めると $P_0 P_1 P_2 P_3$ は近似解曲線となる。そして、この図をもとの xy 面上に写しかえ、もとめる解曲線が作図される。

一方、 XY 面上の解曲線が定まると、この曲線上を状況点が微小変化するに要する時間が、つぎの関係から求められる。

$$\Delta t = b_0 \frac{\Delta y}{-b_1 x + R(y)} = b_0 \frac{\Delta Y}{-\frac{b_1}{m} X + R(Y)} \quad (5)$$

(5)式において、右辺の $\frac{\Delta Y}{-b_1 X + mR(Y)}$ は、 XY 面上の解曲線上の微小変位をするに要する時間 Δt_0 に等しいから、式(5)は

$$\Delta t = b_0 m \Delta t_0 \quad (6)$$

となる。したがって、解曲線上の各点を状況点が移動する時刻が計算され、方程式の変数と時間との関係もまた図示することができる。つぎに例をあげてこのことを示す。

3. 作図例

例1：式(3)において $a_0 b_1 / b_0 a_1 = m^2 = 1, y - \frac{a_2}{a_1} F_0(x) = y - 1 + (x-1) - (x-1)^3, \frac{b_2}{b_1} x - \frac{b_3}{b_1} y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y$ とした作図例は図-2の点線で示される解曲線とな

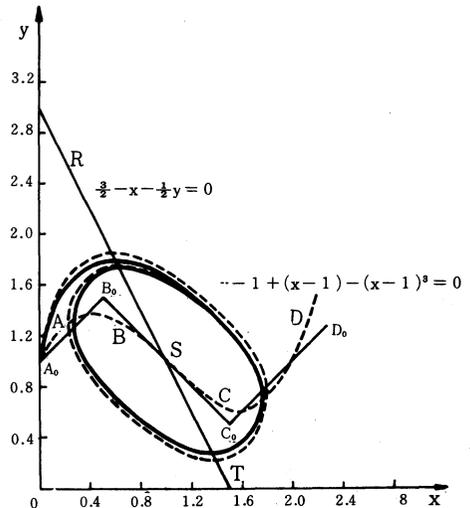


図-2 作図例

り、また \overline{ABCD} 曲線近傍の折線 $A_0 B_0 C_0 D_0$ と直線 RST とで定められる解曲線は実線で表される。図において、 \overline{ABCD} と $A_0 B_0 C_0 D_0$ とは曲線の形が異なるが、図式的に求めたりミットサイクルおよび解曲線は、両者がごく接近して求められることがわかる。

例2：例1において、 m が $0.6, 1.0, 1.25$ 、および 1.5

のとき、 $mx=X, y=Y$ とし、横軸を拡大縮小した場合の作図解を xy 平面に写し換えると図-3がえられる。

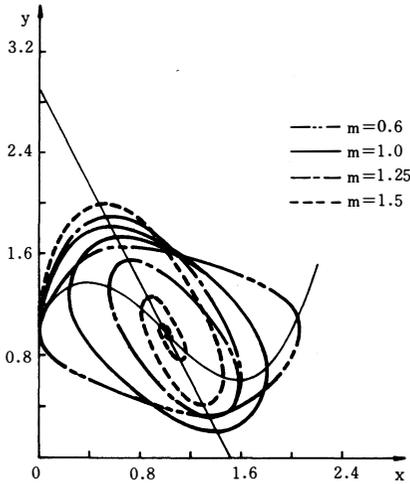


図-3 mをパラメータとしたリミットサイクル

図から m の値はリミットサイクルの形を変化させ、ある値以上において特異点が不安定渦状が安定渦状の特徴をもつようになる。このことは、リミットサイクルが m の値の増加にともなって消滅することを示している。また、 x 軸の拡大、縮小の代わりに y 軸の縮小または拡大から、この作図を行なった場合も図-3と同一の曲線がえられる。すなわち、軸の拡大縮小は、作図解に影響をほとんどあたえないことがわかった。

例3：以上の作図解の x, y の時間的変化が求める振動解で、これを $x-t, y-t$ の関係として図示すると、方程式の変数の時間的変化がえられる。図-4は $m=$

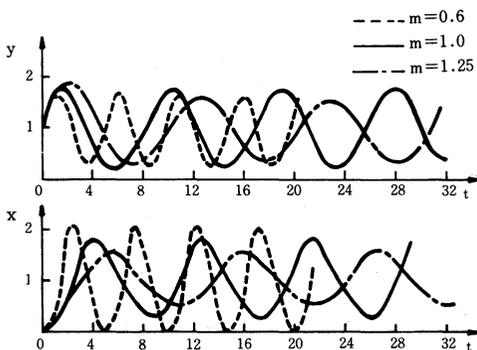


図-4 解の時間的変化

1.25, $m=1.0$ および $m=0.6$ の場合に関する図-3の解曲線に対して、式(6)の関係から数値計算を行なって求めたものである。

以上しめした解は、式(1), (2)であたえられた微分方程式において軸の拡大率 m と図式解との関係を示したものである。

例4：つぎに式(3)において分子=0とした(b_2/b_1)
 $-x-(b_3/b_1)y=0$ なる関係は、 xy 面上の直線RSTをあらわす。この直線の y 軸切片は b_2 に比例し、 b_3 に反比例した値であり、さらにこの直線の勾配は b_1 に比例し、 b_3 に反比例して定まる。これらの変数の変化を考慮した解曲線の作図例を図-5, 図-6に示す。

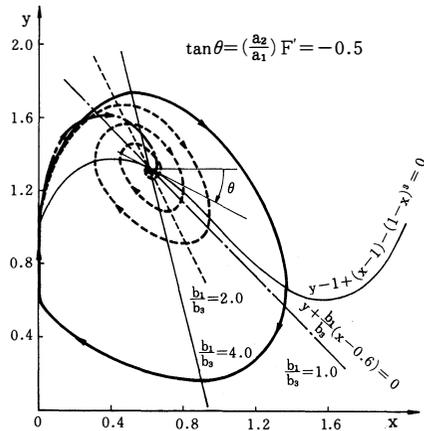


図-5 $(a_2/a_1)F'$ を一定とし b_1/b_3 を変化した時の作図例

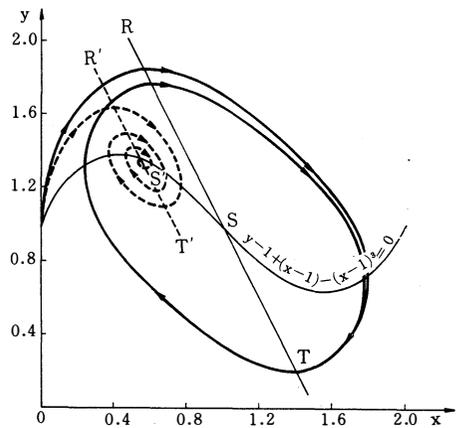


図-6 b_1/b_3 を一定とし b_2/b_1 を変化した時の作図例

例5：次式を用いた例において、Runge-Kutta Gill法による電子計算機演算結果と作図法による結果を、

mをパラメーターとして比較した。

$$\begin{cases} \frac{b_2}{b_1}x - x - \left(\frac{b_3}{b_1}\right)y = 2.07 - x - 0.57y \\ y - \frac{a_2}{a_1}F_0(x) = y - 2x^3 + 5.4x^2 - 4.04x - 1.35 \end{cases}$$

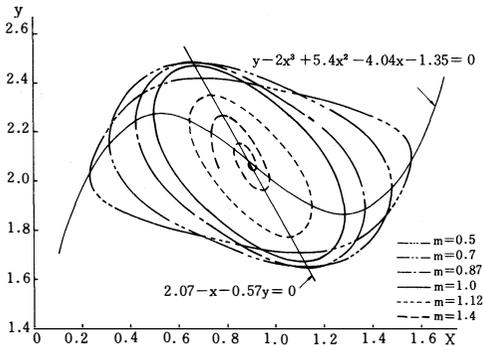


図-7(a) 図式解法例

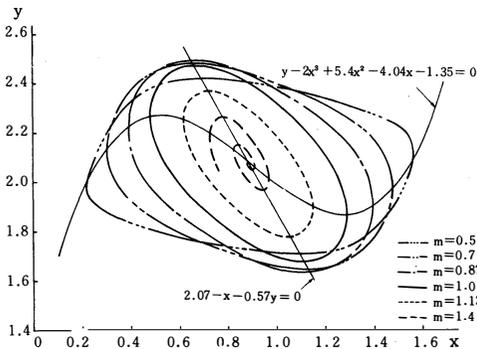


図-7(b) 電子計算機による演算例

図-7(a)は図式解法による結果、図-7(b)は計算機による結果である。各mの対応図形はその特徴がよく一致しており、mの増加につれて、xy平面解曲線図形が弛緩的から正弦波的となり、減衰振動的となることがよくわかる。図-8(a)(b)にm=0.5, 1.12に対応するx~t, y~tの作図による結果(図-8(a))と計算機による結果(図-8(b))を示す。

4. 考察

これらの例に示した解曲線は、何れも特異点まわりの状況点の運動に着目している。その運動の特徴は、さきにも述べたように特異点安定(渦状点, 結節点)か、不安定(渦状点, 結節点)かによる特徴から状況点の動作が推測される。つぎにこのことを

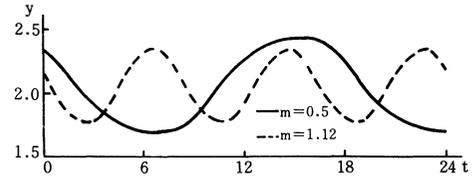
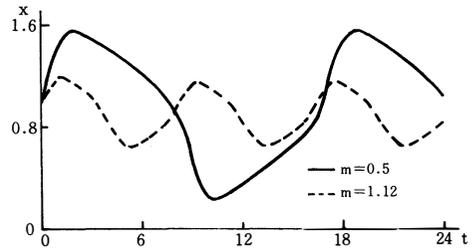


図-8(a) 図式解法によるx~t, y~tの関係

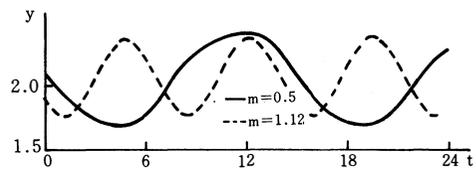
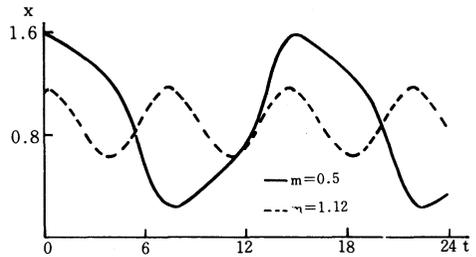


図-8(b) 電子計算機によるx~t, y~tの関係

検討する。

式(3)および式(4)の何れに対してもこの特徴は変わらないから、ここでは式(4)について取扱う。式(4)の線形化方程式を考える。変数 $Y = Y_0 + \Delta Y$, および $X = X_0 + \Delta X$ とする。そして、 X_0, Y_0 は特異点の値である。式(4)の線形化方程式は

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\alpha \Delta X + \beta \Delta Y}{\gamma \Delta X + \delta \Delta Y} \quad (7)$$

となる。ここで $\alpha = -1, \beta = -m\ell_2, \gamma = -\ell_3 F'_0\left(\frac{X_0}{m}\right)$, および $\delta = 1$, また $F'_0\left(\frac{X_0}{m}\right)$ は特異点 X_0 における $F\left(\frac{X}{m}\right)$ の微係数である。

特異点近傍の状況点の動作は、特性方程式 $\lambda^2 - \lambda(\beta + \gamma) - (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$ の根によって考察される。すなわち、これら α, β, γ , および δ は、mおよ

び $F'_0(\frac{X_0}{m})$ が定まると決められ、これらの値が定まると特異点近傍の状況点動作の特徴が表の区分にしたがって定められる。

I	$(\beta-\gamma)^2 + 4\alpha\delta > 0$ (A) $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ のとき $\begin{cases} \beta+\gamma < 0 \text{ のとき安定} \\ \beta+\gamma > 0 \text{ のとき不安定} \end{cases}$ 結節点 (B) $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ のとき 鞍形点
II	$(\beta-\gamma)^2 + 4\alpha\delta < 0$ (A) $\beta+\gamma = 0$ のとき 渦心点 (B) $\beta+\gamma \neq 0$ のとき $\begin{cases} \beta+\gamma < 0 \text{ のとき安定} \\ \beta+\gamma > 0 \text{ のとき不安定} \end{cases}$ 渦状点
III	$(\beta-\gamma)^2 + 4\alpha\delta = 0$ 結節点 $\begin{cases} \beta+\gamma < 0 \text{ のとき安定} \\ \beta+\gamma > 0 \text{ のとき不安定} \end{cases}$

表 状況点動作の特徴

つぎに、これらの関係を例に示したりリミットサイクルにより、図-9を用いてその動作の特徴と状況点の運動について検討する。(表参照)

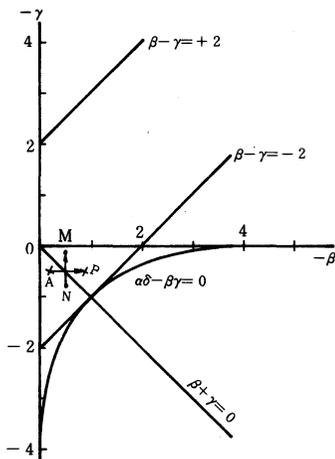


図-9 状況点の動作と $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の関係

まず特異点 (X_0, Y_0) における $\gamma_A(F'_0一定のとき \gamma = -l_0 F'_0(\frac{X_0}{m}))$ 一定のもとで式(7)の $\beta(= -\frac{mb_0}{b_1})$ が変るとする。このことは図-9において不安定渦状点領域上の点Aから安定渦状点領域上の点Bまで変化

することに相当する。このような β の変化は図-5においてリミットサイクルが β の絶対値の増大とともに発散渦状点動作から収斂渦状点動作に変化し、ついに系の動作は特異点に収斂し、安定することを意味する。また β [式(4)の分子=0とした式をあらわす曲線勾配の逆数]が一定(-0.5)で、 $-\gamma$ [式(4)の分母=0とした式に対し特異点における勾配]が $-\gamma_N$ から $-\gamma_M$ まで変化する。これは図において前と同様、線分NM上を変化することに相当する。何れも発散渦状点から収斂渦状点に変化することになる。これらの動作の特徴(不安定から安定)に変わる限界は、図-9の $\beta+\gamma=0$ の線分で区別される。なお、他の曲線はそれぞれ状況点動作の特徴が β, γ, α ,および δ によって区別される境界をあらわしている。さらに、これらのXY面上においてのべた諸関係は、xy面上においても成りたつものである。

5. むすび

良く知られている δ 法, Liénard法で取扱うことができないような、ある非線形微分方程式について、その図式解法を示し、そしてこの方法によって方程式に含まれる諸係数の解に及ぼす影響を考察した。その結果、解のもつ安定性は、特異点近傍の線形化方程式のもつ係数相互間の問題として図式的な考察を加えることがわかった。

参考文献

(1)明石, 中川, 大住: 日本機械学会講演論文集(富山)

No. 767-1 P.70.

(昭和51年10月5日, 機械学会北陸信越支部北陸地方講演会(富山)発表)

(1976. 10. 19. 受付)