

アナログコンピューターを用いた van der Pol の式の解について

Qが時間の周期関数である場合

明石 一・中川 孝之・高瀬 博文

On the Solutions of van der Pol Equation with Analog Computer, on condition that Q is Periodic Function in Time.

Hajime AKASHI・Takayuki NAKAGAWA・Hirofumi TAKASE

Considering the nonlinear characteristics of elements in hydraulics system, we have shown the following nonlinear differential equation, which explains the mechanism of stick slip motion.

$$\ddot{x} - (\alpha_0 \dot{x} - \frac{\gamma}{3} \dot{x}^3) + Q(\tau)x = F(\tau)$$

Then, for the purpose of understanding this, we have solved the experimental solution with analog computer.

In this paper, we have described the experimental results, and the meaning of the solutions.

1. は し が き

機械振動としてのスティックスリップは、油圧系の操作シリンダによく生ずる現象で、これは機械の位置決めに支障をあたえる。我々はこのスティックスリップの動作機構を明らかにし、この防止法を工夫する目的でこの動作の解析を試みた。

油圧系のこの動作方程式を非線形振動論的に解析すると、次の微分方程式の解の特徴をしらべる事になる。

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} - (\alpha_0 \dot{x} - \frac{\gamma}{3} \dot{x}^3) + (Q_1 + Q_2 \cos 2\tau)x \right] = F$$

それで我々はアナコンを用い、種々の条件のもとにこの式の演算解のもつ特徴を明らかにし、次に実際

の油圧系における実験結果と比較して、機械系の動作機構をしらべようと考えた。

この報告はアナコンを用いた観測結果と、その解のもつ意義について述べたものである。

2. 動 作 方 程 式

油圧系の動作方程式は、装置の負荷質量に関する運動方程式と、操作シリンダに流れ込む流量と圧力の関係をあらわすつぎの連立微分方程式であらわされる。

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + f \left(\frac{dx}{dt} \right) = SP(t) \quad (1)$$

$$-k_{iop} + k_{pi} = S \frac{dx}{dt} + \beta_0 V_0 \frac{dp}{dt} \quad (2)$$

* 京都大・工学部

ここで

M	慣性質量
γ	油の粘性係数
$f\left(\frac{dx}{dt}\right)$	摺動面の摩擦力
S	シリンダ有効面積
p	シリンダ内部圧力差
i	サーボ弁電流
V_0	シリンダ容積
β_0	油の圧縮率
k_{io}, k_p	サーボ弁の流量特性から定まる定数
x	ピストン変位

いま、式(1)、(2)から圧力 p を消去し $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ として次の式が導かれる。

$$\ddot{x} + \left(\frac{\gamma + f'(\dot{x})}{M} + \frac{k_{io}}{\beta_0 V_0} \right) \dot{x} + \frac{S^2 + k_{io} \gamma}{M \beta_0 V_0} x + \frac{k_{io}}{M \beta_0 V_0} f(\dot{x}) = \frac{S k_{pi}}{M \beta_0 V_0} i \quad (3)$$

この式の $f(\dot{x})$ は摩擦力で、 $f(\dot{x})$ をテラー展開した式を用い、次の式を得た。⁽¹⁾

$$\ddot{x} - (\alpha_0 - \beta \dot{x} - \gamma \dot{x}^2) \dot{x} + \left\{ \omega_n^2 + \Delta \omega_n^2 (1 + a_1 \dot{x} + a_2 \dot{x}^2) \right\} \dot{x} = F(i) \quad (4)$$

ここで $\alpha_0, \beta, \gamma, \omega_n^2, \Delta \omega_n^2, a_1, a_2$ そして $F(i)$ は、次の関係から摩擦特性より求める事ができるはずのものである。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{1}{M} \left\{ \gamma + f'(\dot{x}_0) + \frac{M k_{io}}{\beta_0 V_0} \right\} & \omega_n^2 &= \frac{S^2}{M \beta_0 V_0} \\ \beta &= \frac{1}{M} f''(\dot{x}_0) & a_1 &= \frac{f'''(\dot{x}_0)}{2 \{ \gamma + f'(\dot{x}_0) \}} \\ \gamma &= \frac{1}{2M} f'''(\dot{x}_0) & a_2 &= \frac{f^{(4)}(\dot{x}_0)}{\gamma + f'(\dot{x}_0)} \\ \Delta \omega_n^2 &= \frac{k_{io}}{M \beta_0 V_0} \left\{ \gamma + f'(\dot{x}_0) \right\} & \dot{x}_0 &= \left[\frac{dx}{dt} \right]_{x=x_0} \\ F(i) &= \frac{1}{M \beta_0 V_0} \left\{ S k_{pi} + k_{io} f(\dot{x}_0) \right\} \end{aligned}$$

さらにサーボ弁電流 i を調節すると $f''(\dot{x}_0) = 0$ なる \dot{x}_0 で動作せしめる事ができ、このとき $\beta = 0, a_1 = 0$ 式(4)は次のようになる。

$$\ddot{x} - (\alpha_0 - \gamma \dot{x}^2) \dot{x} + \left\{ \omega_n^2 + \Delta \omega_n^2 (1 + a_2 \dot{x}^2) \right\} \dot{x} = F(i) \quad (5)$$

式(5)において $\omega_n^2 \gg \Delta \omega_n^2, a_2 \ll 1$ であれば近似的につぎのように書きかえられる。

$$\ddot{x} - (\alpha_0 - \gamma \dot{x}^2) \dot{x} + \omega_n^2 \dot{x} = F(i)$$

これは強制力 $F(i)$ の作用する van der pol の式であり

$$\frac{d}{dt} \left[\ddot{x} - (\alpha_0 x - \frac{\gamma}{3} \dot{x}^3) + \omega_n^2 x \right] = F(i) \quad (6)$$

となる。

また $\alpha_0 - \gamma \dot{x}^2 = 0$ で $\Delta \omega_n^2 (1 + a_2 \dot{x}^2) \neq 0$ なる場合、式(5)は次のようにならわされる。

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \left\{ \omega_n^2 + \Delta \omega_n^2 (1 + a_2 \dot{x}^2) \right\} \dot{x} \right] = F(i)$$

いま、[] 内の方程式を満足する周期解があると考えれば、 $\omega_n^2 + \Delta \omega_n^2 (1 + a_2 \dot{x}^2)$ が周期的に変化すると考えられる。その解が $x = A \sin \tau$ ($\omega_n t = \tau$) とすれば、 $\frac{A^2}{2} (1 + \cos 2\tau)$ であるから

$$\dot{x}^2 = \frac{d}{dt} \left[\dot{x} + x (Q_1 + Q_2 \cos 2\tau) \right] = F(i) \quad (7)$$

となる。これは ω_n^2 が周期的変化をする事を意味するしたがって、(5)式は強制力が作用する van der pol の式においてさらに ω_n^2 が周期的変化をする場合に相当すると考えられる。この問題を解析的に取扱うことは容易でないので、一般的に

$$\frac{d}{dt} \left[\ddot{x} - (\alpha_0 \dot{x} - \frac{\gamma}{3} \dot{x}^3) + (Q_1 + Q_2 \cos 2\tau) x \right] = F \quad (8)$$

となる微分方程式の解と考え、その特徴をアナコンで求めることにした。

3. 演算用プログラム

式(8)において [] 内の値が 0 である場合の解と、外力が時間的変化をする場合について考える。

まず $\ddot{x} - (\alpha_0 \dot{x} - \frac{\gamma}{3} \dot{x}^3) + (Q_1 + Q_2 \cos 2\tau) x = 0$ を考えるに、 $Q_1 = 1, 2\tau$ の代りに $n\tau$ とおき、 $n = 2$ なる値を中心に変える事ができるようなプログラムを作るため次のように上式を変形する。

$$\ddot{x} - (\alpha_0 \dot{x} - \frac{\gamma}{3} \dot{x}^3) - x - (Q_2 \cos n\tau) x \quad (9)$$

すなわち、演算用プログラムは次の三通りの演算信号の和として定まるように作った。

$$\begin{aligned} \text{[I]} & \quad \ddot{x}_1 = -x \\ \text{[II]} & \quad \ddot{x}_2 = -(Q_2 \cos n\tau) x \\ \text{[III]} & \quad \ddot{x}_3 = \alpha_0 \dot{x} - \frac{1}{3} \gamma \dot{x}^3 \end{aligned}$$

そして $\ddot{x} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3$ を満足するようなプログラムは図-1 のようになる。この内 [III] の演算は不感帯要素と加算器を用い近似的にその特徴をあらわすようにし、[II] の演算は超低周波発振器と [I] の演算出力とを掛算器入力として求め、そして [I] の演算は良く知られたプログラムによった。

図-1 に示すプログラムから [III] の回路の信号が

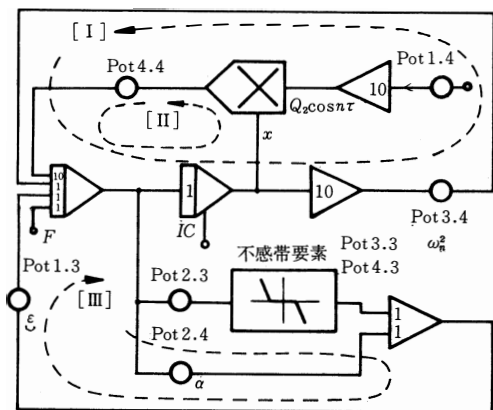


図-1 演算ブロック図 D7C

図-1

0 のとき、アナコンの解は van der pol の解となり [II] の回路の信号が 0 のとき Mathieu の式を求めることになる。そして [II][III] の回路の信号を 0 とすれば単振動の解となる事がわかる。従って、式 (9) の解はこれら三種類の解の組合ったものと考えられる。

4. 演算方法および演算解

記録装置の応答特性の関係から解が 1% 付近で演算するように回路定数を定め、超低周波発振器の周波数を 1% 付近で動作させた。なお振動系の固有周波数を 0.5% とし、次の演算の手順でそれぞれの解を求めた。

4-1 [III] の回路の演算

式 (9) からわかるように $(\alpha_0 - \frac{\gamma}{3}x^2) \frac{dx}{dt}$ の係数 $(\alpha_0 - \frac{\gamma}{3}x^2)$

は \dot{x} が大きい小さいかによって負か正かになる。このことは、演算解が減衰的か発散的になる事をあらわす。

いまこの項の特徴を知るため、 $\alpha_0 = 0.3$ (一定) とし不感帯幅を変えたとき ($\frac{\gamma}{3}$ を変化することに相当する) 入力 (横方向)、出力 (縦方向) の関係と、不感帯幅一定とし α_0 の値を変えた場合の入力-出力の関係を図-2 に示す。この図から α_0 と γ のもつ性質がわかる。

4-2 van der Pol の解

図-1 の [II] の回路を切り、この信号の代りに発振器出力を入力として加えると、強制力のともなう

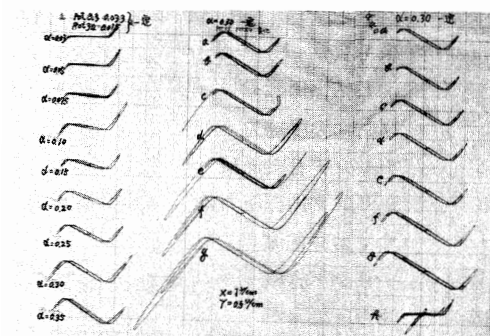
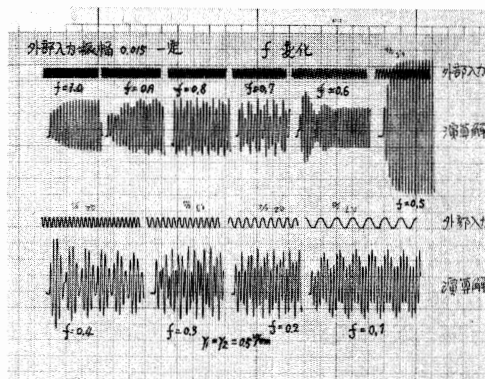
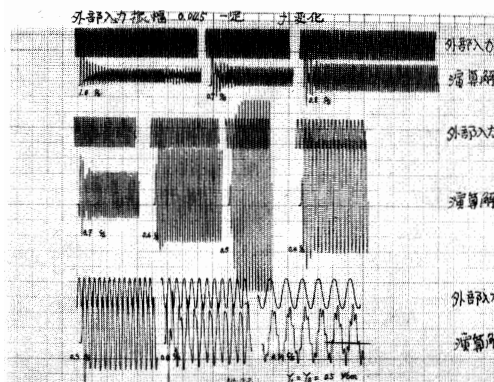


図-2



(a)



(b)

図-3

van der Pol の解が求まる。

いま強制力を一定とし、発振器周波数を $f = 1\%$ より次第に低くした場合の出力波形を図-3 (a) に示す。図において発振器周波数 f が系の固有周波数 f_0

$=0.5\%$ 附近では共振し、出力波形の振幅が最大となる。即ち $|\frac{f_0-f}{f_0}|=N$ とすれば $N=0$ のとき振幅が最大となり $N \neq 0$ となる場合、0ならざる N のそれぞれの値に応じた唸り波形が求まる。これは強制力のともなうvan der Polの式に対する良く知られた理論的關係をあらわしている。⁽³⁾⁽⁴⁾もし、この強制力が大となると図-3(b)のようになる。

次に発振器周波数を一定とし、その出力を小さな値から次第に大きくなるように変化させると演算出力は図-4のように求まる。この図から強制力の大きさがある値以下の場合、 x が小さな値なので解は発散し、ある振幅まで成長する。しかし、ある値以上の大きになると解の振幅がかえって減少し始める。なおこの強制力が大きくなるほど系の振動は、強制力の周波数に同調して動作する事がわかる。

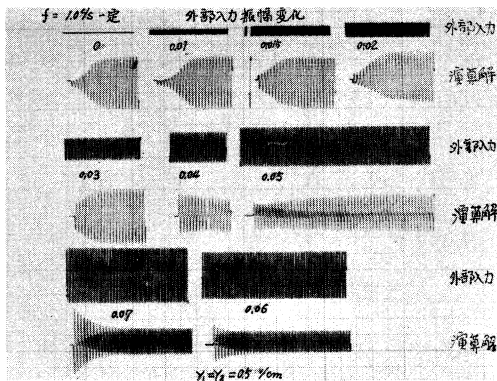


図-4

4-3 van der Polの式の ω_0 が周期的変化をする場合

いま発振器の周波数を1%より次第に高くし、その振幅を一定とした場合の解の記録波形を図-5に示す。この場合、発振器の周波数を変える事は式(9)の $n\tau$ を変え、振幅を一定にする事は Q_2 を一定に保つことである。さらに、発振器の周波数を1%より次第に低くした場合の解が図-6である。この図において、小振幅の波形は $Q_2 \cos n\tau \cdot x$ の値をあらわし、大振幅の波形は演算解の波形である。

この二つの図から、発振器の周波数が系の固有振動数とその2倍の振動数に等しいとき解は共振するが前者の振幅より後者の振幅が大きいことがわかる。これは我々が線形振動論的に見た結果や、すでに述べた強制力のともなうvan der Polの解のもつ性質

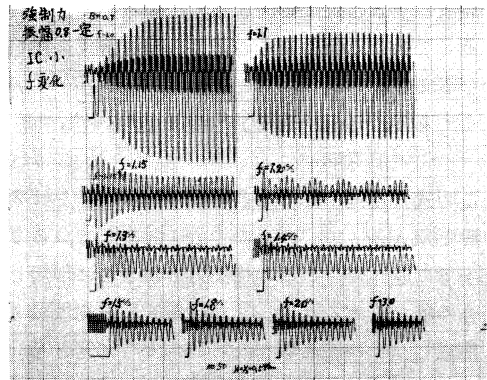


図-5

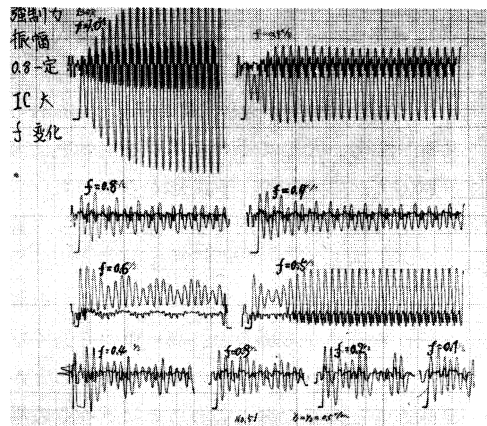


図-6

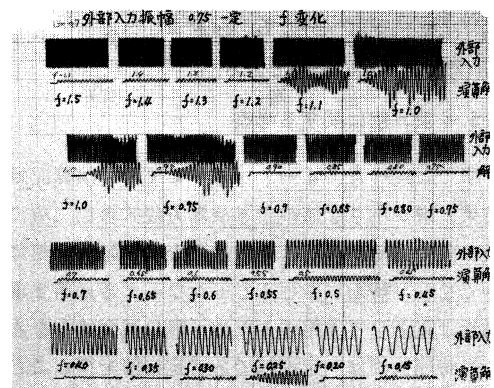


図-7

と著しく異なる点である。

つぎに、発振器出力振幅(Q_2 に相当)を一定とし、周波数を1.5%より次第に0.15%まで低くした場合の演算解を求めると図-7となる。この図から発振

器周波数 f と自励振動周波数 f_0 とにおいて、 $\frac{f_0}{f} \approx \frac{1}{2}$ 1 そして 2 なる条件をもつとき、演算解は振動性をおびることがわかる。

$$4-4 \quad \ddot{x} - (\alpha_0 x - \frac{\gamma}{3} x^3) + (Q_1 + Q_2 \cos n\tau)x = F \text{ の演算解}$$

この式の左辺=0 の場合の解は van der Pol の式の解と Mathieu の式の解の特徴を共有していることをすでに述べた。ここで強制力 F がさらに作用した場合の解を求めるため、さらに超低周波発振器を別に用意し、この周波数を 0.5% および 1.0% とし、強制力 F に比例する出力信号を図-1 に示す回路に加えた場合の演算解を求めた。

この場合上式の左辺の第 3 項の $\cos n\tau$ の n を演算時間と共に変化させ、系の演算解の振幅の最大のときの n に着目することにした。この様子を記録計に画くため、XY 記録計の横軸を演算時間に、 $\cos n\tau$ の波形を縦軸 Y_1 信号、そして系の演算解を縦軸 Y_2 信号として実験した。この結果、 Y_1 波形からだいたいの n が推測できるので、演算解の max 値をもつ n の値が定まることがわかる。

このような考え方で行う実験においても、周波数が低い値から高くなる場合と、高い値から低くなる場合とでは、解の max と n との関係が異なることが実験の結果わかった。なお、このことは $F=0$ の場合と $F \neq 0$ なる場合、演算振幅がいちじるしく異なる。

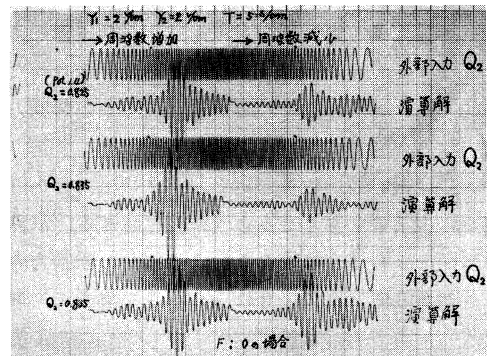
つぎに、この実験結果の二、三の例を図-8 (a) (b) (c) に示す。この内 (a) は $F=0$ の場合、(b) 図、(c) 図は $F \neq 0$ の場合である。

5. 演算解に関する考察

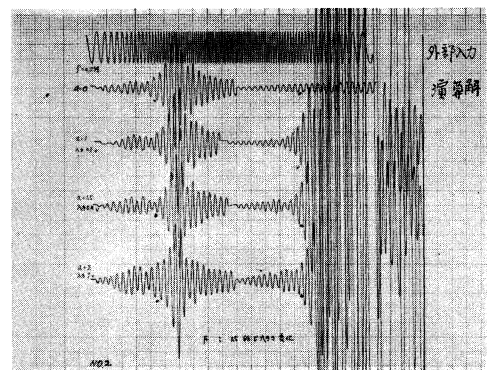
すでに述べた、4-1 ~ 4-4 までの演算記録の結果、解が小さな値のとき演算方程式の第二項の係数は負であるから解は発散的となり振幅は次第に大きくなり、解がいちじるしく大なるときは第 2 項の係数は正として作用するため、解は減衰的となるので長時間後には一定振幅である定常解を得ることがわかる。この解を記録するときは位相面上の状況点の動作はあるリミットサイクル上にあることを意味する。一般には状況点は複雑なトラジェクトリーを画くことがわかる。

つぎに ω_0 が周期的変動をするとすれば、固有振動数の 2 倍の振動数をもつ周期変動に対して系の動作

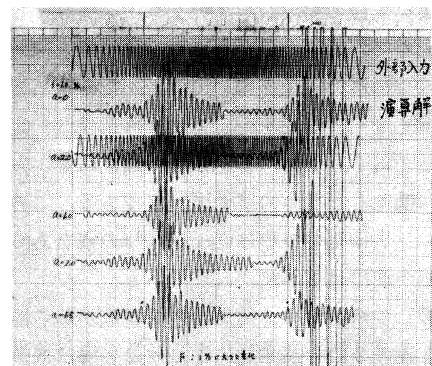
は不安定で振動的になりやすい。



(a) 強制力の無いとき



(b) 0.5c/sの強制力が働いたとき



(c) 1.0c/sの強制力が働いたとき

図-8

また、固有振動数に等しい ω_0^2 の周期変動に対して不安定ではあるが前者ほど不安定ではない事がわかる。

さらに、演算解の波形からこの動作は、van der PolとMathieuの式の組合ったような特色を見出すことができる。

なお、図-8(a)、の振動波形の包絡線について n の小さい値から大きい値に増加した場合と、大きな値から小さくした場合とでは図-9に示すように異なる。この図中、曲線の矢印は、その方向に振動数を増加、または減少させたことを意味し、演算解に履歴性があることをしめすものである。

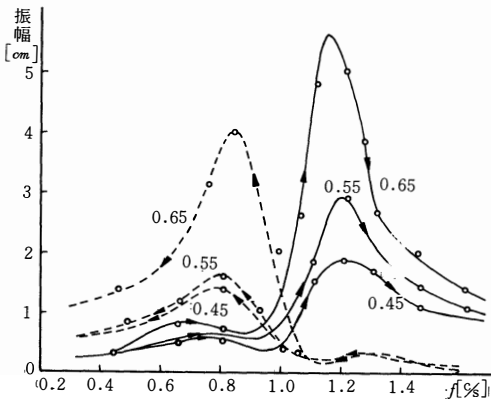


図-9 外部入力のパラメーターとした周波数と振幅の関係

6. む す び

油圧系に生ずるスティックスリップの動作方程式を van der PolとMathieuの式の組合わせた非線形微分方程式に近似してあらわし、この方程式をアナコンで演算解を求め、解の特徴を明らかにできた。

我々はこの結果を基礎に、実際の油圧系の動作における実験結果と比較して、両者に相似性があるかどうか確かめるつもりである。

昭和47年10月 電気四学会北陸支部連合大会講演

参 考 文 献

- 1 明石、中川、大住：機械学会論文投稿中
- 2 J.J.Stoker：Nonlinear Vibrations
Interscience Publishers, inc., NEW .
YORK 1950, PP 202
- 3 J.J.Stoker：Nonlinear Vibrations
Interscience Publishers, inc., NEW .
YORK 1950, PP 153
- 4 榎木義一：非線形振動論