富山大学工学部紀要第24巻 1，2 号 1973

バックラッシュ防止歯車を用いたサーボ機構の平衡点附近の動作について

留岡 正・中川 孝之

On the Movements in Stability of Servomechanisms with Antibacklash Gears

Tadashi TOMEOKA・Takayuki NAKAGAWA

The movements of equilibrium points and their environs of the servomechanism are very complicated for the influence of the spring of the split antibacklash gear.

The nonlinear differential equation of the motion was obtained from the analysis of the influence of the backlash and the spring on their movements. Then this solution could be obtained with the analog computer.

In this paper, we considered the analysis of this movements on the operating solution of the analog computer.

1. は し が き

さきに、機械系と電気的増幅器とから成る、簡単なサーボ機構を作り作動させたところ、このサーボ系の平衡点附近の動作は実際に複雑である。この原因は電気系はかなり線形動作をしても、機械系を構成する要素の非線形性、たとえば歯車のバックラッシュや摩擦など、によると思われる。なお、この非線形性をのぞくため、バックラッシュ防止歯車などが工夫されているが、サーボ系の動作において歯車に用いられている、ばねの強さの影響などがこの系の動作を複雑ならしめている。

前報[1]で、これらの作用を考慮して定性的に、系の速度--変位の関係をしめす位相平面上で取扱った。

その後、この動作機構を、バックラッシュ防止歯車のスプリングの作用について研究を進めたところこの動作方程式は非線形ばねをもち、また、スプリングと負荷荷重のため、系のばね係数が周期的変化をすると見なすことが出来ることがわかった。

そこで、我々は実際のサーボ系についての動作を観測することは容易ではないので、この系の動作の大要を知るためアナログコンピューターによって模擬実験を行い、その結果から実際の実験傾向を知ろうと考えた。

この報告はアナログコンピューターによる実験結果と、その解に対する物理的意味に関するものである。

2. 運 動 方 程 式

軸まわりの慣性能率I、軸受部の摩擦はきわめて小さく無視するが、軸の回転速度に比例する大きさの減衰抵抗r、軸の回転角θ、歯車のかみ合いのがたから生じるbacklash性を考慮し、そしてbacklashどめのSpring係数をkとする。

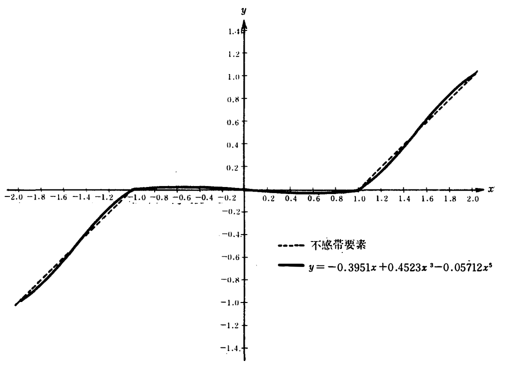
我々は制御系を取扱っているため、回転トルクが

正、負の値に応じた系の回転を考えるときは、平衡点附近の動作がきわめて重要である。それで、歯車のbacklashおよびSpring係数の特徴が平衡点附近の動作の性質を定めると考えねばならない。

いま、歯車のトルク伝達を考えるときbacklashを普通、折線近似を用い、さらに我々は問題解析の都合上、この特性を入力回転角θ_0と出力回転角θの間につぎの奇関数で示されるものとした。

$$\theta=a_0\theta_0+a_3\theta_0^3+a_5\theta_0^5+\cdots \qquad (1)$$

そこで図－1に示す折線を式(1)で近似した場合、a_0、a_3そしてa_5の値を求めることができる。これらの値に対して式(1)を図上にプロットして見ることによって、折線と式(1)の近似度が推定出来る。たとえば式(1)に相当する次の式に対して、数値計算をした(1)式の関係を参考までに図－1に実線で示す。



図－1　折線近似

$$y=-0.3951x+0.4523x^3-0.05712x^5 \qquad (1)'$$

この(1)'式の係数を持つ場合、折線にきわめてよい近似をする。特にa_5はa_0 a_3に比べて小さい事が分かる。

また、ばねは伸びに比例して、かたいばねの特性を有するのが普通であるから、ばね係数は一般に回転角θの関数である。そしてまた、ばね係数は回転角と時間の関数でもある。

これを$K(\theta,t)$とする。 (2)

つぎに、系がbacklashを有しない場合で軸のねじり定数をKと表わせば、運動方程式は次のようになる。

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+r\frac{d\theta}{dt}+K\theta=0 \qquad (3)$$

いま、(1)式において、θ_0^5以上の頃はθ_0があまり大きくない限り無視し、(2)式のばね係数は、$K(t)=k_0+k_1\cos\omega_0 t$なる周期関数として、これらの(1)、(2)を(3)に代入して

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+r\frac{d\theta}{dt}+(k_0+k_1\cos\omega_0 t)(a_0\theta_0+a_3\theta_0^3+a_5\theta_0^5)=0 \qquad (4)$$

となる。

一般にk_1はk_0に比して小さく、a_0に比べてa_3, a_5の値は小さいから、式(4)はさらに近似的に次のようになる。

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+r\frac{d\theta}{dt}+(k_0+k_1\cos\omega_0 t)a_0\theta_0+k_0a_3\theta_0^3+k_0a_5\theta_0^5\fallingdotseq 0 \qquad (4)'$$

Iで両辺を割算し、$\frac{r}{I}=R$ とおけば(1)式から、a_3, a_5は小さいことから、

$\frac{d\theta}{dt}\fallingdotseq a_0\frac{d\theta_0}{dt}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}\fallingdotseq a_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2}$ が得られるので、

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+R\frac{d\theta_0}{dt}+(K_0+K_1\cos\omega_0 t)\theta_0+K_3\theta_0^3+K_5\theta_0^5=0 \qquad (5)$$

となる。

いま、仮りにばね係数は時間tの周期関数でなく一定であるとすれば、$K_1=0$と見なすことが出来るから、式(5)は

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2}+R\frac{d\theta_0}{dt}+K_0\theta_0+K_3\theta_0^3+K_5\theta_0^5=0 \qquad (6)$$

となる。

ここで、$K_0=\frac{k_0}{I}$, $K_3=\frac{k_0a_3}{Ia_0}$そして$K_5=\frac{k_0a_5}{Ia_0}$とする。

なお、この動作を位相平面上で考えるため$\frac{d\theta_0}{dt}=y$, $\theta_0=x$とすれば

$$y\frac{dy}{dx}+Ry+K_0x+K_3x^3+K_5x^5=0 \qquad (6)'$$

となり、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-Ry-(K_0x+K_3x^3+K_5x^5)}{y} \qquad (7)$$

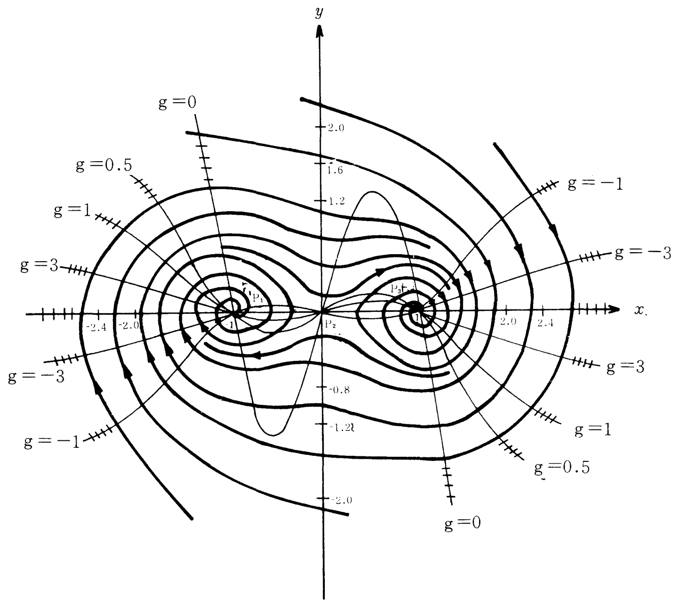
さて、$\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=\pm\infty$, $\frac{dy}{dx}=\pm 1$、$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$, および$\frac{dy}{dx}=\pm 3$, となる等傾曲線をあたえられた$R_1$, K_0, K_3そしてK_5に対して簡単な計算から求めて、位相平面上に描き、運動方程式を満足するトラジェクトリーをもとめると、図－2のようになる。

この場合のR＝0.1, $K_0=-0.4$, $K_3=0.45$, そして$K_5=-0.06$として求めたものである。

この図から3つの特異点(P_1, P_2, P_3)があって、その中P_1, P_3が安定点でP_2が不安定点である事がわか

る。

しかるに、(5)式に示すように、ばね係数が時間の周期函数である場合は、今述べたような方法で解析的に求める事は困難である。すなわち$k_1 \neq 0$なる場合の解を求めるために、アナログコンピューターによることにした。



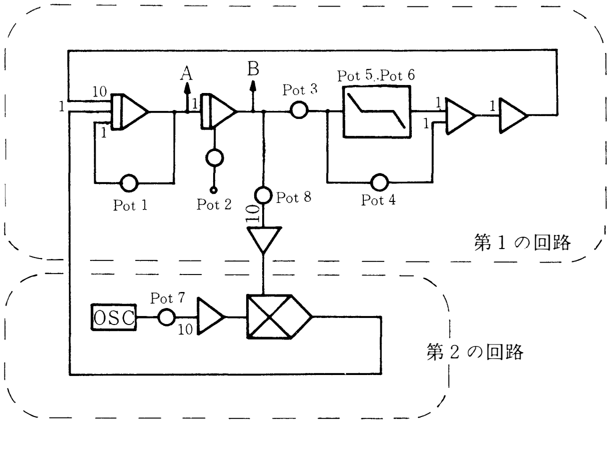
$$g=\frac{dy}{dx}=\frac{-Ry-(K_0x+K_3x^3+K_5x^5)}{y}$$

$R=0.1$, $K_0=-0.4$, $K_3=0.45$, $K_5=-0.06$

図－2　計算による等傾曲線とトラジェクトリーの例

3. アナログコンピューターのプログラム

2.に述べた事から、一般的に取扱うために、式(5)の解をアナログコンピューターよって求めることにした。そこで、式(5)の第1、第2、第3項を積分器と符号変換器により、第4、第5項をアナコンの非線形要素を用い、そして$K_1\cos\omega_0t\cdot\theta_0$の項を超低周波発振器と掛算器を用いて、図－3に示すプログラムを作った。



図－3　アナログコンピュータのプログラム

この図は２つの閉回路からできている。第１の回路は式(6)の関係を満足するものであり、第２の回路は$K_1 \cos \omega_0 t \cdot \theta_0$の演算出力を求める回路である。

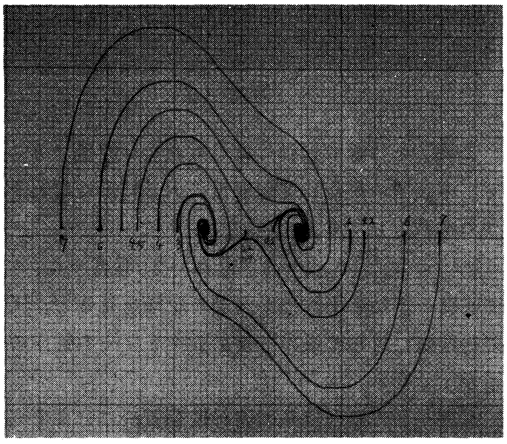
さて、我々は演算記録計の周波数応答特性の帯域が２Hz以下であるため、プログラムした系の振動周期を0.2Hz附近に選ぶように、回路の各部要素を調節した。

4. アナログコンピューターの解

表－１　演　算　条　件

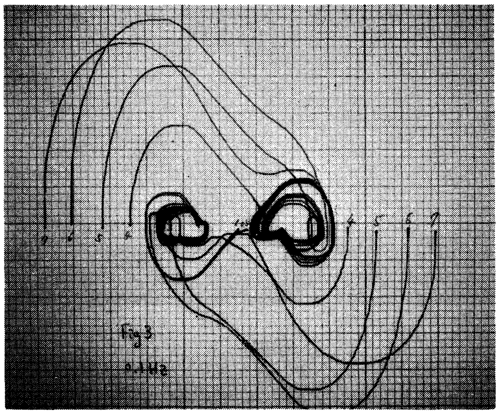
写真番号	減衰項 Pot 1	初期値 Pot 2	Pot 3	直線の勾配 Pot 4	不感帯幅 Pot5,6	振　幅 Pot 7	Pot 8	OSCの周波数
1	10.0	任　意	3.0	2.5	0.5	9.0	3.0	0Hz
2	10.0	任　意	3.0	2.5	0.5	9.0	3.0	0.1
3	10.0	任　意	3.0	2.5	0.5	9.0	3.0	0.8
4	0.5	4.0	3.0	3.0	0.5	9.0	3.0	0.04～0.6
5	0.5	4.0	3.0	3.0	0.5	9.0	3.0	0.7 ～10
6	10.0	任　意	3.0	2.5	0.5	9.0	3.0	0.2
7	10.0	任　意	3.0	2.5	0.5	9.0	3.0	0.4

まず、式(6)の解を求めるため、第２の回路を開くか、発振器信号を０にした。いま、種々の初期条件のもとで、$x-y$平面上のトラジェクトリーをもとめるため、図－３のA, Bで示す引出点からの信号を$x-y$記録計に接続して、解を求めた。その代表的な解を示すと、写真－１のようである。

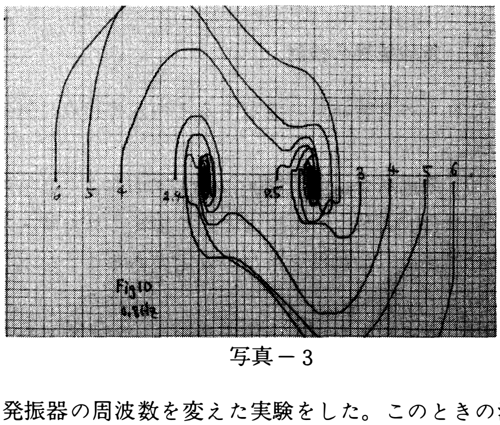


写真－１

つぎに、式(5)の解を求めるため、第２の回路を閉じ発振器出力をあたえて、前と同様にトラジェクトリーを$x-y$記録計上に求めた。その代表的な解を示すと、写真－２、写真－３のようである。

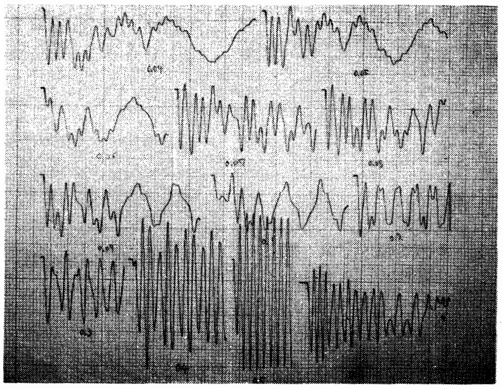


写真－２

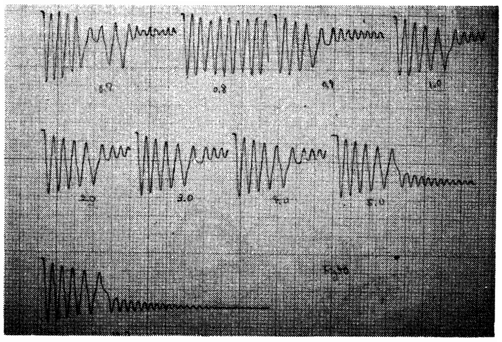


写真－３

つぎに、(6)式の減衰係数を０とした場合の、この振動系の固有振動数はおよそ0.25Hz附近の値なのでこの振動数とばねのもつ固有振動数の相互関係を知るため、ばねのもつ固有振動数に対応する超低周波発振器の周波数を変えた実験をした。このときの演算解を時間の関数として求めたものが、写真－４、写真－5であり、その中で著しく振動性を帯びている特徴ある場合のトラジェクトリーを位相平面上で求めたものが、写真－６、写真－７である。



写真－4



写真－5

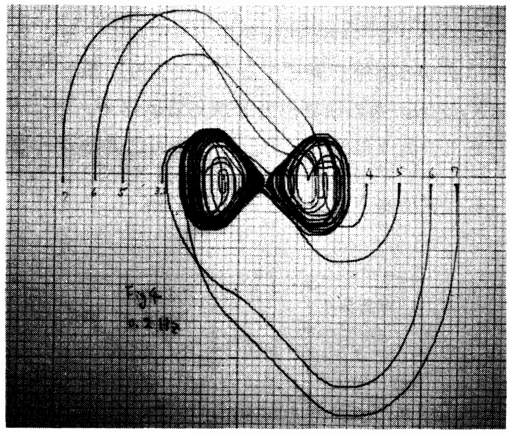
以上の写真－1から写真－7までの各演算条件を表－1に示す。

5. 実験結果の検討

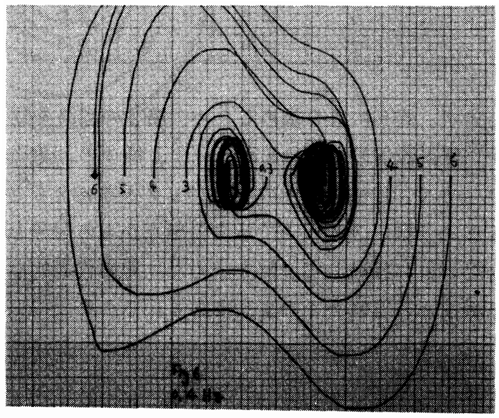
これらの実験結果に注意するとつぎの諸点に気がつく。

(1) 系固有の振動数(約0.25Hz)のおおよそ2倍の振動数(約0.5Hz)が強制力として加えられた時、系の動作が最も振動性を帯び不安定であることを示している。

(2) 超低周波発振器の周波数が系固有の振動数のおおよそ2倍の振動数(0.5Hz附近)を基準にして、周波数がそれよりも高くなっても、低くなっても、左右どちらかの平衡点に跳躍的に振動しながら収束するように思われる。なお、これらの系の動作は一種のうなり波形となり、不規則な運動をするから、見かけ上不安定となる。



写真－6



写真－7

このことは線形振動には見られない特徴であるから、本装置の動作に非線形性のある特別なばねを持つ力学系として考えたい。

(3) つぎに、写真－2、写真－3、写真－6、そして写真－7に示す位相平面上の記録を見ると、任意の初期値に対して系のトラジェクトリーの動作の様子がよく分る。

写真－2の場合は系の固有振動数のこおよそ½の強制周波数のものであるために、平衡点附近でやや不安定である。

また、写真－3は平衡点附近で減衰をともなう動作をして平衡点に達し、安定な特徴を示している。

しかし、写真－6、写真－7は平衡点附近で著しく振動性を帯びている特徴を示している。

これらの位相平面上のトラジェクトリーの記録は前報[(2)]に示した、複雑な平衡点附近の実験記録の結果をよく説明していると思われる。

6. む　す　び

以上の実験結果より、超低周波発振器よりあたえられる周波数の系におよぼす影響がおおよそ分った。すなわち(5)式の数学的な意義を考えると、第２項は減衰低抗を示し、第４項、第５項は、ばねの非線形性に対応させて考える事が出来る。もし、これらの係数が微小で、これらの項を無視すれば、(5)式はMathieuの式[3]になる。したがって、(5)式で示される系の運動はMathieuの式で示される運動に減衰力と非線形ばね性の極端な特徴をもつような力学系と考えられる。

これらの実験結果から、出力軸歯車として用いられたバックラッシュ防止歯車のスプリングのもつ性質が、系固有の振動数と微妙に関連し合うので、サーボ機構の調整等に当っては以上の実験上もとまった諸点を考慮する必要がある。

実際の装置において、平衡点附近のサーボ系の振動等の問題を解明する場合には、本実験でもとめた定性的な特徴を見のがしてはならないと考える。

それで、今後我々は実際の装置に対して、以上述べた特徴が実験的にも起るかどうか確かめたい。

※電気４学会北陸支部連合大会（昭和47年10月12日）に発表

参　考　文　献

(1)　留岡、中川：富山大学工学部紀要第22巻（昭46－３）
(2)　留岡、中川：電気４学会北陸支部連合大会講演論文集（昭45－10）
(3)　J.J.Stoker：Nonlinear Vibrations Interscience Publishers, Inc., New York 1950　PP 202