回転軸の危険速度の問題についての 考察

長　元　亀久男

One Consideration on a Critical Speed of Rotating Shaft.

kikuo MAGAMOTO

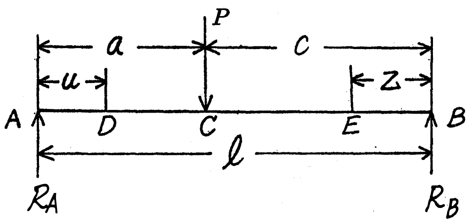
One calculating method for a critical speed of rotating shaft is described here.

いま P_1P_2…… (kg) を軸各部に作用する荷重として，この荷重による軸のたわみを y_1y_2 …… (cm) とする。g を重力の加速度 (cm/sec^2) とし，N_c を軸の毎分の危険回転数とすれば，N_c はつぎのように求められている。(1)

$$N_c = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g\sum_{i=1}^{n}P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}P_i y_i^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで，たわみyを求めるには拙著理論を応用すればつぎのように計算することができる.(2)

図—1



水平におかれた，はりABがA点，B点にて支えられ，任意の点Cにて荷重Pをもつ場合，任意の点Dのたわみ y_u，任意の点Eのたわみ y_z とすれば図—1を照参してつぎのように求め得られる。

$$EI\ y_u = \frac{Pc}{6l}\left\{a(l+c)u - u^3\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$EI\ y_z = \frac{Pa}{6l}\left\{c(l+a) - z^3\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但し，Eはヤング係数，Iは断面の2次モーメントとする。R_A，R_B を支点A，B，における反力とすれば

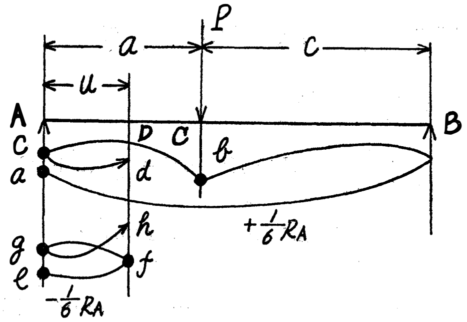
$$\frac{Pc}{l} = R_A \qquad \frac{Pa}{l} = R_B \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

しからば，(2)(3)はつぎのように書くことができる。

$$EI\ y_u = \frac{R_A}{6}(l+c)au - \frac{R_A}{6}u^3 \cdots\cdots\cdots(5)$$

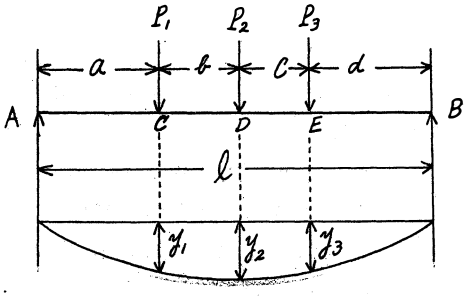
$$EI\ y_z = \frac{R_B}{6}(l+a)cz - \frac{R_B}{6}z^3 \cdots\cdots\cdots(6)$$

図—2



(5)式の構成について考えてみるに，図—2において $+\frac{1}{6}\cdot R_A$ にaから出発して，abの長さに，bcの長さ，それに，cd の長さを，かけたものから$-\frac{1}{6}, R_A$ に，e から出発して，ef，fg，gb，の長さを，かけたものを加えたものである。(6)式はこたを裏返したものである。任意点のたわみは，このような構成特性

図—3



をもっているのである。

荷重がどのようにかかっていても，たわみを求める場合には，この構成特性を利用すれば便利である。以下このことについて述べることにする。

いま図―3のように，はりＡＢがＣ，Ｄ，Ｅ，点にそれぞれ P_1，P_2，P_3，の荷重をもつとき，これらの荷重によるＣ，Ｄ，Ｅ 点のたわみを y_1，y_2，y_3 とすれば，いま述べた，たわみ構成特性を利用すれば，つぎのように記述することができる。

荷重 P_1，P_2，P_3 によるＡ点における反力を R_{A1}，R_{A2}，R_{A3}，Ｂ における反力を R_{B1}，R_{B2}，R_{B3} とする。

$$
\begin{aligned}
EIy_1 =& \frac{R_{A1}}{6}(l+d+c+b)a^2 - \frac{R_{A1}}{6}a^3 \\
&+ \frac{R_{A2}}{6}(l+d+c)(b+a)a - \frac{R_{A2}}{6}a^3 \\
&+ \frac{R_{A3}}{6}(l+d)(c+b+a)a - \frac{R_{A3}}{6}a^3 \qquad \cdots\cdots(7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EIy_2 =& \frac{R_{B1}}{6}(l+a)(b+c+d)(d+c) \\
&- \frac{R_{B1}}{6}(d+c)^3 \\
&+ \frac{R_{A2}}{6}(l+d+c)(b+a)^2 - \frac{R_{B2}}{6}(d+c)^3 \\
&+ \frac{R_{A3}}{6}(l+d)(c+b+a)(a+b) \\
&- \frac{R_{A3}}{6}(a+b)^3 \qquad \cdots\cdots(8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EIy_3 =& \frac{R_{B1}}{6}(l+a)(b+c+d)d - \frac{R_{B1}}{6}d^3 \\
&+ \frac{R_{B2}}{6}(l+a+b)(c+d)d - \frac{R_{B2}}{6}d^3 \\
&+ \frac{R_{A3}}{6}(l+d)(c+b+a)^2 - \frac{R_{A3}}{6}(a+b+c)^3 \qquad \cdots\cdots(9)
\end{aligned}
$$

(7)(8)(9)式から y_1，y_2，y_3 が求め得られる。

いま，はりＡＢを回転軸ＡＢに置き換えれば，(7)(8)(9)の結果を用いて，(1)により回転軸ＡＢの危険速度を求めることができる。

$$\sum P_i y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$
$$\sum P_i y_i^2 = P_1 y_1^2 + P_2 y_2^2 + P_3 y_3^2$$

計算機の発達した今日，このようにすれば図式によらなくとも容易に回転軸の危険速度を求めることができる。

参　照　文　献

(1) 谷口修，機械力学Ⅱ P155（昭37）

(2) 長元亀久男，はりにおけるたわみ，傾斜の数学的構造論 機械学会論文集　5―22―1（昭15―2）