順序回路の幾何学的状態割り当て法に関する研究

四　谷　平　治
八　木　　　寛
酒　井　　　俊

This paper states on a method for state assignment of sequential machines design. This is very excellent means for its design from the viewpoint of the easiness. This is constructed of the combination between the hamming distance on cube and the state of sequential circuit. This is understood directly by us, because the design depends upon the aid of visition.

1. まえがき

順序回路は，その内部状態と入力とによって，そのときの出力およびつぎの状態を決めることができるような回路である。この順序回路を簡単に実現するためには，状態遷移表あるいは状態図を簡単化する状態数最小化という問題がある。これはHuffman-Mealyの方法，Paull-Ungerの方法等と，すでに確立されている。この状態数の最小化によって，状態数を減じてから実際の回路の構成に移るのである。だが，この状態数最小化されたはずの論理関数に状態割り当てをする。その際の状態割り当て方法によって，論理回路が簡単になったりしなかったりする。したがって，与えられた論理関数にいかに状態割り当てをするのが最良かという問題が提起される。ところで，いま順序回路の状態数がn個あるとして，組合わせ法により状態割り当てを行えば，$n!$回になる。$n!$回すべての割り当てを行えば，たしかに一番簡単な順序回路を得ることができる。しかし，これが不可能であることはnに実数値を入れてみれば明らかである。万が一このnの小さい場合があったにしても，その割り当てに必要な労働力，時間の浪費は避けなければならない。本報告は,このようなすべての割り当てを行なうことなしに，筆者らの考案した，n次元立方体と状態図とを結合した状態遷移立方体というものを用い，このn次元立方体の各頂点に状態を割当てることにより，かなり簡単な順序回路が得られるということに関するものである。

なお，本論で扱う状態遷移表はすでに最小化された状態であるとし，これ以上状態数を減ずることはできないものとする。また，本論では同期順序回路についての状態割当て法であって，非同期順序回路が有する特異性である自己振動や race condition 等は考察しない。さらに，高信頼度の順序回路を設計するに際しても，状態割り当てをするさいに考慮することがあるが本論では，それも考察の対象にしない。

2. 状態割当て問題の意義

定義1

q_1，q_2,……,q_pを論理式の組とし，それぞれに含まれる項数をa_1，a_2，……，a_pとする。文字数が1である項数をbとする。異なる項をc_1，c_2,……,c_rとし，djをcjに含まれる文字数としたとき，q_1，q_2，……q_pの論理式を実現するに必要な論理素子（ダイオード等）の総数Sは

$$S=\sum_{i=1}^{P} ai+\sum_{j=1}^{r} dj-b$$

であらわされる。但し，q_iの項数が1の場合，$a_i=0$とする。

〔例〕

$q_1=y_1y_2y_3+y_4y_5y_6$

$q_2=y_1y_2+y_3+y_4$

を実現するに要する論理素子の数を求める。

$a_1=2$，$a_2=3$，$b=2$，$d_1=3$，$d_2=3$，$d_3=2$，$d_4=d_5=1$であるから,

$S=a_1+a_2+d_1+d_2+d_3+d_4+d_5-b=13$

となり，論理素子は13個必要となる。

順序回路の構成には，状態を表現するのに必要な遅延素子もあるが，本論では，このような遅延素子や否定回路を構成するトランジスタの数は数えないものとする。

図2.1の状態遷移表によって与えられる順序回路を構成するに必要な論理素子の数を求めてみよう。図2.1は状態1の場合，入力として，$x=0$が入ったと

状態	入力		出力
	$x=0$	$x=1$	
1	4	7	0
2	3	8	0
3	5	6	1
4	6	6	0
5	8	3	0
6	7	4	0
7	1	2	0
8	2	2	0

図　2・1

変数 / 状態	y_1	y_2	y_3
1	0	0	1
2	1	1	0
3	1	0	1
4	1	0	0
5	0	1	1
6	0	1	0
7	1	1	1
8	0	0	0

図　2・2(a)

	y_1	y_2	y_3
1	0	0	1
2	0	0	0
3	1	0	1
4	1	1	1
5	0	1	1
6	0	1	0
7	1	0	0
8	1	1	0

図　2・2(b)

き状態4に，$x=1$のとき状態7に遷移し，いずれも出力0をしめす。いま，図2.2の2種類の状態割当てを行なった場合の論理素子の数Sを比較しよう。割当てαの場合，図2.1と図2.2(a)とを合成して，図2.3を作成する。図2.3の真理値表より

$$y_1=\bar{y}_1\bar{y}_2y_3\bar{x}+y_1y_2\bar{y}_3\bar{x}+\bar{y}_1y_2\bar{y}_3\bar{x}+\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3\bar{x}$$
$$+\bar{y}_1\bar{y}_2y_3x+\bar{y}_1y_2y_3x+\bar{y}_1y_2\bar{y}_3x+y_1y_2y_3x$$
$$+\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3x$$

$$y_2=y_1\bar{y}_2y_3\bar{x}+y_1\bar{y}_2\bar{y}_3\bar{x}+\bar{y}_1y_2\bar{y}_3\bar{x}+\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3\bar{x}$$

				$x=0$			$x=1$			Z
	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
3	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
4	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
5	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
8	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0

図2・3　割り当てαに対する真理値表

$$+\bar{y}_1\bar{y}_2y_3x+y_1\bar{y}_2y_3x+y_1\bar{y}_2\bar{y}_3x+y_1y_2y_3x$$
$$+\bar{y}_1\bar{y}_2\bar{y}_3x$$

$$y^3=y_1y_2\bar{y}_3\bar{x}+y_1\bar{y}_2y_3\bar{x}+\bar{y}_1y_2\bar{y}_3\bar{x}+y_1y_2y_3\bar{x}$$
$$+\bar{y}_1\bar{y}_2y_3x+\bar{y}_1y_2y_3x$$

となる。さらに，ブール代数，**karnangh** 図表，**Veitch** 図表，立方体を用いる方法で論理式を簡単にすると

$$y_1=\bar{y}_1\bar{y}_2+y_2\bar{y}_3\bar{x}+y_2y_3x+\bar{y}_1x$$
$$y_2=\bar{y}_1\bar{y}_3\bar{x}+y_1\bar{y}_2+\bar{y}_2y_3x+y_1y_3x+\bar{y}_1y_2\bar{y}_3$$
$$y_3=y_2\bar{y}_3\bar{x}+y_1y_3\bar{x}+\bar{y}_1y_3x$$

また

$$Z=y_1\bar{y}_2y_3$$

となるから，論理素子の数はS＝48となる。

同様にして，割当てβの場合

$$y_1=\bar{y}_1$$
$$y_2=y_3\bar{x}+y_1y_3+\bar{y}_1\bar{y}_3x$$
$$y_3=\bar{y}_2\bar{x}+\bar{y}_1y_2x$$
$$Z=y_1y_2y_3$$

となる。これよりS＝20となり，割当てαの場合の論理素子の半分以下となる。それ故に，この順序回路の状態割当て問題は重要になることがわかる。

3．状態遷移立方体の定義

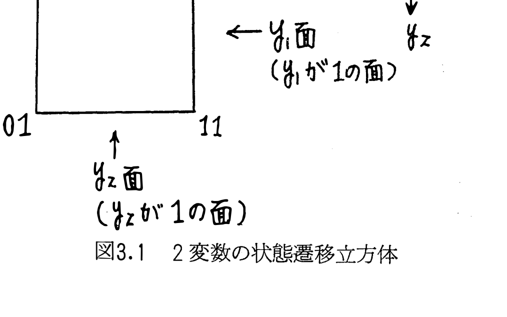


図3.1　2変数の状態遷移立方体

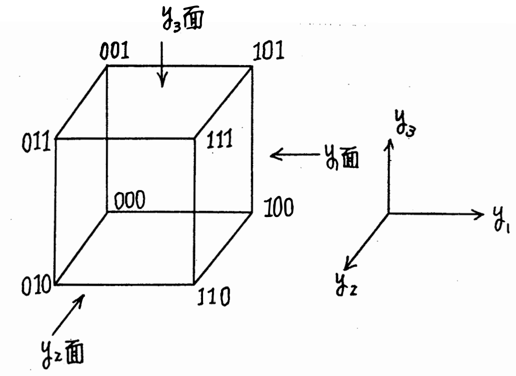


図3.2　3変数の状態遷移立方体

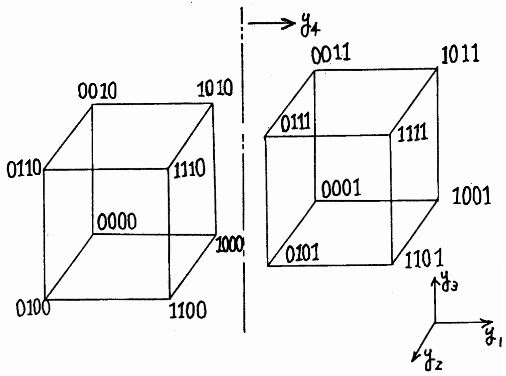


図3.3　4変数の状態遷移立方体

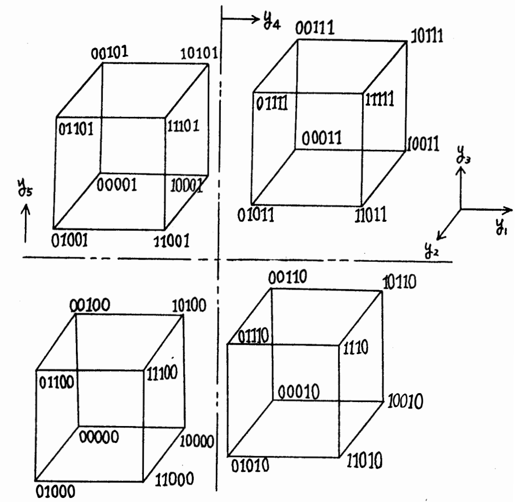


図3.4　5変数の状態、移立方体

図3・1，図3・2，図3・3，図3・4と変数が増すにつれて,立方体を並べて，右側,上側……の変数を1にすればよいこれらのすべての稜は，Hamming距離1となっている。一般に,n次元立方体の頂点の位置（y_1, y_2……，y_n）を，その状態の変数割当てとすればよ

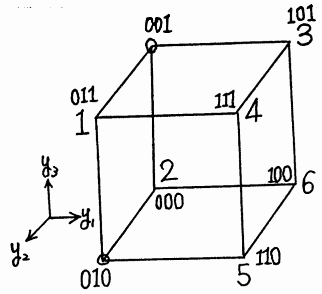


図3.5　状態割り当て

	y_1	y_2	y_3
1	0	1	1
2	0	0	0
3	1	0	1
4	1	1	1
5	1	1	0
6	1	0	0
don't	0	0	1
care	0	1	0

図　3•6図3・5との対応

い。例として,図3・5,図3・6にその対応をしめした。この例では，状態5の頂点の位置が（110）であるから，状態の変数割当てでは，図3・6のように $y_1=1$，$y_2=1$，$y_3=0$ とすればよい。図3・5の立方体に状態が割当っていない頂点（010），（001）はdon'tcareのある場合で，後ほど論理式の簡単化の際利用できる。図3・7に，ある入力が入った場合，Q_i から Q_j に遷移した際のあらわしかたをしめした。

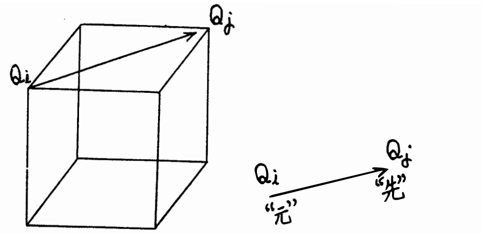


図3.7　状　態　遷　移

図3・8に，状態遷移立方体から論理式を求める方法をしめした。y_1 がすべて1の面であるから，状態遷移の矢印の先が y_1 面の頂点にあるならば，その矢印の元の頂点を，図3・8(b)のように印を付け，その位置（y_1，y_2，y_3）を論理関数$f(y_1, y_2, y_3)$とすれば，y_1 の主加法標準形式の論理式を得ることができる。また，この立方体は，Hamming 距離1の稜を有

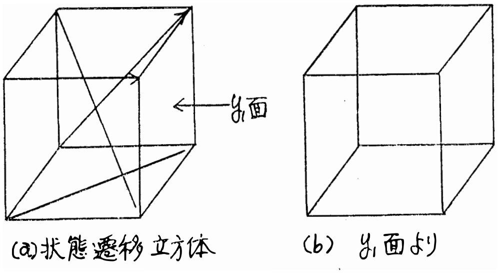


図3.8　状態立方体から
論理式を求める方法

する性質であるから，ただちに簡単化できる。図3・8の例では，

$$y = y_1$$

となる。

4. 状態遷移立方体を用いた状態割り当て

状態割当て(1)

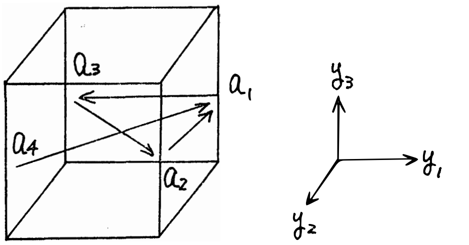


図4.1　遷移a_jの状態遷移（$x=0$の場合）

図4•1のように，2状態を1つのグループとして，そのグループa_1，a_2，a_3，a_4が1つの状態のように状態遷移すると考えると，1次元立方体を1つの状態と考えられる。図4•1において，a_2，$a_4 \longrightarrow a_1$，$a_3 \longrightarrow a_2$と遷移しているから，y_1面，y_2面より，y_1，y_2の論理式を求めると

$$y_1 = y_2\bar{x} + \bar{y}_1\bar{x}$$

$$y_2 = \bar{y}_1\bar{y}_2\bar{x}$$

となる。y_3の論理式は，これだけでは決定できない。(4•1)(4•2)の論理式には y_3 の変数はない。これはa_i（$i=1$，2，……4，）が1次元立方体を形成しているから，1つの変数と無関係となる。y_3 の論理式には確実に無関係となるべき変数は存在しない。

以上のことから，ある状態遷移表が与えられたときグループからグループへと遷移するようなグループ族に分けることができるとき，いくつかの論理式はいくつかの変数と無関係となる。

a_iの求める方法（q状態）

最初に，基本である1次元立方体を1つのグループと考えて，任意のQ_i，Q_jをy_s方向の1次元立方体に割当て（図4•2），任意の入力でのQ_i，Q_jの遷移先Q_k Q_lを同じく，y_s方向に割当てる。この作業をすべての状態の任意の状態がある1つのグループにのみ存在し，どんな入力が加わっても，そのグループが自分自身のグループか他のグループにしか遷移しないまでに続ける。つまり y_s 方向の1次元立方体の間でのみ遷移するまで続ける。

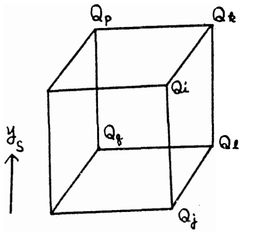


図　4.2

ここで，もし，Q_i，Q_jのいずれかが，Q_k，Q_lのいずれかと等しい状態であるならば，例えば，$Q_i = Q_k$とすると，Q_i，Q_j，Q_kを1つのグループとし，y_s，y_{s+1} 方向の2次元立方体に割当てして前と同様に繰返す。（図4.3）

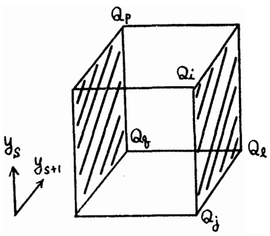


図　4.3

また，すべての状態がただ1つのグループとなったとき，明らかに，無関係となる変数は存在しないから最初のQ_i，Q_jを変えて再び始める。

q状態の場合，a_iを求めるには，最大$q(q-1)/2$回行なわねばならないが，すべての割当て回数$q!$と比較すると非常に少ない試行でよい。a_iを求める例として，図4•4 の machineA の a_i を求める。

状態	入力 $x=0$	入力 $x=1$	Z
1	4	3	0
2	6	3	0
3	5	2	0
4	2	5	1
5	1	4	0
6	3	4	0

図4•4　machine A

最初に，1次元立方体として状態1，2を選び，入力$x=0$において，状態4，6に遷移し，入力$x=1$において，状態3に遷移するから，図4.5のように割当てる。次に，状態4，6は入力$x=0$では状態2，3に遷移する。ここで，状態2，3は同一グループとなるから，状態1，2，3は同一グループとなり，2次元立方体を形成する。また，状態4，6の$x=1$では，状態5，4へ遷移するから，状態4，5，6は同一グループとなり，

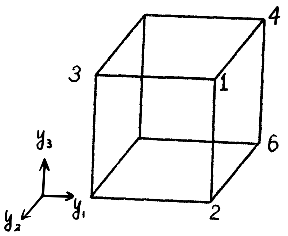


図 4.5

図4•6となる。状態1，2，3と状態4，5，6の2つのグループはどんな入力が加わっても，自分自身のグループか他のグループにしか遷移しないから，これらはa_iとなる。状態1，6を最初に1次元立方体としたとき，入力$x=0$のとき状態4，3へ，$x=1$のとき同じく状態4，3へ，入力$x=0$のとき状態4，3は，状態2，5へ遷移する。これ以上続けても，新しいグループは形成されないからa_iである。（図4•7）

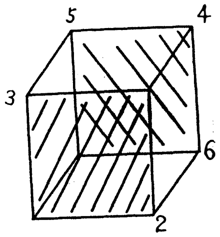


図 4.6

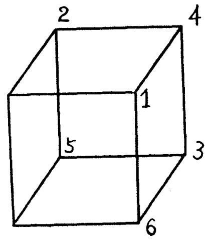


図 4.7

状態1，4を最初に，1次元立方体としたとき，入力$x=0$で状態4，2に遷移するから，状態1，2，4は同一グループであり，入力$x=1$で状態3，5に遷移するから図4•8となる。さらに，$x=0$のとき，状態1，2，4は状態4，6，2へ遷移するから，状態1，2，4，6は同一グループとなり，さらに$x=0$のとき，状態1，2，4，6は状態4，6，2，3へ遷移し，状態3とも同一グループとなるから，すべての状態は同一グループとなる。（図4•9）

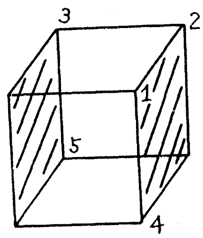


図 4.8

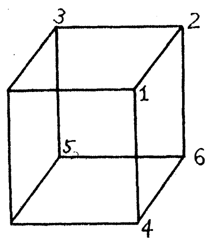


図 4.9

次に，論理式と変数との関係をしめす。

グループの数をn，すべてのグループ内で状態の最大数をmとする。N，MをN$\geqq log_2 n$，$M \geqq log_2 m$なる最小の整数とする。（これをN=〔$log_2 n$〕，M=〔$log_2 m$〕と書くことにする）。

状態	入力		出力
	$x=0$	$x=1$	
1	6	4	0
2	1	5	0
3	2	5	0
4	3	1	0
5	4	2	1
6	5	2	0

図4•10　machine B

この場合，状態割当てをするのに，（N+M）次元立方体が必要でありこの割当てによりN個の論理式はM個の変数と無関係となる。（N+M）次元立方体が必要ということは，（N+M）個の変数つまり，順序回路の実現には，（N+M）個の記憶回路が必要であることをしめす。特殊な場合として，M=1のとき，（N+1個の論理式が得られ，そのうち，y_i以外の論理式は変数y_iと無関係となる。例として図10の machine Bの論理素子の数Sを求めてみよう。前述したa_iを求める方法により，図4•11を得る。図4•12，図4•13より

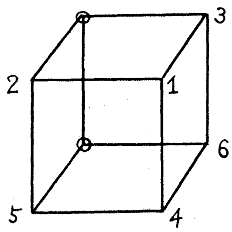


図 4.11

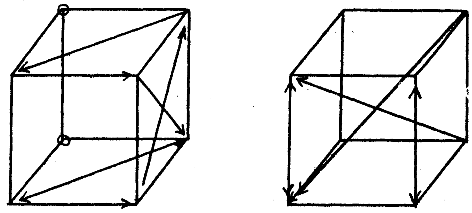
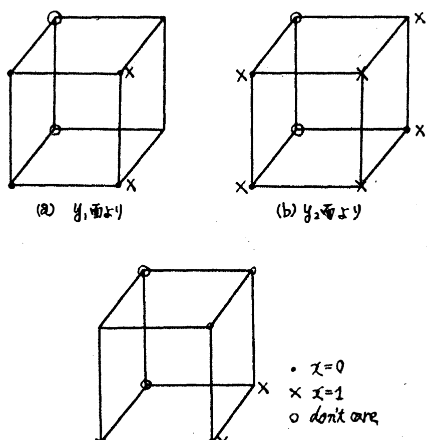

(a) $x=0$　(b) $x=1$

図 4.12



(a) y_1面より　(b) y_2面より　(c) y_3面より

図 4.13

$y_1=y_2\bar{x}+y_1y_2$

$y_2=x+\bar{y}_1+\bar{y}_2$

$y_3=\bar{y}_3x+y_1y_2\bar{x}+y_1y_3\bar{x}$

となる。

一方，$n=2$，$n=3$であるから，$N=[log_2 3]\doteqdot 2$，$M=[log_2 2]=1$となる。これより，3次元立方体が必要となり，2つの論理式は1つの変数と無関係となる。

(4•3)式，(4•4)式の2つの論理式は1つの変数つまりy_3と無関係となることは明らかである。

また，$Z=y_1y_2y_3$となる。よって，論理素子の数Sは，S＝23となる。これは任意な割当てによって得られる論理素子の数と比較すると，いかにも少ないことは明らかである。

状態割当て(2)

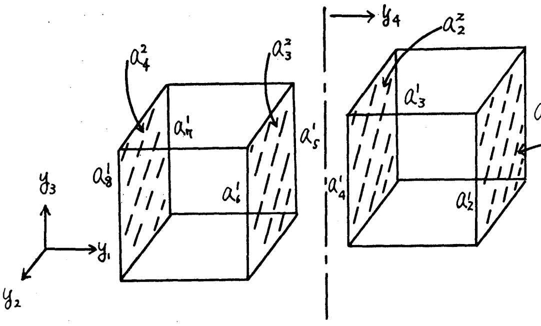


図 4.14

図4•14のように，1次元立方体a_i（$i=1$，2……，8）のグループ間で遷移しているとし，さらに，2次元立方体 a_j^2（$j=1$，2，……，4）のグループ間で遷移しているとき，得られる論理式が簡単化される。

図4•14の例では，

y_1の論理式は，y_2，y_3に無関係

y_2の論理式は，y_3に無関係

y_4の論理式は，y_2y_3に無関係

となる。しかし

y_3の論理式には，無関係となる変数は無い。一般に，最初のグループ族a_i^1のN，をMをN_1，N_2とする。次に，そのa_i^1を1つの状態とみなして，グループ族a_j^2を得る。同様にして，n個，同作業を繰返して，グループ族a_i^nを得る。そして，それ以上続けてももはや，グループ族はないものとすると

N_n個の論理式は$\sum_{k=1}^{n}M_k$個の変数と無関係

(N_n+M_{n-1})個の論理式は$\sum_{k=1}^{n-1}M_k$個の変数と無関係

（これはM_{n-1}個の論理式のみ$\sum_{k=1}^{n-1}M^k$個の変数と無関係である。）

N_1個の論理式はM_1個の変数と無関係

となる。

また，このとき，$(N_n+\sum_{k=1}^{n}M^k)$次元立方体が必要となる。特殊な場合として，n回続けて$m=2$のとき，つまり，$N_n=1$のとき

ただ1つの（y_i）論理式はその変数（y_i）のみに関係して他の変数とは無関係となる。

a_j^2の求め方は，a_i^1を1つの状態と考えて，状態割当て(1)のa_iの求め方と等しい。

状態割当て(3)

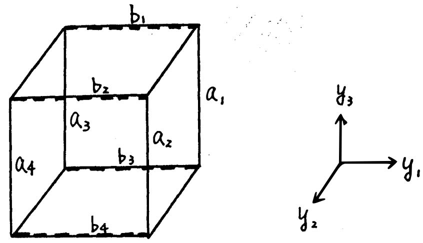


図 4.15

図4•15のように，a_i（$i=1$，……，4）だけでなく，b_j（$j=1$，……，4）もグループ間で遷移しているとすると

y_1の論理式はy_3に無関係

y_2の論理式はy_1，y_3に無関係

y_3の論理式はy_1に無関係

となる。

状態割当て(1)の図4•1と比較すると，y_2，y_3の論理式に無関係となる変数が存在している。それ故に，一段と簡単化されると考えられる。

割当て方法は，状態割当て(1)のa_iを求める方法と同じで，最初，a_i(b_j)を求め，次に，b_j(a_i) を求めれば状態割当てができる。

5. 結　言

n次元立方体と状態図とを組合せた状態遷移立方体というものを考え，これを用いて，論理式が簡単になる状態割当てが存在することをしめし，その割当て法を幾何学的にしめした。

この割当て法は与えられた状態遷移表がa_i，b_j な

るそれぞれのグループ間で遷移する場合に，適用されることをしめした。

この割当てにより，確実に一番簡単な論理式を得ることはできないが，論理式に無関係となる変数が存在することから，かなり簡単な論理式を得，数少ない論理素子で与えられた仕様を満足する順序回路の実現可能性をしめした。

a_1なるグループ間で遷移するような性質は，集合論的観点から導いた HartmanisのSubstitution Prope--rty と等しくなったが，本文では幾何学的にしめしたので容易にその性質を理解できる。

1. J.Hartmanis; on the state assignment problem for sequential machines. I.IRE. Trans. EC—10 (1961)
2. R.E.Stern et al;On the state assignmeut problem for sequential machinesⅡ; IRE. Trons.EC—10 (1961)
3. J.Hartmanis; Alegebraic structure theory of sequeutial mactines, Preutice—Hall.Inc. (1966)
4. 宇田川銈久他;高信頼度順序論理回路の動的計画法による状態割当てについて，電・信・誌第47巻6号 (昭39)
5. 尾崎弘他，デイジタル数学，共立出版 (1966)
6. 当麻喜弘;デイジタル技術演習，オーム社 (1964)
7. R.E.Miller; Swicheing theory Vol I. Vol Ⅱ John—wiley & Sons. Inc
8. 酒井俊；富山大学工学部修士論文