線型計画法の問題についての一考察

長　元　亀久男

One Consideration on a Problem of L. P.

Kikuo NAGAMOTO

One semigraphic solution for a problem of linear programming is described here.

一般に線型計画法というのは一次の連立不等式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leqq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leqq b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqq b_m \quad \cdots\cdots(1)$$
$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n \geqq 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

なる制約のもとで一次の目的関数

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots\cdots + c_n x_n \quad \cdots\cdots(3)$$

を最大にする($x_1\ x_2 \cdots\cdots x_n$)の組を求める問題である。スラッグ変数 $x_{n+1} \cdots\cdots x_{n+m}$ を用いて(1)のかわりに

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \quad \cdots\cdots(4)$$

(2)式は

$$x_1 x_2 \cdots\cdots x_n\ x_{n+1} \cdots\cdots x_{n+m} > 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

(3)式は

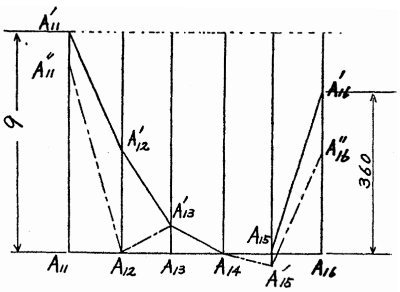
$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \cdots\cdots + c_n x_n + 0\,x_{n+1} + \cdots\cdots + 0\,x_{n+m} \quad \cdots\cdots(6)$$

変数が $x_1\ x_2$ の2つだけの場合は線図を用いて簡単に解くことができるが[1]変数が3つ以上の場合には代数的に解くしか方法がありません。線型計画法の代数的な解き方はさまざま工夫されているが一番なじみの深いのはシンプレックス表による方法である。ここではシンプレックス表による方法に半図式的考察を加えて取扱いを便にしたことについて述べるものである。

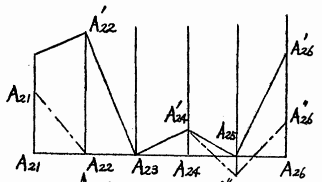
いま簡単のために，つぎのような例について話しをすすめてゆくことにする。[2]

$$9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \quad \cdots\cdots(7)$$
$$4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \quad \cdots\cdots(8)$$
$$3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \quad \cdots\cdots(9)$$
$$Z = 7x_1 + 12x_2 \quad \cdots\cdots(10)$$

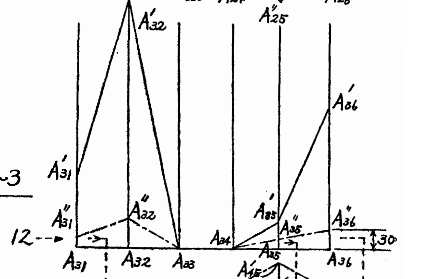
$x_3 x_4 x_5$；スラッグ変数とする。



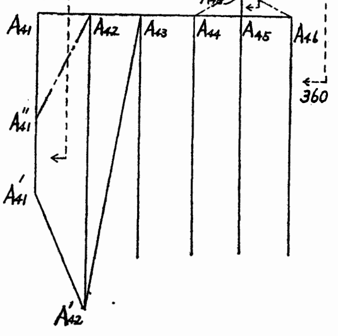
図~1



図~2



図~3



図~4

図～1を参照してA_{11}～A_{16}間を5等分する。5等分点$A_{11}A_{12}$……A_{16}の各点において垂直線をたてる。A_{11}における垂直線上に(7)式のx_1の係数を，ある尺度をきめて$A_{11}A'_{11}=9$に等しくとる。A_{12}における垂直線上に(7)式のx_2の係数を，いまきめた尺度にて$A_{12}A'_{12}=4$に等しくとる。A_{13}における垂直線上に(7)式のx_3の係数を，いまきめた尺度にて$A_{13}A'_{13}=1$に等しくとる。A_{14}における垂直線上にはx_4の係数を，いまきめた尺度にてとるものとする。A_{15}における垂直線上にはx_5の係数を，いまきめた尺度にてとるものとする。A_{16}における垂直線上には(7)式の右辺の360を別にきめたある尺度にてとるものとする。

A_{ij}の添字iについてはi＝1が(7)式，j＝1がx_1，i＝2が(8)式，j＝2がx_2，i＝3が(9)式，j＝3がx_3，i＝4が(10)式，j＝4がx_4，j＝5がx_5，j＝6が一次連立不等式の右辺をあらわすものとする。

このようにして(8)式の係数を線図であらわせば図～2のようになる。すなわち$A_{21}A'_{21}=4$，$A_{22}A'_{22}=5$，$A_{23}=0$，$A_{24}A'_{24}=1$，$A_{25}=0$，$A_{26}A'_{26}=200$にとってある。

(9)式の係数を線図であらわせば図～3のようになる。すなわち$A_{31}A'_{31}=3$，$A_{32}A'_{32}=10$，$A_{33}=0$，$A_{34}=0$，$A_{35}A'_{35}=1$，$A_{36}A'_{36}=300$にとってある。

図～4においてはある尺度でシンプレックス法に従い$A_{41}A'_{41}=-7$，$A_{42}A'_{42}=-12$にとってある。

A_{ij}にてj＝1に相当するところは変数x_1の係数，j＝2に相当するところは変数x_2の係数，j＝3に相当するところは変数x_3の係数，j＝4に相当するところは変数x_4の係数，j＝5に相当するところはx_5の係数をあらわしている。

さて目的関数Zを最大にしたいのであるからx_2の係数は12でこれを変動せしめてみることが効果的であることがわかる。制限条件のうちでx_1を考えないでx_2のみを変動せしめてみるに一番はやく制限条件にひっかかるのはθ＝制限条件/x_2の係数、の一小さいところでって(9)式のθ＝30で一番はやく制限条件にひかかる。そこで図～3にてx_2の係数が1となるように($A_{32}A'_{32}=1$)線図を比例縮小し，ひき直すと″を附した線図$A''_{31}A''_{32}A_{33}A_{34}A''_{35}A''_{36}$となる。

この条件をもとにして，(7)，(8)のx_2の係数を消去してみることにする。

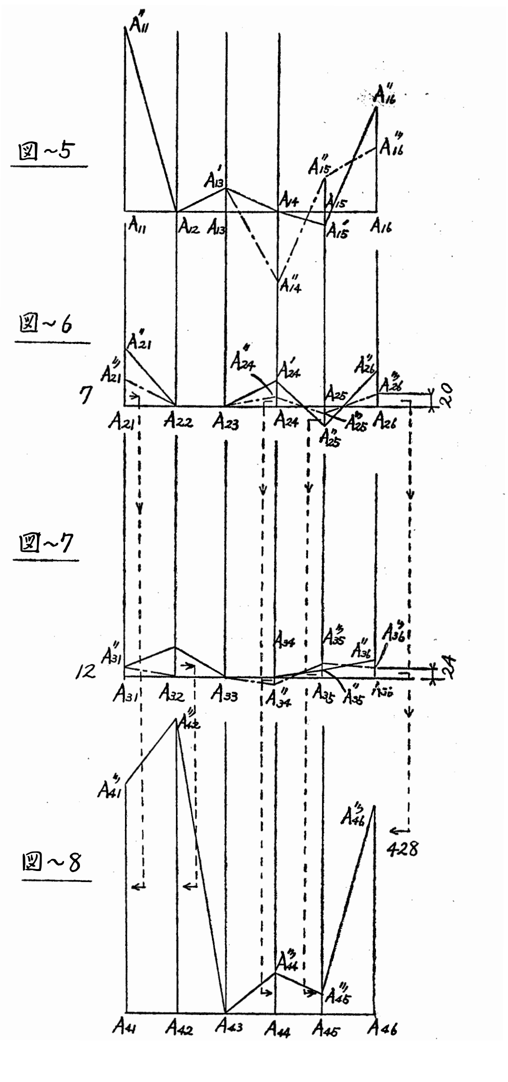
その方法は例えば図～1 $A_{11}A''_{11}$線にをいては，A''_{11}点において，マイナスはA_{11}に向う方向にとるものとし$A'_{11}A''_{11}=A_{31}A'_{31}(=0.3)\times4$を$A'_{11}$から$A_{11}$の方向に$A'_{11}A''_{11}$にとる。

このような要領で線図つくれば(7)式は$A''_{11}A_{12}A'_{13}A_{14}A'_{15}A''_{16}$となる。

同じようにして(8)のx_2を消去してみれば図～2にて$A''_{21}A_{21}A_{23}A'_{24}A''_{25}A''_{26}$となる。

図～4にては$A_{41}A'_{41}$はx_1の係数を負号にして示している。$A_{42}A'_{42}$はx_2の係数を負号にして示している。

図～3においては全部x_2に置換えて考えているので図～4では$A_{41}A'_{41}(-7)-12\times(A_{31}A''_{31}=0.3)=A_{41}A'_{41}(-3.4)$，$A_{42}A'_{42}(-12)-12\times(A_{32}A''_{32}=1)=0$，$A_{43}(0)-(-12)\times A_{33}(0)=0$，$A_{44}(0)-(-12)\times A_{34}(0)=0$，$A_{45}(0)-(-12)\times A_{35}A''_{35}(0.1)=1.2$，$A_{46}(0)-(-12)\times A_{36}A''_{36}(30)=360$，というようになる。



図～1の鎖線で示された結果を図～5のように実線で画く。同じように図～2の鎖線で示された結果を図～6のように実線で画く。同じように図～3にて鎖線で示された結果を図～7のように実線で画く。

今度は制限条件について x_1 について変動せしめてみる。一番はやく制限条件にひっかかるのは θ ＝制限条件/x_1 の係数，の一番小さいところであって図～7から $\theta = A_{26}A''_{26}/A_{21}A''_{21} = 20$ で一番はやく制限条件にひっかかる。そこで図～6において x_1 の係数が1となるように（$A_{21}A'''_{21} = 1$）線図を比例縮小し，ひき直すと‴を附した縮図 $A'''_{21}A_{22}A_{23}A'''_{24}A'''_{25}A'''_{26}$ となる。

この条件をもとにして図～5，図～7にて x_1 の係数を消去してみることにする。

その結果は図～5にて線図 $A''_{11}A_{12}A'_{13}A''_{14}A''_{15}A'''_{16}$ となる。$A_{16}A'''_{16}$ は前にきめた A_{16} の尺度で測れば84となる。

これは x_2 と x_1 を変動せしめた場合(7)式の制限条件における残余である。

図～6にては x_1 の係数は $A_{21}A'''_{21} = 1$ になるように，この条件を比例縮小したものが線図 $A'''_{21}A_{22}A_{23}A'''_{24}A'''_{25}A'''_{26}$ となる。$A_{26}A'''_{26}$ はこの場合の x_1 の値を示すもので前にきめた A_{16} の尺度で測れば20である。

図～7にては図～6の条件で x_1 の係数を消去するように作図すれば線図 $A_{31}A_{32}A_{33}A'''_{34}A'''_{35}A'''_{36}$ となる。$A_{36}A'''_{36}$ はこの場合の x_2 の値を示すもので前にきめた A_{16} の尺度で測れば24である。

図～6，図～7からZを求めれば図～8のようになる。すなわち図～8にて A_{41} 点にては $A_{41}A'''_{41} = 7 \times 1$ として求め得られる。A_{42} にて $A_{42}A'''_{42} = 12 \times 1$ として求め得られる。A_{43} は0，A_{44} 点にては $0 \times (-3.12) + 7 \times 0.4 + 12 \times (-0.12) = 1.36$ に等しく $A_{44}A'''_{44}$ をとる。A_{45} 点にては $0 \times 1.16 + 7 \times (-0.2) + 12 \times (0.16) = 0.16) = 0.52$ に等しく $A_{45}A'''_{45}$ をとる。A_{46} 点には $0 \times 84 + 7 \times 20 + 12 \times 24 = 428$ となる，

$A_{44}A'''_{44} = 1.36$（x_5），$A_{45}A'''_{45} = 0.52 =$（x_6）が正号になっていることはこれ以上Zの増大する余地のないことを示している。

$x_1 = 20$，$x_2 = 24$ で $Z = 428$ と最大となるのである。これで問題が解けたことになる。

本稿は昭和43年11月29日日本繊維機械学会北陸支部にての講演の要旨である。

参考文献

(1) 経営数学研究会，実務家のための経営数学，日刊工業新聞社（昭38）
長元亀久男，経営生産問題の数学的考え方，昭38－8－20．日本繊維機械学会北陸支部研究前刷．
長元亀久男，佐伯弘子　線型計画について，昭39－8－22　日本繊維機械学会北陸支部前刷．

(2) 林周二，数学再入門I，中央公論社，（昭43）

(3) 渡辺茂，機構学講義I，共立全書，（昭37）

(4) 国沢清典編，リニヤプログラミング　日刊工業新聞社（昭34）

(5) 筒井孝胤訳，線型計画の問題と方法，東京図書　（1964）

（昭43.10.31受付）