

位置サーボ系の消費エネルギーと時間との和を最小にする最適制御

四 谷 平 治
尾 井 捷 哲
酒 井 俊

Optimal Control Which Minimize the Time and Energy Cost
Function of a Positional Servo-System,

Heiji YOTSUYA
Shotetsu OI
Takashi SAKAI

We applied Pontryagin's maximum principle to solve a optimal control problem that, as the cost function, of a positional servo system, we took energy consumption and time, and multiplied weighting parameter to the two quantities, and added these multiplied figure. Application of maximum principle leads the problem to the two point boundary-value problem, and it gives the procedure of the solution. But because of difficulty of analytical solution, digital or analog computer must be used. Analog computer is available for the formation of adjoint system, and the combined systems can gives the optimal control. Analog simulation can be easily done and the solution is what we expected.

従来の制御理論は周波数応答, 安定性等に重点を置いて, 線型系を議論するものであった。それ故, 系が非線型要素を含む場合とか制御変数に拘束がある場合の取扱は, 困難であった。しかし最近に到ってポントリヤギンが最大原理を発表して以来, 非線型をも含めて一般的な取扱いのできる新しい制御理論が体系づけられてきた。

我々はこの新して理論を位置サーボ系の解析に適用し更にアナログ計算機によってその解を求めた。得られた解を実際のサーボ系に制御信号として与えれば, アナコンとサーボとを結合した最適制御系を造ることができる。以下に系の解析と求解手順を述べよう。

制御対象のブロック線図は図-1である。

G_{em} はサーボモータに負荷を加えた電気機械系を表わす。サーボモータは他励磁電機子制御方式を用

い, 線型要素とみなす。又アンプは飽和特性を有するが解析を容易にするために制御信号 u に拘束を与えてアンプを線型とみなす。即ち線型制御対象に拘束のある制御信号 u を与えるものとしてこの u を求めよう。

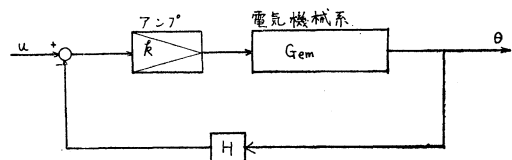


図 1 制御対象のブロック線図

アンプ, サーボモータ, 負荷, フリートバック要素などすべて線型とみなし制御信号 u に拘束 $|u| \leq A/k$ を課す。

G_{em} の電気機械系を表す微分方程式は二次形に近似すれば次の式(1)となる。

$$\frac{Ra}{K_T} \left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left\{ \frac{Ra}{K_T} \left(B + \frac{L_f}{N^2} + K_e \right) \right. \\ \left. \times \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{N} e_i \dots \dots \dots \right\} \quad (1)$$

- J_M : 電機子慣性性能率 K_T : トルク係数
- J_L : 負荷慣性性能率 K_e : 逆起電力係数
- L_f : 粘性負荷 B : 粘性抵抗
- Ra : 電機子抵抗 θ : 負荷角変位
- N : モータと負荷の歯車比
- k : アンプ増幅率 e_i : 電機子端子電圧
- A : アンプ出力電圧

記号は以上のように定義した。

図-1のように角変位 θ をスライド抵抗で電圧に変換してフィードバックした制御系方程式は

$$\left(J_a + \frac{J_L}{N^2} \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left\{ \left(B + \frac{L_f}{N^2} \right) + \frac{K_T K_e}{R_a} \right\} \\ \times \frac{d\theta}{dt} + \frac{k K_T H}{R_a N} \theta = \frac{k K_T}{N R_a} u \dots \dots \dots (2)$$

となる。またサーボモータの消費電力 P は

$$P = \frac{k}{R_a} (u - H\theta) \left\{ k(u - H\theta) - N K_e \theta \right\} \dots (3)$$

とかけるので、制御を評価する積分として

$$J = \int_0^T \left\{ (1-\lambda) + \lambda P \right\} dt \dots \dots \dots (4)$$

を考える。 λ は所用時間及び消費エネルギーが評価関数 J を占める割合を表すパラメータであり、 $\lambda=1$ のときは時間に制限がなく消費エネルギー P を最小にするような制御になり、逆に $\lambda=0$ のときは P に制限がない最短時間制御となる。 λ の値を変化させて希望する結果をもたらすような λ を求めればよい。結局我々は方程式(2)に従い、評価関数 J を最小にするような系の軌道と制御信号 u を決定したい訳である。このためにポントリヤギンの最大原理を適用しよう。見やすくするために変数を $\theta \rightarrow x_1$, $\dot{\theta} \rightarrow x_2$, $J = x_3$ と変換する。

方程式(2), (4)を一階連立微分方程式に直して

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= - \frac{B + \frac{L_f}{N^2} + \frac{K_T K_e}{R_a}}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} x_2 - \frac{\frac{k K_T H}{N R_a}}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} x_1 \\ &\quad + \frac{\frac{k K_T}{N R_a}}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} u \\ \dot{x}_3 &= (1-\lambda) + \lambda \frac{k}{R_a} (u - H x_1) \\ &\quad \times \left\{ k(u - H x_1) - N K_e x_2 \right\} \end{aligned} \right\} (5)$$

系の初期条件は $x_1(0)=\theta_0$, $x_2(0)=x_3(0)=0$,
最終条件は $x_1(T)=x_2(T)=0$, T :未定

である。 $|u| \leq \frac{A}{k}$ なる条件の下で $x_3(T)$ が最小になるようにすればよい、(但し A は定数)系のハミルトン \bar{H} は

$$\bar{H} = p_1 x_2 + p_2 \cdot \frac{1}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} \\ \times \left\{ - \left(B + \frac{L_f}{N^2} + \frac{K_T K_e}{R_a} x_2 - k K_T H x_1 + \frac{k K_T}{N R_a} u \right) \right. \\ \left. + p_3 \left\{ (1-\lambda) + \lambda \frac{k}{R_a} (u - H x_1) \right\} \right. \\ \left. \times \left\{ k(u - H x_1) - N K_e x_2 \right\} \dots \dots \dots (6) \right.$$

となる。ポントリヤギン関数 \bar{P} は

$$\bar{P} = x_3(T)$$

であるから J を最小にするためには \bar{H} を u に関して最大にすればよい。 $\frac{\partial \bar{H}}{\partial u} = 0$ を与える u は

$$\bar{u} = H x_1 + \frac{1}{2k} \\ \times \left\{ N k_e x_2 + \frac{1}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} \cdot \frac{K_T}{N \lambda} p_2 \dots \dots \dots (8) \right.$$

従って $|u| \leq \frac{A}{k}$ なる拘束下では
求める u は

$$u = \begin{cases} \frac{A}{k} & (u \geq \bar{u} \text{ のとき}) \\ \bar{u} & (\bar{u} < u < \bar{u} \text{ のとき}) \dots \dots \dots (9) \\ -\frac{A}{k} & (u \leq \bar{u} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。また随伴系 p_1, p_2, p_3 に関する方程式は
 $p_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_i}$ によって

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{1}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} \cdot \frac{k K_T H}{N R_a} p_2 + \frac{\lambda k H}{R_a} \\ &\quad \times \left\{ 2k(u - H x_1) - N k_e x_2 \right\} p_3 \\ \dot{p}_2 &= -p_1 + \frac{1}{\left(J_M + \frac{J_L}{N^2} \right)} \left\{ B + \frac{L_f}{N^2} + \frac{K_T K_e}{R_a} \right\} \\ &\quad \times p_2 - \lambda \frac{N k_e K}{R_a} (u - H x_1) \\ \dot{p}_3 &= 0 \quad (p_3 = -1) \end{aligned} \right\} (10)$$

この問題では $p_3 = -1$ は決定しているから残っているのは初期値 $p_1(0), p_2(0)$ を決定することだけである。しかし $p_1(0), p_2(0)$ は系の軌道が与えられた条件を満足するように試行錯誤によって求めなければならない。即ち問題は方程式(5), (9), (10)を境界条件

$x_1(0)=\theta_0, x_2(0)=x_3(0)=0$ 及び $x_1(T)=x_2(T)=0$ で解く二点境界値問題に定式化された。

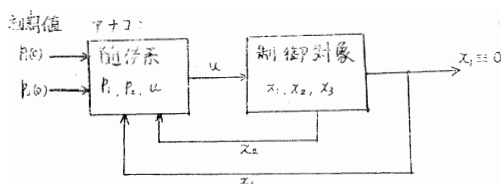


図 2 解を求める手順制御対象から x_1, x_2 の値をアナコンの随伴系に送り u を計算する。 $P_1(0), P_2(0)$ は軌道が境界条件を充すように調節する。

図-2は解を求めるブロックダイアグラムである。一般に非線型微分方程式の解析的な解を求めるのは極めて困難である。それ故、解は数値計算を行うか又はアナログ計算機を用いるかしなければならない。サーボ系の時定数が十分大きいときは実際の系をアナログ計算機と結びつけることが出来るので便利である。サーボモータ及び負荷から θ と $\dot{\theta}$ の情報を得てアナコンに組まれた随伴系で p_i 及び u が計算される。その u を制御信号としてサーボ系に与えてやればよい。前にも述べたように初期値 $p_1(0), p_2(0)$ は試行錯誤によってあらかじめ定めねばならない。

次にアナコンでシミュレートした結果について述べる。系の定数の値を下に示す。

- $J_M = 1.7 \times 10^{-5} (kg-m^2)$
- $K_T = 1.9 \times 10^{-3} (kg-m/Amp)$
- $J_L = 2.0 \times 10^{-4} (kg-m^2)$
- $K_e = 2.0 \times 10^{-2} (V/Rad/sec)$
- $B = 2.5 \times 10^{-4} (kg-m)$
- $N = 5, L_f = 0, k = 1, A = 10(V)$

アナコンの容量による制限のためフィードバック係数 H を 0 として開ループとした。

(5), (9), (10)式は

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -0.05x_2 + 0.5u \\ \dot{x}_3 &= 1 - \lambda + \lambda u(0.03u - 0.003x_2) \\ \dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 &= p_1 - 0.05p_2 + \lambda \times 0.003u \\ u &= \frac{7.5}{\lambda} p_2 + 0.05x_2 \quad (\text{但し } |u| \leq 10) \end{aligned} \right\} (11)$$

初期条件は $x_1(0) = -40$ (ラジアン), $x_2(0) = 0, x_3(0) = 0,$
最終条件は $x_1(T) = x_2(T) = 0$ である。

角変位 θ の軌道は図-3に示した。軌道は $\theta = \theta_0$ を傾斜が0で始まり、 $P_1(0), P_2(0)$ を時間軸に接するように調節する。種々の λ に対する軌道を示したが予想された通り消費エネルギーの制限を強くすれば時間がよけいにかかることを示している。制御信号は図-4であり。サーボモータの起動時は許容いっぱい10Vが印加されしばらくすると指数函数的に減少して負となり消費エネルギーの制限が弱いと-10Vとなって制動がかけられる。軌道が時間軸に接した瞬間に制御信号は0になる。電力のグラフは図-5である。消費エネルギーはこのグラフと両軸に囲まれる面積となる。

以上の結果から望ましい λ を決定することができる。

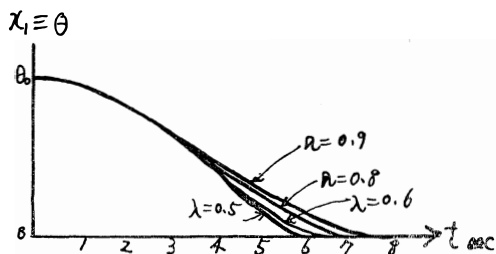


図 3 $x_1 \equiv \theta$ の軌道, λ が小さくなるに従って制御時間が短くなるが $\lambda < 0.5$ の節節ではほとんど変らない。

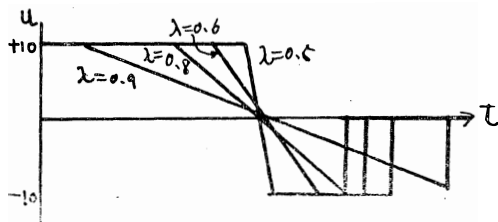


図 4 制御信号 λ が小さくなるに従って限界一ぱいの電圧を使っている。 $x_1 = 0$ の瞬間に $u = 0$ とする。

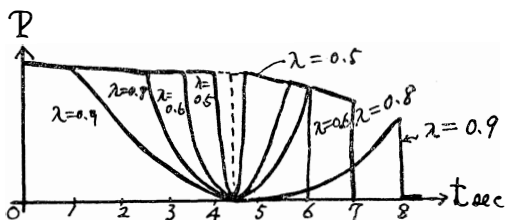


図 5 サーボモータの電力。消費エネルギーはグラフと両軸との間の面積である。 $\lambda = 0.5$ 以下ではエネルギーは少ししか増えない。

結 言

以上述べたように消費エネルギー，所用時間を考慮することによって各制御系とその目的に応じた設計をするのに有用である。しかし二点境界値問題を解かねばならないというめんどうさと随伴系を形成する自動計算機が必要であるという経済的な問題がある。

電気4学会北陸支部連合大会 昭.43.10.16発表

(昭43.10.31受付)