機械運動の問題についての一考察（第3報）

長　元　亀　久　男

One Consideration on a Problem of Kinetics of Machinery

Kikuo NAGAMOTO

One consideration on the graphical Constitution about an instantaneous center of acceleration of a rigid body in a plane motion is described here.

ある瞬間における剛体の平面運動を考える場合，固定瞬間中心軌跡曲線上を動瞬間中心軌跡曲線が転るところの転り接触におきかえて考えることができる。速度や加速度の問題については，これら2曲線がその接触点（瞬間中心）Pを通る2つの曲率円におきかえ，これらの曲率円の転り接触として平面運動を考えても差支えがない。

そこで図—1に示すように半径 R_0 なる固定円上を半径Rなる円が転りながら動く場合を考え，この転り円の中心Cからaなる距離の点にあるAの運動軌跡について考えてみることにする。この運動軌跡はトロコイド曲線となることが知られている。この曲線の性質については，つぎのようなことが知らされている。[1]

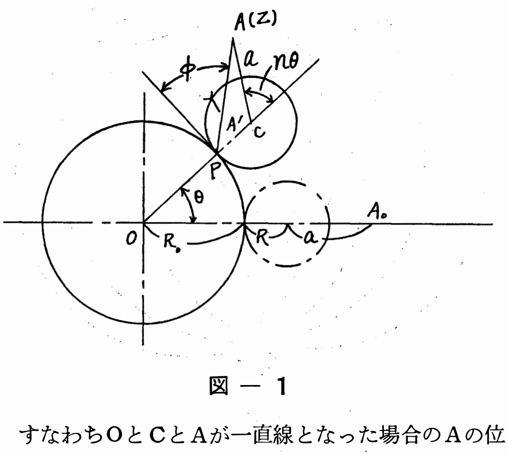

図 — 1

すなわちOとCとAが一直線となった場合のAの位置をA_0とし，OA_0を基線にとることにする。$\angle COA_0=\theta$とする。

$$n=\frac{R_0}{R} \qquad \overrightarrow{OP}=R_0e^{i\theta} \qquad \overrightarrow{PC}=Re^{i\theta}$$

$$\overrightarrow{CA}=ae^{r(n+1)\theta} \qquad r=\overrightarrow{PA}$$

$$Z=R_0e^{i\theta}+r \quad \cdots\cdots(1)$$

$$Z=(R_0+R)\,e^{i\theta}+ae^{i(n+1)\theta} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\dot{Z}=i\dot{\theta}\{(R_0+R)e^{i\theta}+(n+1)\times ae^{i(n+1)\theta}\} \quad \cdots(3)$$

$$\dot{Z}=i(n+1)\dot{\theta}r \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\ddot{Z}=i(n+1)\ddot{\theta}r+i(n+1)\dot{\theta}\dot{r}$$

$$\ddot{Z}=i(n+1)\ddot{\theta}r+i(n+1)\dot{\theta}(\dot{Z}-iR_0\dot{e}e^{i\theta})$$

$$\ddot{Z}=i(n+1)\ddot{\theta}r-(n+1)^2\dot{\theta}^2r$$

$$+(n+1)\dot{\theta}^2R_0e^{i\theta} \quad \cdots\cdots(5)$$

r方向の加速度の大きさ a_n と，接線加速度の大きさを a_t とすれば $r=|r|$ としてつぎのように求められている。[1]

$$a_n=-(n-1)^2\dot{\theta}^2r+(n+1)\dot{\theta}^2R_0\sin\phi \quad \cdots\cdots(6)$$

$$a_t=(n+1)\ddot{\theta}r+(n+1)\dot{\theta}^2R_0\cos\phi \quad \cdots\cdots(7)$$

点Aの運動軌跡曲線の曲率中心をA′としPA′$=\rho$ とすれば

$$a_n=\frac{|\dot{Z}|^2}{r-\rho}=-\frac{(n+1)^2\dot{\theta}^2r^2}{r-\rho} \quad \cdots\cdots(8)$$

(6)と(8)から

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}\right)\sin\phi=\frac{1}{D} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$D=\frac{R_0}{n+1} \quad \cdots\cdots(10)$$

これはオイレルザバリーの式である。

(6)式において $a_n=0$ とすれば

$$r=D\sin\phi \quad \cdots\cdots(11)$$

これは変曲円とよばれているものである。

(7)式において $a_t=0$ とすれば

$$r=\frac{R_0\dot{R}^2}{\ddot{\theta}}\cos\phi \quad \cdots\cdots(12)$$

これは接線円とよばれているものである。この変曲円と接線円との交点が速度および加速度の中心である。変曲円の図的構成とボビリエ法則との関係については前報において述べておいた。[2]

このことから剛体のある瞬間運動において，変曲円

上で速度の瞬間中心とその点における極接線が得られている場合には，加速度の瞬間中心を求め得られるならば，接線円は容易に求め得られることになる。

さて加速度ベクトル$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$が与えられた場合，加速度中心の図的構成についてはつぎのようなことが知られている。(1)

図―2にて，与えられたる加速度ベクトルを$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$とする。両加速度ベクトルの交点 R を求める。

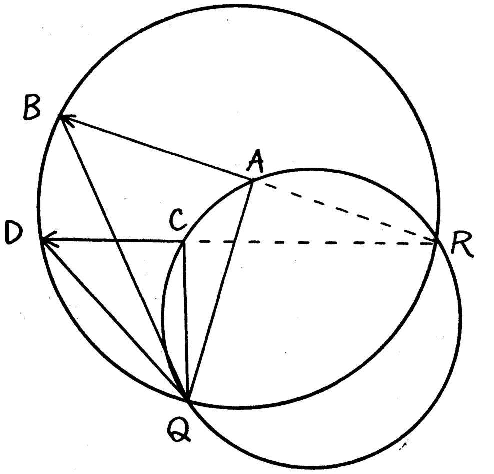

図 ― 2

D，B，Rを通る円を作図する。またC，A，Rを通る円を作図する。この両円の交点をQとすればこれは加速度中である。(1)

図―3において与えられた加速度ベクトルを$\overrightarrow{AB}$，

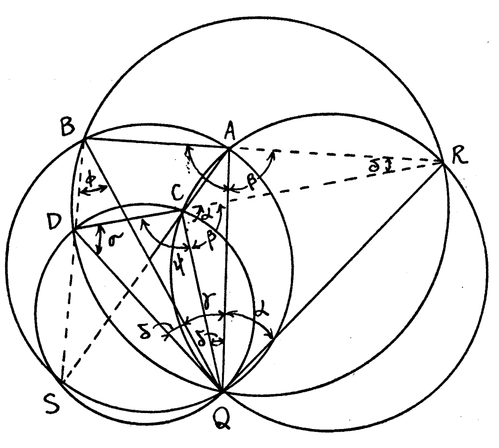

図 ― 3

$\overrightarrow{CD}$とする。両加速度ベクトルの交点Rを求める。前と同様に，D，B，Rを通る円を作図する。またC，A，Rを通る円を作図する。両円の交点は加速度中心Qである。ベクトルの矢頭BDを結ぶ線と，終尾ACを結ぶ線との延長の交りをSとする。S，B，Aを通る円を作図する。この円は加速度中心Qを通過するのである。S，D，Cを通る円を作図すればこれもまた加速度中心Qを通過するのである。これは加速度中心の図的構成についての１つの見方であると考えることができる。

△BDQと△CAQにおいて

$\angle BRD=\angle BQD=\delta$

$\angle BRD=\angle AQC=\delta$

$\angle AQC=\angle BQD=\delta$

$\angle BDR=\angle BQR=\alpha+\gamma$

$\alpha+\beta+\phi+\delta=\delta+\phi+\alpha+\gamma+\sigma=2\angle R$

（△ACQ）（△DBR）

$\beta+\phi=\phi+\sigma+\gamma$

$\beta=\gamma+\sigma \qquad \therefore \phi=\phi$

A，B，Sを通る円はQを通るということになる。

また$\angle BAQ+\angle BSQ=2\angle R$

$\angle BAQ=\angle DCQ$

$\therefore \angle DCQ+\angle BSQ=2\angle R$

S，D，Cを通る円はQを通るということになる。

図―4において，与えられた加速度ベクトルを$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$とする。加速度ベクトルが図のような位置にある

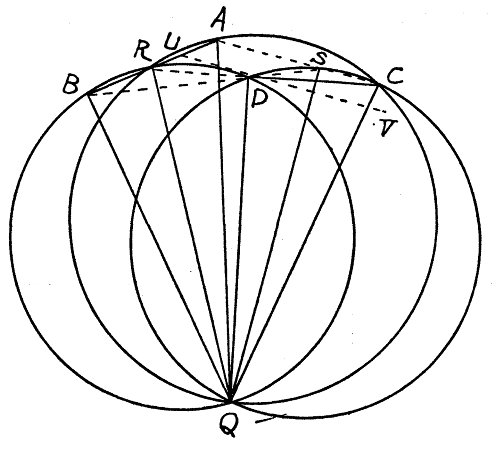

図 ― 4

ものとする。$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ベクトルの交点をRとする。ベクトルの矢頭B，DとRを通る円を作図する。ベクトルの終尾A，CとRを通る円を作図する。この両円の交点 Q は加速度中心である。つぎに ベクトル終尾A，Cを結ぶ。矢頭D，Bを結んだ線の延長とACの延長との交点をSとする。D，S，Cを通る円を作図

する。この円は加速度中心Ｑを通過するのである。

Ｄ点を通りＡＣに平行にひき，ＡＢとの交りをＵとして，ＵＤＶをひく。

∠ＳＣＤ＝∠ＳＱＤ

∠ＳＣＤ＝∠ＵＤＲ＝∠ＣＤＶ

∠ＳＤＣ＝∠ＳＱＣ

∠ＣＱＳ＋∠ＳＱＤ

＝∠ＳＤＣ＋∠ＣＤＶ

∠ＣＱＤ＝∠ＳＤＶ

∠ＳＤＶ＝∠ＡＳＤ

∠ＣＳＤ＋∠ＣＱＤ＝２∠Ｒ

故にＤ，Ｓ，Ｃを通る円は加速度中心Ｑを通過する。これも加速度中心構成の１つの見方であると考えることができる。

以上は，２つの加速度ベクトルについて加速度中心が図的構成されるいろいろな過程について述べたものである。

前報で述べたように瞬間中心と運動軌跡曲線，瞬間中心における極接線と法線との図的構成理論と，いま述べた，加速度から加速度の瞬間中心を求める作図の構成性を応用して，機械運動の瞬間における変曲円と接線円を求めることができる。[1)]

文　　献

1）渡辺茂，機構学講義 I，共立全書（昭37）

2）長元亀久男，機械運動の問題についての一考察(第2報)，富山大学工学部紀要，16,1～2,（昭40～3).

（昭和 42. 11. 30 受付）