

# 有限な形状をもつ半導体試料の伝導度補正係数について

八 木 寛  
 亀 田 悦 正  
 田 中 宣 四

On the corrective coefficient of conductivity of semiconductor  
 Blocks with definite Scale.

Hroshi YAGI  
 Etsumasa KAMETA  
 Sensi TANAKA

There are many reports on the resistivity of semi-conductor with infinite scale.

However, in the measurement of semiconductor resistivity, we must use the definite things. In this case, we must find the improving formula considered the definite scale.

This paper discusses the potential difference on the definite semiconductor surface between four probes by using electric image methode.

## 1. ま え が き

半導体の電気伝導度を測定するには、種々の測定方法が考案されている。けれども、そのうちで代表的なものといえば四探針法であろう。四探針法とは4本のプローブを半導体の表面に一列にならべて接触させ、外側の2本のプローブに電流を流し入れさせ、内側の2本のプローブの電位差を測ることによって、半導体の電気伝導度を知るという方法である。四探針法は試料が無限に大きいということを仮定して測定をする。しかし、実際の試料の大きさには制限があるので、何らかの補正を施す必要がある。

四探針法の補正に関する研究は、これまで大別して、二通りの方法、すなわち Valdes による球座標を用いたものと Ollendorff, Smits Logan による2次元極座標を用いたものなどがある。試料の厚みが大のときは前者、薄いときは後者が用いられる。しかし、試料の六面がすべて有限である場合の考察はなされていない。

筆者らは映像法を用いて、このように三方すべてが有限長をもつ場合の補正計算をおこなったので報告する。

四探針法による電気伝導度測定の構成を図. 1 にしめす。

さて、電気伝導度を  $K$ 、比抵抗を  $\rho$ 、電流密度を  $J$ 、電界の強さを  $E$ 、電位を  $\phi$  とすれば、一般に

$$J/K = J \cdot \rho = E = -\Delta\phi \quad \dots\dots(1)$$

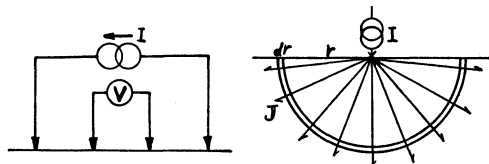


図-1 (a)

図-1 (b)

が成立つ。また、電荷密度を  $\sigma$ 、誘電率を  $\epsilon$  とすれば、一般に

$$\nabla \cdot E = -\nabla^2\phi = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \dots\dots(2)$$

である。(1)式の球座標表示は

$$J \cdot \rho = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}R + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\phi\right) \quad \dots\dots(3)$$

となる。ここに、 $R, \theta, \phi$  は、 $r, \theta, \varphi$  方向の単位ベクトルである。ところで、半導体試料上のプローブの場合、対称性から  $\phi$  は  $\varphi$  に無関係である上に、半導体の表面に定着電荷が存在しないので  $\theta$  にも無関係で、いわゆる

$$\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 \quad \dots\dots(4)$$

が成立し、(3)式は

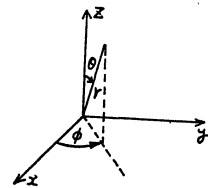


図-1 (c)

$$\mathbf{J} \cdot \rho = \mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{R} \quad \dots\dots(5)$$

となる。一方電流密度  $\mathbf{J}$  は  $r$  方向成分のみで、定電流  $I$  を半球の表面積  $2\pi r^2$  で割ったものであるから

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r^2} \mathbf{R} \quad \dots\dots(6)$$

(6)式を(5)式に代入して

$$\frac{\rho I}{2\pi r^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \dots\dots(7)$$

(7)式を積分して

$$\phi = \frac{\rho I}{2\pi r} + C \quad \dots\dots(8)$$

となる。無限遠点の電位を零とすれば

$$\phi = \frac{\rho I}{2\pi r} \quad \dots\dots(9)$$

が得られる。

2. 無限点初定電流源によって決まる電位

図2にしめされた正の電流源と負の電流源が間隔  $d$  をもって無限にならんでいる。ただ電流源間の間隔は  $a$  とする。また、 $p$  点と  $p$  点に対応する点には、定電流源が無いものとする。このとき、 $p$  点の電位は(9)式を用いて次のように求められる。すなわち  $\phi_p$

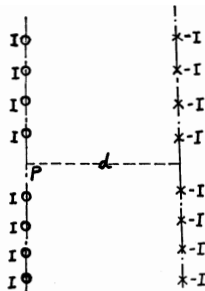


図-2

$$\phi_p = 2 \sum \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{na} + \frac{-1}{\sqrt{(na)^2 + d^2}} \right) \quad \dots\dots(10)$$

となる。ここで

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\rho I}{2\pi} \\ L &= \frac{d}{a} \\ M(L) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + L^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(11)$$

とおけば  $\phi_p$  は

$$\phi_p = \frac{q}{a} M(L) \quad \dots\dots(12)$$

図3は図2の組合せと考えることができる。格子間隔を  $a$  および  $b$  として、正電流源の格子と負電流源の格子は距離  $d$  にある。

$p$  点の電位は(9)および(12)式から

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{q}{d} - \frac{q}{a} M\left(\frac{d}{a}\right) - \frac{q}{b} M\left(\frac{d}{b}\right) \\ &\quad - 2 \frac{q}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ M\left(\frac{\sqrt{d^2 + (nb)^2}}{a}\right) - M\left(\frac{nb}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(13)$$

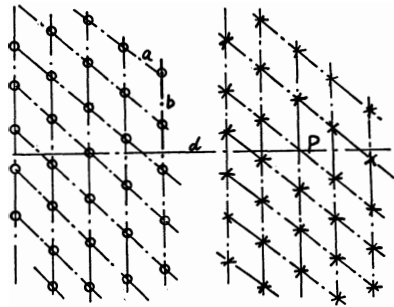


図-3

で、ここで

$$L = \frac{d}{a}$$

$$X = \frac{b}{a}$$

$$R_1(L) = \frac{1}{L} - M(L) - \frac{1}{X} M\left(\frac{L}{X}\right)$$

$$- 2 \sum [M(\sqrt{L^2 + n^2 X^2}) - M(nX)]$$

とすれば

$$\phi_p = \frac{p}{a} R_x(L) \quad \dots\dots(14)$$

となる。

3. 比抵抗

3.1. 無限形状をもつ試料の比抵抗

一般に厚み、幅、長さが有限の試料が使用されるので、それに関する比抵抗が計算されればよいわけであるが、それに先だって、無限に続いている半導体平面上に、電流を供給するのに、必要な正の定電流源と電流を吸収する負の定電流源が図4にしめされているように、 $l+m+n$  なる間隔で配置された場合について考えてみる。この

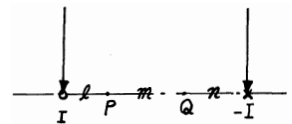


図-4

ときの  $p$  点の電位

は2つの定電流源によって決まり

$$\phi_p = \frac{\rho I}{2\pi(m+1)} + \frac{\rho(-I)}{2\pi n} \quad \dots\dots(15)$$

また、 $Q$  点の電位も同様にして

$$\phi_q = \frac{\rho I}{2\pi l} + \frac{\rho(-I)}{2\pi(m+n)} \quad \dots\dots(16)$$

となる。よって、電位差は両者の差であるから、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_q - \phi_p \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(17)$$

である。(17)式より比抵抗  $\rho$  は

$$\rho = \frac{2\pi\Delta\phi}{I} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} \right\}^{-1} \dots\dots(18)$$

となる。

1, m, nの大きさと電流 I, 電位差  $\Delta\phi$  が決まれば比抵抗  $\rho$  が(18)式から求まることになる。

仮りに  $1 = m = n = c$  とすれば

$$\rho = 2\pi c \cdot \frac{\Delta\phi}{I} \dots\dots(19)$$

である。

3・2. 半導体試料長の片方有限の比抵抗

比抵抗無限大の非導通性試料が半導体試料と境界面を接しているときは、図5のような影像ができる。P点およびQ点の電位はこれからすぐに

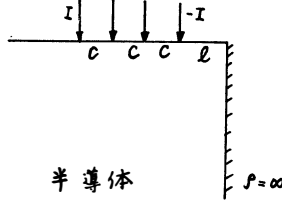


図-5

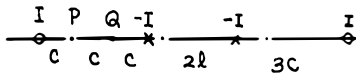


図-5

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{\rho I}{2\pi c} + \frac{\rho I}{2\pi(5c+2l)} + \frac{\rho(-I)}{2\pi \cdot 2c} \\ &+ \frac{\rho(-I)}{2\pi(2c+2l)} \\ \phi_q &= \frac{\rho I}{2\pi \cdot 2c} + \frac{\rho I}{2\pi(4c+2l)} + \frac{\rho(-I)}{2\pi c} \\ &+ \frac{\rho(-I)}{2\pi(c+2l)} \end{aligned}$$

が得られるので

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_p - \phi_q \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{5c+2l} + \frac{1}{c+2l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2c+2l} - \frac{1}{4c+2l} \right) \end{aligned}$$

よって、比抵抗  $\rho$  は

$$\rho = \frac{2\pi c \Delta\phi}{I} \left( 1 + \frac{1}{5 + 2\frac{l}{c}} + \frac{1}{1 + 2\frac{l}{c}} - \frac{1}{2 + 2\frac{l}{c}} - \frac{1}{4 + 2\frac{l}{c}} \right)^{-1}$$

ここで

$$\begin{aligned} C,D &= 1 + \frac{1}{5 + 2\frac{l}{c}} + \frac{1}{1 + 2\frac{l}{c}} \\ &\quad - \frac{1}{2 + 2\frac{l}{c}} - \frac{1}{4 + 2\frac{l}{c}} \end{aligned}$$

とおけば

$$\rho = \frac{2\pi c \cdot \Delta\phi}{I} / C,D \dots\dots(20)$$

となる。

3.3 半導体試料幅の片方有限の比抵抗

半導体試料表面上のプローブ列に並行、すなわち幅が片側で無限大の比抵抗をもつ試料と境界面を接する場合には図6のような影像ができる。これから、P点、Q点の電位はただちに

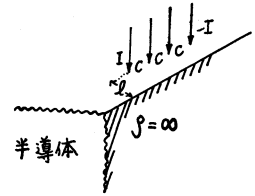


図-6

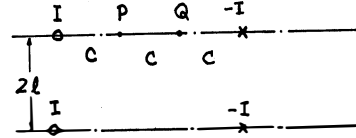


図-6

$$\begin{aligned} \phi_p &= \frac{\rho I}{2\pi c} + \frac{\rho I}{2\pi\sqrt{c^2+(2l)^2}} + \frac{\rho(-I)}{2\pi \cdot 2c} \\ &+ \frac{\rho(-I)}{2\pi\sqrt{(2c)^2+(2l)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_q &= \frac{\rho I}{2\pi \cdot 2c} + \frac{\rho I}{2\pi\sqrt{(2c)^2+(2l)^2}} \\ &+ \frac{\rho(-I)}{2\pi \cdot c} + \frac{\rho(-I)}{2\pi\sqrt{c^2+(2l)^2}} \end{aligned}$$

が得られる。よって電位差も

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_p - \phi_q \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c} + \frac{2}{\sqrt{c^2+(2l)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{(2c)^2+(2l)^2}} \right\} \end{aligned}$$

であり、比抵抗  $\rho$  は

$$\rho = \frac{2\pi c \cdot \Delta\phi}{I} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2l}{c}\right)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} \right)^{-1}$$

ここで

$$C,D = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2l}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{c}\right)^2}}$$

とおけば

$$\rho = \frac{2\pi c \cdot \Delta\phi}{I} / C,D \quad \dots\dots(21)$$

となる。

3・4. 半導体試料厚みが有限である場合の比抵抗  
半導体試料の厚みが有限である場合の影像是図7に

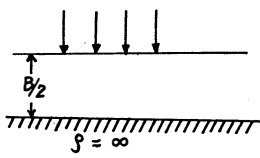


図-7

しめされたように影像点が無限に続く。これは半導体表面のプロープの反対側にある面による影像ができるからである。これと同様のことが図8にしめされたように、半導体幅が両側で無限大比抵抗の試料と境界を接している場合と同様の影像ができる。さて図7の影像ができるときのP点およびQ点における電位はごく簡単に

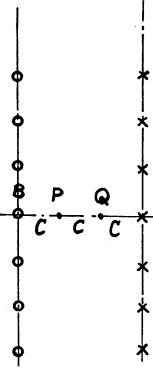


図-7

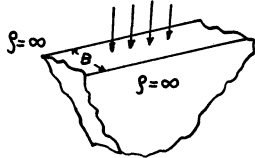


図-8

$$\begin{aligned} \phi_P &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2PI}{2\pi\sqrt{(nB)^2 + c^2}} + \frac{\rho I}{2\pi c} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho(-I)}{2\pi\sqrt{(nB)^2 + (2c)^2}} + \frac{\rho(-I)}{2\pi \cdot 2c} \\ \phi_Q &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho I}{2\pi\sqrt{(nB)^2 + (2c)^2}} + \frac{\rho I}{2\pi \cdot 2c} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho(-I)}{2\pi\sqrt{(nB)^2 + c^2}} + \frac{\rho(-I)}{2\pi c} \end{aligned}$$

が得られる。電位差はすぐに

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_P - \phi_Q \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{(nB)^2 + c^2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{(nB)^2 + (2c)^2}} \right\} \end{aligned}$$

となる。これから比抵抗は

$$\rho = \frac{2\pi c \cdot \Delta\phi}{I} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \left(\frac{nB}{c}\right)^2}} \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{nB}{c}\right)^2}} \right\}^{-1}$$

ここで

$$C,D = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \left(\frac{nB}{c}\right)^2}}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{nB}{c}\right)^2}}$$

とおけば

$$\rho = \frac{2\pi c \cdot \Delta\phi}{I} / C,D \quad \dots\dots(22)$$

となる。

### 3.5 直方体形半導体試料の比抵抗

半導体試料を実際に使用する場合、図9のように、幅、長さ、厚みが有限である場合がほとんどであるので、この場合の比抵抗がどうなるかにつき考察しておくことが必要である。この場合の影像是これまで考えてきた影像の表わ

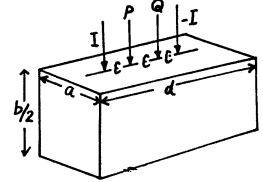


図-9

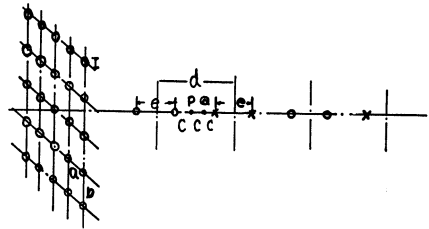


図-9

れ方のすべての組合せであるから、図9のようになり、P点およびQ点の電位はいずれも4つの項の無限数列からなるが、それぞれdなる距離で電流源の極性が変ることを考慮して  $\phi_P, \phi_Q$ は

$$\begin{aligned} \phi_P &= \frac{\rho}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ R_x \left( \frac{c+kd}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + R_x \left( \frac{c+e+kd}{a} \right) - R_x \left( \frac{2c+kd}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. - R_x \left( \frac{2c+e+kd}{a} \right) \right] \\ \phi_Q &= \frac{\rho}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ R_x \left( \frac{2c+kd}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. + R_x \left( \frac{2c+e+kd}{a} \right) - R_x \left( \frac{c+kd}{a} \right) \right] \end{aligned}$$

$$-R_x\left(\frac{c+e+kd}{a}\right)]$$

となる。電位差は

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_p - \phi_Q \\ &= \frac{2q}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ R_x\left(\frac{c+kd}{a}\right) \right. \\ &\quad + R_x\left(\frac{c+e+kd}{a}\right) - R_x\left(\frac{2c+kd}{a}\right) \\ &\quad \left. - R_x\left(\frac{2c+e+kd}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

である。これから比抵抗  $\rho$  は

$$\rho = \frac{2\pi c \cdot \Delta\phi}{I} / C.D \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここに

$$\begin{aligned} C.D &= \frac{2c}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ R_x\left(\frac{c+kd}{a}\right) \right. \\ &\quad + R_x\left(\frac{c+e+kd}{a}\right) - R_x\left(\frac{2c+kd}{a}\right) \\ &\quad \left. - R_x\left(\frac{2c+e+kd}{a}\right) \right] \quad \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

以上のように、(23)式からも明らかであるが四探針法から得られる、 $I$ 、 $\Delta\phi$  からすぐに  $\rho$  が得られるわけではなくて、これに(24)式なる補正をその半導体試料の形状、大きさに応じてほどこすことにより、はじめて正確な  $\rho$  が得られることがわかる。

3・6. 補正計算の結果例

3・5 までのことをまとめると、

$$\begin{aligned} M(L) &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{\sqrt{i^2 + L^2}} \right) \\ R_x(L) &= \frac{1}{L} - M(L) - \frac{1}{X} M(L/X) \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{\infty} [M_j \sqrt{L^2 + (jx)^2} - M(jx)] \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} C.D &= \frac{2c}{a} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [R_x(L_1) - R_x \times (L_2) \\ &\quad + R_x(L_3) - R_x \times (L_4)] \\ L_1 &= (c+kd)/a \\ L_2 &= (2c+kd)/a \\ L_3 &= (c+e+kd)/a \\ L_4 &= (2c+e+kd)/a \\ X &= b/a \end{aligned}$$

とすれば

$$\rho = \rho_0 / C.D$$

ただし、

$$\rho_0 = \frac{2\pi c \cdot 4\phi}{I}$$

ここで、 $C.D$ を計算するわけであるが、この無限数列で  $i$ 、 $j$ 、 $k$  は 0 および 1 から  $\infty$  までとるべきであ

る。しかし、計算には時間の制約があるので、同一形状値において、 $C.D$ がある一定値になる頃までとってやめることにする。

それにもとずき計算させた結果の1例を図10にしめ

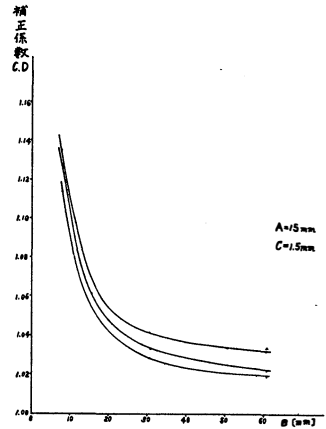


図-10

す。これから明らかな通り、 $B$ によりかなり大幅な  $C.D$  の変化がみとめられる。それに反して、 $D$  の変化はそれほど大きな変化を  $C.D$  に生じさせないことがわかる。以上の結果を実測された  $Ge$  単結晶の温度特性測定に適用したところよい一致が得られた。

4. 結 言

われわれが半導体試料を使って、各種の特性をしるにさいし、比抵抗が大きな役割をはたすことが少なくない。しかし、その比抵抗の測定が間違っていることは各種の特性に大きな間違いを生じさせる原因になるのでこの誤りは避けられねばならない。それには、半導体試料の形状によって、いかに比抵抗式が変形を受けるべきであるかをしるべきである。

本研究はそれらを明らかにしたものである。簡単に映像法を用いて、その補正計算式の誘導に成功した。この式にしたがって、各種の大きさの場合の補正計算表を作製しておけば便利である。

最後に本研究をすすめるにあたり、終始御指導いただいた本学、四谷平治教授に感謝すると同時に、プローブの作製にあたり御教指示された富山県立高岡工芸高等学校池上教諭、また補正計算にあたってお世話になった、本学計算センターの石黒氏にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Valdes. L. B ; Resistivity measurement on Germanium for Transistor. Proc. IRE. 42, 1954 PP. 420.
- 2) A. Uhlir ; The potentials of infinite systems of sources and numerical solutions of Problems in semiconductor B. S. T. J. Jan. 1955. PP. 105
- 3) M. A. Logan et al.: An AC Bridge for semicondu-

ctor resistivity measurement using a four- Point probe. B. S. T. J. May, 1961; pp. 885

- 4) F. M. Smits ; Measurement of sheet resistivities with the four point probe B. S. T.J. May. vol. 37. 1958. PP. 771
- 5) 八木, 亀田, 田中 ; 直方体状半導体の四探針法比抵抗測定に関する補正  
(昭和42年 電気4学会北陸支部連合大会)  
(昭和 42. 11. 30 受付)