水槽における不静定力講成論

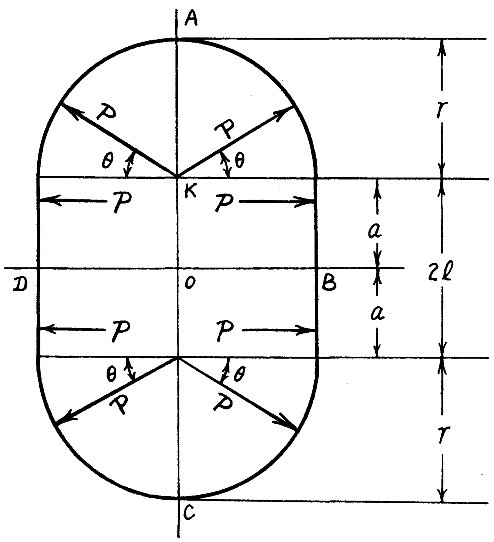
長　元　亀　久　男

A Constitution Theory on the Indeterminate Forces in a Tank

Kikuo　NAGAMOTO

A constitution theory on the indeterminate forces in a tank is described in this paper.

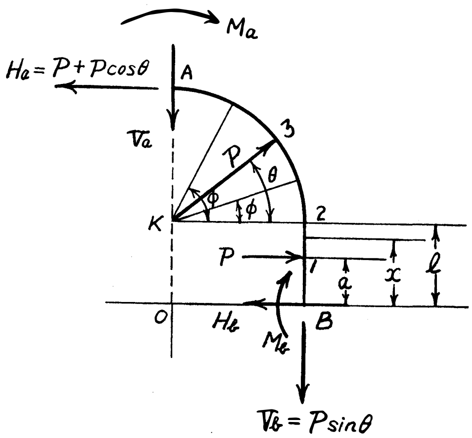
図—1に示すような直線部が2ℓで半径rなる円弧の薄板にて囲まれた水槽が内圧を受けた場合につき不静定力の構成について考えるものとする。このために直線部と円弧部にそれぞれ1箇の集中荷重がOA，OB軸に対称に作用している場合を基本にとり考えることにする。



図—1

水槽における仮想断面A，Bについて考えるに図—2のようにそれぞれ V_a, H_a, M_a, V_b, H_b, M_b なる断面力が作用していると考えられるが対称の条件から，$V_a=0$，$H_b=0$ でなければならない。

図—2にてB1, 12, 23, 3A間における曲げモーメントをM_1, M_2, M_3, M_4 とすれば次のように求め得られる。



図—2

B〜1　$M_1=M_b$………(1)　$0\leqq x\leqq a$

1〜2　$M_2=M_b-P(x-a)$………………(2)　$a\leqq x\leqq \ell$

2〜3　$M_3=M_b+P\sin\theta r(1-\cos\phi)$
$-P[\ell-a)+r\sin\phi]$…………(3)
$0\leqq\phi\leqq\theta$

3〜A　$M_4=M_b+P\sin\theta r(1-\cos\phi)$
$-P[(\ell-a)+r\sin\phi]$
$-[Pr\sin\phi\cos\theta-Pr\cos\phi\sin\theta]$
……(4)　$\phi\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

曲げモーメントMによる歪エネルギーUはEをヤング係数，Iを断面の2次モーメント，Sを軸線にそった長さとして次のように求め得られている。

$$U=\frac{1}{2EI}\int M^2 ds \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

不静定モーメント M_b としてカスチリアノ定理は次

のように記述し得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial M_b}=\frac{1}{2EI}\int M\frac{\partial M}{\partial M_b}ds=0 \cdots(6)$$

または $$\int M\frac{\partial M}{\partial M_b}ds=0 \cdots\cdots(7)$$

B～1 $$\frac{\partial M_1}{\partial M_b}=1 \cdots\cdots(8) \quad ds=dx$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial M_b}=\int_0^a M_b dx=0 \cdots\cdots(9)$$

1～2 $$\frac{\partial M_2}{\partial M_b}=1 \cdots\cdots(10) \quad ds=dx$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial M_b}=\int_a^l M_b dx-\left\{P\int_a^l xdx-Pa\times\int_a^l dx\right\}=0 \cdots\cdots(11)$$

2～3 $$\frac{\partial M_3}{\partial M_b}=1 \cdots\cdots(12) \quad ds=rd\phi$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial M_b}=M_b\int_0^\theta rd\phi+\int_0^\theta Pr\sin\theta r(1-\cos\phi)rd\phi-\int_0^\theta P[(\ell-a)+r\sin\phi]r\times d\phi=0 \cdots\cdots(13)$$

3～A $$\frac{\partial M_4}{\partial M_b}=1 \cdots\cdots(14)$$

$$\frac{\partial U_4}{\partial M_b}=M_b\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} rd\phi+\int_\theta^{\frac{\pi}{2}} P\sin\theta(1-\cos\theta)rd\phi-\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}P[(\ell-a)+r\sin\phi]\times rd\phi-\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}[Pr\sin\phi\cos\theta-Pr\cos\phi\sin\theta]\times rd\phi=0 \cdots\cdots(15)$$

(9)+(11)+(13)+(15)＝0

$$\int_0^l M_b dx-P\int_a^l xdx+Pa\int_a^l dx+M_b\int_0^{\frac{\pi}{2}}rd\phi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}P\sin\theta r(1-\cos\phi)rd\phi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}P[(\ell-a)+r\sin\phi]rd\phi-\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}Pr^2\sin\phi\cos\theta d\phi+\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}Pr^2\times\cos\phi\sin\theta d\phi=0$$

$$M_b\ell-\frac{P\ell^2}{2}+\frac{Pa^2}{2}+P\ell a-Pa^2+M_b\frac{r\pi}{2}+\frac{\pi}{2}Pr^2\sin\theta-Pr^2\sin\theta-\left[Pr\ell\frac{\pi}{2}-Pra\frac{\pi}{2}+Pr^2\right]-[Pr^2\cos^2\theta-Pr^2\sin\theta+Pr^2\sin^2\theta]=0$$

$$M_b\left(\ell+\frac{r\pi}{2}\right)=\frac{P\ell^2}{2}-\frac{Pa^2}{2}-P\ell a+Pa^2-\frac{\pi P}{2}r^2\sin\theta+Pr^2\sin\theta+\left[Pr\ell\frac{\pi}{2}-Pra\frac{\pi}{2}+Pr^2\right]+[Pr^2\cos^2\theta-Pr^2\sin\theta+Pr^2\sin^2\theta]$$

$$M_b=\frac{1}{\ell+\frac{r\pi}{2}}\left[\frac{P\ell^2}{2}-\frac{Pa^2}{2}-P\ell a+Pa^2-\frac{\pi P}{2}r^2\sin\theta+Pr^2\sin\theta+Pr\ell\frac{\pi}{2}-Pra\frac{\pi}{2}+Pr^2+Pr^2\cos^2\theta-Pr^2\sin\theta+Pr^2\sin^2\theta\right]\cdots\cdots(16)$$

等内圧を受ける場合水槽の高さを単位長さにとり，単位面積における圧力をpとすればPの代りに直線部分については pda 円弧部分については $prd\theta$ とおいて重ね合わせればこの場合の不静定モーメント $\mathfrak{M}_b$ は次のように求め得られる。

$$\mathfrak{M}_b=\frac{1}{\ell+\frac{r\pi}{2}}\left[\int_0^l\frac{p\ell^2}{2}da-\int_0^l\frac{pa^2}{2}da-\int_0^l p\ell a da+\int_0^l pa^2da-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}pr^3\sin\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}pr^3\sin\theta d\theta+\int_0^l pr\ell\frac{\pi}{2}da-\int_0^l pra\frac{\pi}{2}da+\int_0^l pr^2da+\int_0^{\frac{\pi}{2}}pr^3\cos^2\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}pr^3\sin\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}pr^3\sin^2\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{1}{\ell+\frac{r\pi}{2}}\left[\frac{p\ell^3}{6}-\frac{\pi}{2}pr^3+pr^3+\frac{pr\ell^2\pi}{4}+pr^2\ell-pr^3+\frac{pr^3\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\ell+\frac{r\pi}{2}}\left[\frac{p\ell^3}{6}+\frac{pr\ell^2\pi}{4}+pr^2\ell\right]\cdots\cdots(17)$$

M_a については円弧中心Kについてのモーメントを0とおいて求め得られる。

$$M_a+M_b-P(\ell-a)+P\sin\theta r-(P+P\cos\theta)r=0$$

$$M_a=-M_b+P(\ell-a)-P\sin\theta r+(P+P\cos\theta)r\cdots\cdots(18)$$

しからば等内圧を受ける場合の $\mathfrak{M}_a$ については(17)の場合と同様にして次のように求め得られる。

$$\mathfrak{M}_a=-\mathfrak{M}_b+p\ell\int_0^l da-p\int_0^l ada-pr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta+pr\int_0^l da+pr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$=-\mathfrak{M}_b+\frac{p\ell^2}{2}+pr\ell \cdots\cdots(19)$$

本稿は化学工学協会徳山大会（昭 40-11-5）における講演の要旨である。

参　照　文　献：鷹部屋福平．不静定応力理論とその応用，アルス（昭18）

長元亀久男．薄肉管の問題についての一考察，化学工学北陸大会前刷（昭38-10-1）

（昭和40.10.30受付）