キングポストトラスにおける不静定力構成について

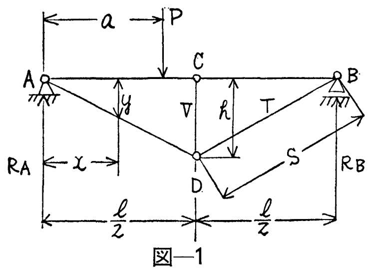
長　元　亀　久　男

Constitution Theory Of An Indeterminate Force On A King post Truss.

Kikuo NAGAMOTO

This paper explained that an indeterminate force of a kingpost truss with general loading is superposed by its force regard as one concentrated load.

図—1に示すようなキングポストトラスにおいて種々の荷重状態における不静定力を求めるために，その基本としてPなる1個の集中荷重が図—1に示すような位置に作用する場合について考えることにする。いま，はりAD，DBのヤング係数E_1，断面積A_1，断面力T，キングポストCDのヤング係数E_2，断面積A_2，断面力Vとする。Tの水平分力Xを不静定力にとる。Sをつなぎ材，及び支柱にX＝1によって生ずる応力とする。sをつなぎ材の長さ，hをキングポストの長さ，ρ＝材の長さ/EA，ℓをスパン，荷重によるモーメントをMo とすれば，図—1を参照して不静定力は次の式で求め得られる。[1] 但しABのヤング係数E，断面積A，断面2次モーメント1とする。



図—1

$$X=\frac{\int_0^{\ell}\frac{Mo}{EI}y\,dx}{\int_0^{\ell}\frac{y^2}{EI}dx+\frac{\ell}{EA}+\Sigma S^2\rho} \tag{1}$$

yは次の式で与えられるものとする。

$$y=\frac{2h}{\ell}x \tag{2}$$

(1)式の分母について計算すれば次のようになる。

$$\int_0^{\ell}y^2dx=2\left(\frac{2h}{\ell}\right)^2\int_0^{\frac{\ell}{2}}x^2dx=\frac{h^2\ell}{3} \tag{3}$$

X＝1によるT，Vは次のように求め得られる。

$$T=+1\frac{2s}{\ell}\qquad V=-1\frac{4h}{\ell} \tag{4}$$

$$\Sigma S^2\rho=2\left(\frac{2s}{\ell}\right)\frac{s}{E_1A_1}+\left(\frac{4h}{\ell}\right)^2\frac{h}{E_2A_2}$$

$$=\frac{8s^3}{E_1A_1\ell}+\frac{16h^6}{E_2A_2\ell} \tag{5}$$

然らば(1)の分母は次のようになる。

$$\ell\left[\frac{h^2}{3EI}+\frac{1}{EA}+\frac{8}{E_1A_1}\left(\frac{s}{\ell}\right)^3+\frac{16}{E_2A_2}\left(\frac{h}{\ell}\right)^3\right] \tag{6}$$

図—1を参照し，図のように1個の集中荷重力が作用する場合のモーメントは次のように求め得られる。

$$Mo=\frac{P(\ell-a)}{\ell}x\qquad 0\leqq x\leqq a \tag{7}$$

$$Mo=\frac{Pa}{\ell}(\ell-x)\qquad a\leqq x\leqq \ell \tag{8}$$

(1)式の分子を計算すれば次のように求め得られる。

$$\int_0^{1}Moydx=\frac{P(\ell-a)}{\ell}\frac{2h}{\ell}\int_0^{\alpha}x^2ax+\frac{Pa}{\ell}\frac{2h}{\ell}$$

$$\times\int_a^{\frac{\ell}{2}}(\ell-x)xdx+\frac{Pa}{\ell}\frac{2h}{\ell}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}(\ell-x)^2dx$$

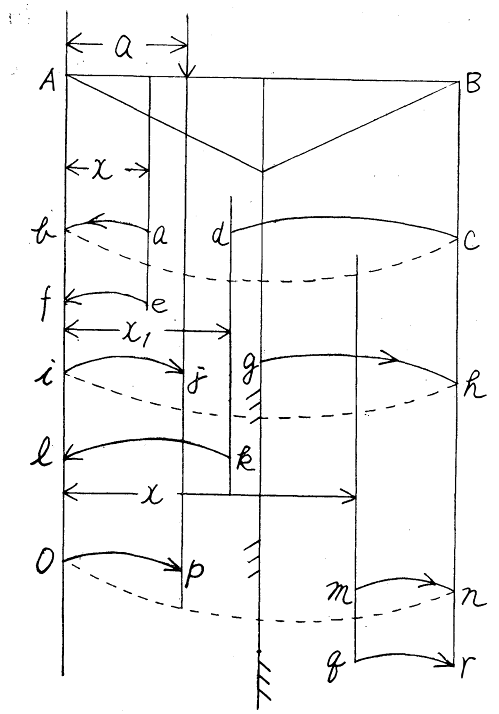
$$=\frac{Ph\ell a}{4}-\frac{Pha^3}{31}=\frac{Ph\ell^2}{3}\frac{a}{\ell}\left(\frac{3}{4}-\frac{a^2}{\ell^2}\right) \tag{9}$$

この場合の不静定力は(1)式に代入し次のように求め得られる。

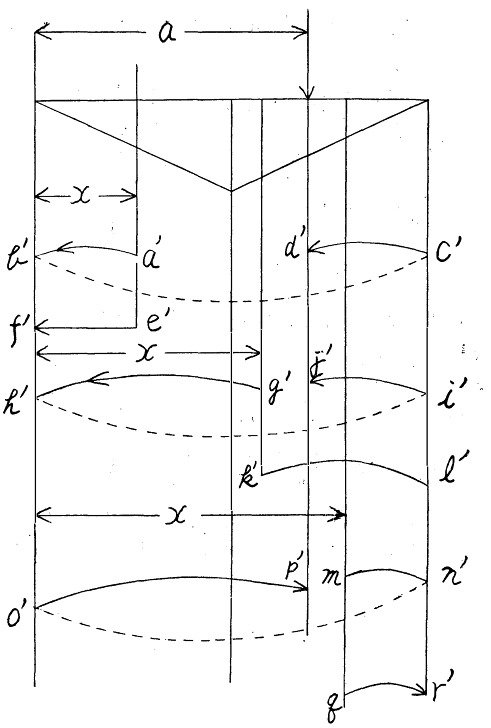
$$X=\frac{\frac{Ph\ell}{3EI}\frac{a}{\ell}\left(\frac{3}{4}-\frac{a^2}{\ell^2}\right)}{\frac{h^2}{3EI}+\frac{1}{EA}+\frac{8}{E_1A_1}\left(\frac{8}{\ell}\right)^2+\frac{16}{E_2A_2}\left(\frac{h}{\ell}\right)^2} \tag{10}$$

さて，図—1に示すように集中荷重Pが0～$\frac{\ell}{2}$までの間にある場合の Moy は次のような関係から成立っている。[2]

Moyについて考えるに(9)式により3段階から成立っていることがわかる。すなわちxがaより小さいとき，xがaを越して$\frac{\ell}{2}$より小さい場合，xが$\frac{\ell}{2}$を越し



図—2



図—3

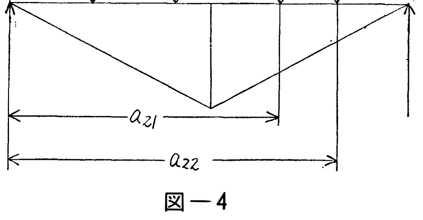
た場合とである。これらの関係を図で示せば図—2のようになる。

この図において実線は掛け合わさるべき長さを示し，点線は除する長さを示すものとする。a が図のような位置にあるとして x が a より小さい場合には，P に ab の長さ，cd の長さを掛けて，bc の長さで割りそれに $2h/\ell$ と ef の長さを掛けたものを掛け合せたものである。x が a を越えて $\frac{\ell}{2}$ より小さい場合は P に gh の長さに ij の長さを掛けたものを掛け合し ih の長さで割り，$2h/\ell$ と $k\ell$ の長さを掛けあわしたものである。x が $\frac{\ell}{2}$ を越えた場合には P に mn の長さに op の長さを掛けて no の長さで割り，それに $2h/\ell$ と qr の長さを掛けたものを掛けあわしたものである。a が $\frac{\ell}{2}$ から ℓ までの間にある場合の Moy は x が a より小さく $\frac{\ell}{2}$ よりも小さい場合，x が a より小さく $\frac{\ell}{2}$ より大きい場合，x が a を越す場合があり 図—3のような関係が成立っている。

図—3の関係を見れば図—2を裏返しにしたものであることが判る。すなわち，a が $\frac{\ell}{2}$ から ℓ の間にある場合は $\int_0^\ell Moydx$ を考えるとき(9)式の a の代わりに $(\ell-a)$ を代入すればよい。

然らば全経過にわたって集中荷重をもつキングポストトラスの $\int_0^\ell Moydx$ を考える場合には集中荷重群を $0 \sim \frac{\ell}{2}$ の間にある荷重群 P_1i $(i=1, 2, 3 \cdots\cdots n)$ と $\frac{\ell}{2}$ から ℓ の間にある荷重群 P_2i $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots k)$ に分けて考えればよいわけで，この場合の(9)式は次のように記すことができる。

$$\int_0^{\ell} Moydx = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{P_1ih\ell a_1i}{4} - \frac{P_1iha_1{}^3}{3\ell}\right] + \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{P_2ih\ell(\ell-a_2i)}{4} - \frac{P_2ih\,(\ell-a_2i)^3}{3\ell}\right] \qquad (11)$$



図—4

この場合の不静定力は(1)に代入して次のように求め得られる。

$$X=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{EI}\left[\frac{P_1ih\ell a_1i}{4}-\frac{P_1iha_1i^3}{3\ell}\right]+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{EI}\times\left[\frac{P_2ih\ell(\ell-a_1i)}{4}-\frac{P_2ih(\ell-a_2i)^3}{3\ell}\right]}{\frac{h^3}{3EI}+\frac{1}{EA}+\frac{8}{E_1A_1}\left(\frac{8}{\ell}\right)^2+\frac{16}{E_2A_2}\left(\frac{h}{\ell}\right)^3} \tag{12}$$

いまpなる等分布荷重が全径間にある場合の

$\int_o^1 Moydx$ は荷重を $0\sim\frac{\ell}{2}$ の1群と $\frac{\ell}{2}\sim\ell$ までの一群に分かち次のように計算することができる。

$$\int_o^{\ell} Moydx=\int_o^{\frac{\ell}{2}}\frac{phla}{4}da-\int_o^{\frac{\ell}{2}}\frac{pha^3}{3\ell}da$$

$$+\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\frac{ph\ell(\ell-a)}{4}da+\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\frac{ph(\ell-a)^3}{3\ell}da=\frac{6ph\ell^3}{192}$$

$$-\frac{ph\ell^3}{192}+\frac{6ph\ell^3}{192}-\frac{ph\ell^3}{192}=\frac{5ph\ell^3}{96} \tag{13}$$

この場合の不静定力は(1)式に代入とて次のように求め得られる。

$$X=\frac{\frac{5ph\ell^2}{96EI}}{\frac{h}{3EI}+\frac{1}{EA}+\frac{8}{E_1A_1}\left(\frac{s}{\ell}\right)^2+\frac{16}{E_2A_2}\left(\frac{h}{\ell}\right)^3} \tag{14}$$

参　照　文　献

(1)　福田武雄　構造力学　河出書房（昭和19年）

(2)　長元亀久男　梁における撓及び傾斜の数学的構造論　日本機械学会論集第5巻22号（昭和15年2月）

（昭和39.10.27受付）