少数アナコン線形演算器によるむだ時間要素について

四谷平治
松田秀雄

On the Dead Time Constituents Using a Few Linear Amplifiers of the Analog Computer.

Heizi YOTUYA
Hideo MATUDA

If the automatic control system including the dead time is stable, we may consider that angular frequency component of the system keeps within the limit of π (rad/sec) at the most, for the normalized dead time. We report the study of the approximate transfer function of the dead time to be constructed with four linear amplifiers on the analog computer within such frequency range.

1. 緒　　言

むだ時間の近似伝達関数はむだ時間を τ として

$$F(p)=e^{-\tau p} \quad \cdots\cdots(1)$$

で表わされる。これを有理関数に近似してアナコム線形演算要素により表わす場合，これに割当てることのできる演算器の数は解析すべき系の他の要素の表現に必要なためおのずから制約される。ここでは演算器4個を使って表わされる(2)式の全周波通過帯域特性を持つ近似式で(1)式を近似して，もっともよい近似度

$$F_{d2}(p)=(\tau^2p^2-a\tau p+2a)/(\tau^2p^2+a\tau p+2a) \quad \cdots(2)$$

を与えるaを求め，これを低次近似伝達関数とし，誤差および自動制御系における適用範囲を即に知られている padé 近似，Taylor 展開より得られる Taylor 近似と比較検討する。[1]

(1)式に於て，実時間を t，アナコン演算時間をTとすれば時間換算係数を $1/\alpha$ とおいて $1/\alpha \cdot t=T$ より

$$p=\frac{d}{dt}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d}{dT}=\frac{1}{\alpha}q \quad ただし\ q=\frac{d}{dT}$$

これを(1)へ代入して

$$F(q)=e^{-\tau/\alpha\cdot q}$$

ここで $\tau/\alpha\cdot q=s$ とおいてむだ時間を単位化すれば

$$F(s)=e^{-s} \quad \cdots\cdots(1)'$$

となる。同様に(2)式もsで表わす。

$$F_{d2}(s)=(s^2-as+2a)/(s^2+as+2a) \quad \cdots\cdots(2)'$$

(1)′，(2)′ のように単位化されたむだ時間について，以下論を進める。

2. むだ時間を含む制御系の周波数範囲

自動制御系にむだ時間が存在すれば，高い周波数成分が含まれない。系が安定であるという仮定のもとでは周波数範囲を求めることができる。実際には，不安定な系を考えることは余り意味をなさないので，安定な系に含まれる周波数成分を考え，この周波数範囲で(2)′式の近似伝達関数がもっともよい近似度を与えるaの値を求める。

今図—1の系で伝達関数G(s)を

$$G(s)=k/(1+Ts) \quad \cdots\cdots(3)$$

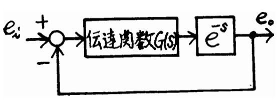
とすれば，この系の一巡伝達関数 $F_{d1}(s)$ は

$$F_{d1}(s)=\frac{k}{1+Ts}e^{-s}=\frac{k}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}\angle-(\tan^{-1}\omega T+\omega) \quad \cdots\cdots(4)$$

となる。これより

$$\tan^{-1}\omega T+\omega=\pi \quad \cdots\cdots(5)$$

を満足する ω はこの系の安定限界角周波数である。こ



図—1　むだ時間を含む自動制御系

れを ω_{d_1} で表わす。(5)式より時定数が

$$T\to 0\ で\qquad \omega_{d_1}\to\pi$$

$$T\to\infty で\qquad \omega_{d_1}\to\frac{\pi}{2}$$

となるので，図―1の系で G(s) が(3)式で表わされる場合，この系が安定であると周波数成分はせいぜい π までしか含まれないと考えることができる。（図―4の e^{-S}曲線）

次に図―1の系の G(s) を

$$G(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}\cdots\cdots(6)$$

とすると一巡伝達関数 $F_{d_2}(s)$ は

$$F_{d_2}(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}e^{-S}=\frac{k}{\omega\sqrt{1+(\omega T)^2}}\angle-\left(\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\omega T+\omega\right)\cdots\cdots(7)$$

であるから，この時の安定限界角周波数 ω_{d_2} は

$$\tan^{-1}\omega_{d_2}T+\omega_{d_2}=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots(8)$$

より求まる。したがって

$$T\to 0\ で\qquad \omega_{d_2}\to\frac{\pi}{2}$$

$$T\to\infty で\qquad \omega_{d_2}\to 0$$

と考えられる。図―1の系で G(s) が(6)式で表わされる場合，この系が安定であると周波数成分はせいぜい $\frac{\pi}{2}$ までしか含まれないと見なすことができる。（図―5の e^{-S} 曲線）

伝達関数 G(s) が更に多くの遅れ要素を含めば，ますます系の応答は遅くなる。実際には伝達関数 G(s) に位相進みなどの補償回路が入る。しかし結局のところむだ時間があれば閉ループ特性はそう高い周波数成分を含まないと思われる。

以上より結論して，自動制御系に含まれるむだ時間の近似伝達関数としては，ω が0からせいぜい π 迄特性のよいものであれば充分である。

3. 近似伝達関数の a の決定

むだ時間近似伝達関数 (2)′ 式が $0<\omega\leqq\pi$ で誤差がもっとも小さくなるような a を決定するに先立ち，padé 2次近似伝達関数，Taylor 2次近似伝達関数を掲げておこう。

padé の展開式によって e^{-S} を展開すると

$$e^{-S}=\lim_{(u+v)\to\infty}\frac{F_{u\cdot v}(s)}{G_{u\cdot v}(s)}$$

ここで

$$F_{u\cdot v}(s)=1-\frac{vs}{(u+v)\cdot 1!}+\frac{v(v-1)s^2}{(u+v)(u+v-1)\cdot 2!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^v v(v-1)\cdots\cdots 2\cdot 1s^v}{(u+v)(u+v-1)\cdots(u+1)\cdot v!}$$

$$G_{u,v}(s)=1+\frac{us}{(v+u)\cdot 1!}+\frac{u(u-1)s^2}{(v+u)(v+u-1)\cdot 2!}+\frac{u(u-1)\cdots\cdots 2\cdot 1s^u}{(v+u)(v+u-1)\cdots(v+1)\cdot u!}$$

上式で u=v=2 とおけばpadé 2次近似伝達関数 $F_{P_2}(S)$ が得られる。(2)(3)

$$F_{P_2}(s)=\frac{s^2-6s+12}{s^2+6s+12}\cdots\cdots(9)$$

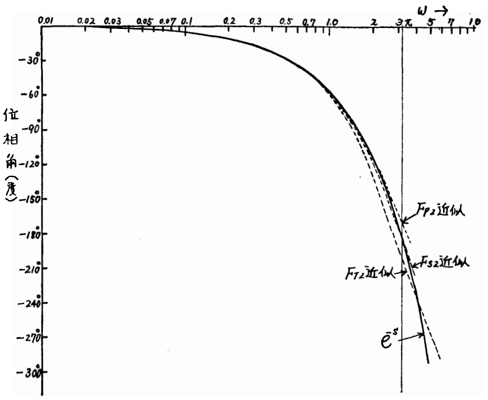
又 e^{-S} を次式の如く Taylor 展開して

$$e^{-S}=\frac{e^{-S/2}}{e^{S/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{2}s)+(\frac{1}{2}s)^2/_2!+\cdots+(-\frac{1}{2}s)^n/n!}{1+(\frac{1}{2}s)+(\frac{1}{2}s)^2/_2!+\cdots+(\frac{1}{2}s)^n/n!}$$

ここで n=2 として次式の Taylor 2次近似伝達関数が得られる。(4)(5)

$$F_{T_2}(s)=\frac{s^2-4s+8}{s^2+4s+8}\cdots\cdots(10)$$

(2)′式における a を a=6 とすれば Padé 2次近似に a=4 とすれば Taylor 2次近似に一致することに注意する。e^{-S} の特性，$F_{P_2}(s)$ の特性および $F_{T_2}(s)$ の特性曲線を図―2に示す。



図―2 近似伝達関数の位相特性

(2)′ の位相特性は $a<6$ で e^{-S} の特性と弓形に交わる。$\omega=\pi$ 迄近似度を上げるには弓形に交わる特性の方がよい。

近似伝達関数 $F_{d_2}(s)$ の位相特性を表わす式は

$$\angle F_{d_2}(s)=-2\tan^{-1}\frac{a\omega}{2a-\omega^2}\cdots\cdots(11)$$

である。e^{-S} の位相 $\angle e^{-S}=-\omega$ であるから，$\angle F_{d_2}(s)$ の誤差 ε は

$$\varepsilon=\omega-2\tan^{-1}\frac{a\omega}{2a-\omega^2}\cdots\cdots(12)$$

上式が極値を取る ω を求めると

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega}=1-2\frac{a(2a+\omega^2)}{(2a-\omega^2)^2+a^2\omega^2}=0$$

より

$$\omega=\sqrt{6a-a^2}\cdots\cdots(13)$$

となる。

今求めるaの目安の一つとして $\omega=\pi$ で誤差 $\varepsilon=0$ となるaを算出すると(12)式より $a=\pi^2/2\fallingdotseq 4.925$ を得る。この時，弓形部分の誤差の最大は同じく(1)式より求まり $\varepsilon=4.53°$ である。いかに $\omega=\pi$ の誤差が小さくても途中の誤差が大きければよい近似伝達関数とはいえぬ。

そこで $\omega=\pi$ の誤差と弓形の部分の誤差の極値とが等しくなるようなaの値を取る近似伝達関数を求める。(12)式と(13)式より

$$\sqrt{6a-a^2}-2\tan^{-1}\frac{\sqrt{6a-a^2}}{a-4}=\pi-2\tan^{-1}\frac{a\pi}{2a-\pi^2}$$

これを解いて $a\fallingdotseq 5.121$ と求まる。これの誤差 $\varepsilon=2.75°$ である。

以上より，近似度および取扱の点より $a=5$ とするのが最も妥当と思われる。この近似伝達関数を $F_{S2}(s)$ で表わす。

$$F_{S2}(s)=\frac{s^2-5s+10}{s_2+5s+10}\cdots\cdots(14)$$

これの位相特性も図—2に示す。

4. 安定限界角周波数での誤差

各近似伝達関数 $F_{P2}(s)$，$F_{T2}(s)$，$F_{S2}(s)$ の誤差率 =(近似伝達関数の位相$-\angle e^{-S}$)$/\angle e^{-S}\times 100$〔%〕として図—3に示す。図—2，図—3より $F_{T2}(s)$ 近似が他の二つの近似より劣り，実用的に誤差が大き過ぎる。したがって，$F_{P2}(s)$ 近似と $F_{S2}(s)$ 近似の二つについて，これらが自動制御系に組込まれた場合，即ち図—1の系で e^{-S} の代りに用いたときの誤差を調べる。この場合も安定限界角周波数に注目する。

図—1の系でG(s)が(3)式で与えられれば，$F_{P2}(s)$，$F_{S2}(s)$近似を用いた場合の安定限界角周波数 ω_{p1}，ω_{s1} はそれぞれ(4)式(5)式にならって，次式で表わされる。

$$\tan^{-1}\omega_{p1}T+2\tan^{-1}\frac{6\omega_{p1}}{12-(\omega_{p1})^2}=\pi \cdots\cdots(15)$$

$$\tan^{-1}\omega_{s1}T+2\tan^{-1}\frac{5\omega_{s2}}{10-(\omega_{s1})^2}=\pi \cdots\cdots(16)$$

時定数Tを0から∞までかえて ω_{p1}，ω_{s1} を求めた結果が図—4である。この図には $F_{P2}(s)$，$F_{S2}(s)$ の安定限界角周波数の誤差率

$e_{p1}=(\omega_{p1}-\omega_{d1})/\omega_{d1}\times 100$〔%〕,

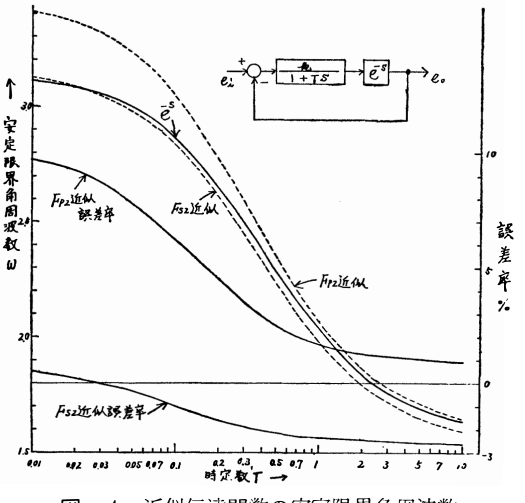
$e_{s1}=(\omega_{s1}-\omega_{d}{}^{1})/\omega_{d1}\times 100$〔%〕も示してある。

次に G(s) として(6)式を用いれば，$F_{P2}(s)$ 近似，F_{S2} 近似の各安定限界角周波数 ω_{p2}，ω_{s2} は同様にして次式で表わされる。

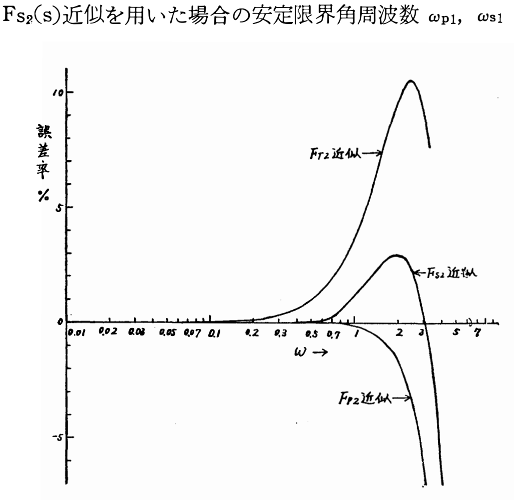
$$\tan^{-1}\omega_{p2}T+2\tan^{-1}\frac{6\omega_{p2}}{12-(\omega_{p2})^2}=\frac{\pi}{2} \cdots\cdots(17)$$

$$\tan^{-1}\omega_{s2}T+2\tan^{-1}\frac{5\omega_{s2}}{10-(\omega_{s2})^2}=\frac{\pi}{2} \cdots\cdots(18)$$

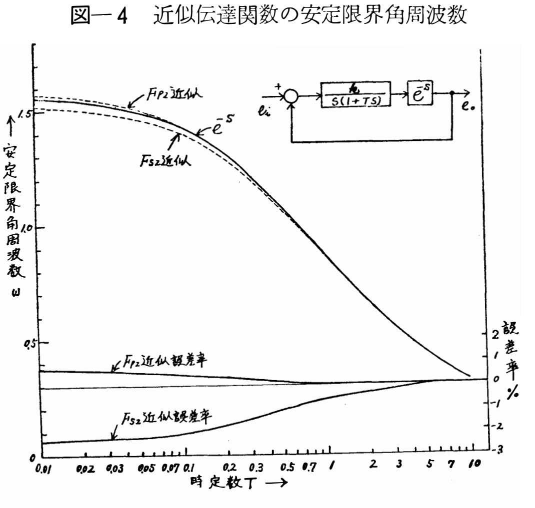
時定数Tを0から∞までかえて ω_{p2}，ω_{s2} の変化の様



図—4　近似伝達関数の安定限界角周波数



図—3　近似伝達関数の誤差



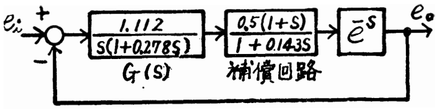
図—5　近似伝達関数の安定限界角周波数

子を見れば図―5が得られる。上記と同様に各近似の安定限界角周波数の誤差率 $e_{p2}=(\omega_{p2}-\omega_{d2})/\omega_{d2}$, e_{s2} $\omega_{s2}-\omega_{d2})/\omega_{d2}$ も同図に示す。

なお，図―4，図―5の e^{-s} 曲線は(5)式および(8)式を満足する ω_{d1}, ω_{d2} であることはいうまでもない。図―4，図―5より G(s) が $\frac{k}{1+Ts}$ の場合は $F_{S2}(s)$ 近似を用いた方がよく，$G(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}$ の場合には $F_{P2}(s)$を使った方がよいといえる。

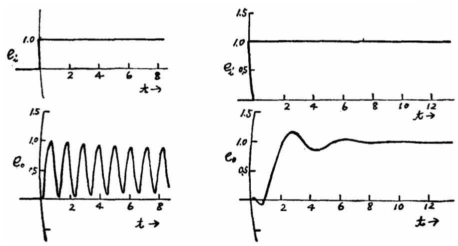
5. 応　用　例

1例として，図―6の系をむだ時間 e^{-s} の代りに上記の近似伝達関数を用いてアナコン解析した結果を示



図―6　むだ時間を含む自動制御系の1例

す。図―7(a) は補償回路がない場合の過渡応答で，このままでは安定度が悪く補償回路を附加する。図―7(b) は $F_{P2}(s)$ 近似を用いた場合の過渡応答である。



(a) 補償回路なし　　(b) 補償回路あり ($F_{P2}(S)$近似)

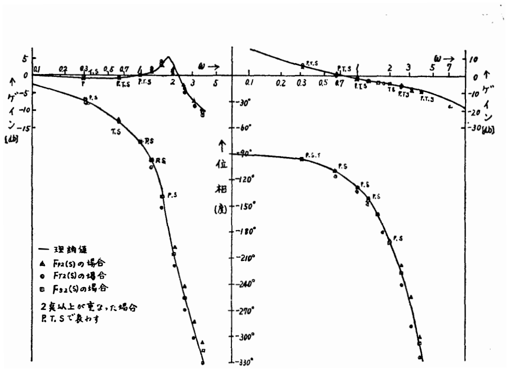
図―7　図―6の系の過渡応答

しかし過渡応答からは $F_{S2}(s)$ 近似を用いても又 $F_{T2}(s)$ 近似を用いても大差は見られないので，各近似伝達関数を用いた場合のゲイン，位相特性を調べる。図―8がこれである。勿論これらの図上の各点は，近似伝達関数の誤差以外にアナコンの誤差，計算誤差などを含んでいるが，一応これ等を無視して検討すると，

(1) $\omega<1$ rad の低周波域では各近似ともだいたい一致する。

(2) $\omega>1$ rad になると $F_{T2}(s)$ 近似がゲイン，位相共に理論値と異って来る。ゲインは $\omega=1.8$ rad 位でやや大きめに，$\omega>1.5$ rad では小さめになる。一方位相は理論値より遅れ位相となる。

(3) $F_{P2}(s)$近似のゲインは ω の高いところ迄かなり正確であるが，位相特性が $\omega=2.5$ rad位からやや理論値より進み位相になる。



(a) 閉ループ特性　　(b) オープンループ特性

図―8　図―6の系の周波数特性

(4) $F_{S2}(s)$ 近似はゲイン，位相ともに $F_{P2}(S)$ 近似と $F_{T2}(s)$近似の中間を取るので，図に示した周波数範囲全般で理論値にほぼ一致している。

6. 結　　言

(1) 図―1のむだ時間を含む系では，$G(s)=\frac{k}{1+Ts}$の場合の安定限界角周波数 ω_{d1} は $\pi/2\leq\omega_{d1}\leq\pi$ であり $G(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}$ の場合の安定限界角周波数 ω_{d2} は $0\leq\omega_{d2}\leq\pi/2$ の範囲にある。

(2) 更に遅れ要素の数がふえれば安定限界角周波数 ω_d は小さくなる。しかし実際には位相進み補償を行うので ω_dはやや大きくなる。このことを考慮しても，むだ時間を含む系が安定であれば，むだ時間の近似伝達関数として，$\omega=\pi$ の角周波数まで近似度がよければ充分である。

(3) $F_{S2}(s)$近似は ω が $0\leq\omega\leq\pi$ の間で誤差率が3％以内であるから，図―1で $G(s)=\frac{k}{1+Ts}$ の系や位相進み補償などを持つ比較的高い周波数成分を含む系の近似伝達関数に適している。

(4) $F_{P2}(s)$近似は ω が $0\leq\omega\leq\pi/2$ では誤差率が 0.6％以内できわめて近似度が高く，図―1で $G(s)=\frac{k}{s(1+Ts)}$の系などのように，比較的応答の遅い系に適している。

(5) $F_{T2}(s)$ 近似は一応誤差率を10％まで許せば ω が $0\leq\omega\leq4.6$ 位まで取れることになるが一般的な取扱いとしては誤差が大き過ぎ，$F_{P2}(s)$ 近似，$F_{S2}(s)$ 近似よりはるかに劣る。

参 考 文 献

(1) 野村：計測制御回路（日刊工業）P.103.
(2) J.G. Truxal: Automatic Feedback Control System Synthesis Mc Graw―Hill (1955) P.550.
(3) 山下：電子計算機アナログ計算機編オーム社(昭和14) P.10.7
(4) 四谷，松田：本誌 13,37 (昭和37)
(5) 四谷，松田：本誌 14,39 (昭和38)

(昭和39.10.30受付)