薄肉管の問題についての一考察

長　元　亀　久　男

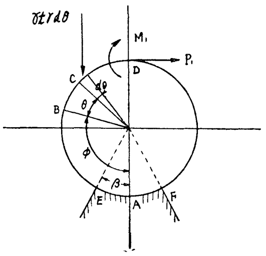
One consideration on A Problem of Thin Cylinder

Kikuo NAGAMOTO.

One method of calculation about the indeterminate forces in a thin cylinder with an internal pressure is described in this paper.

今薄肉の導水管が図～1の様にEAFなる支え台にて支えられている場合，頂点Dなる点は対称であるために角変位および水平変位をしない点と考えられるから，このことを用いてDにおける不静定力を求めることにする。そしてこの不静定力は管自重によって生ずる不静定力と液圧によって生ずる不静定力との重ね合せから成立っていると考えることができる。玆ではこのような考え方によって不静定力の計算を導いたものである

（1） 管自重によって生ずる不静定力



図～1

Υ ：材料の密度kg/cm³

t ：管の厚さcm

r ：管の半径cm

$M_{(b1)0}$：任意点Bに作用する自重による曲げモーメントkgcm

M_{b1}：任意点Bに作用する曲げモーメントkgcm

M_1 ：自重による不静定曲げモーメントkgcm

P_1 ：自重による不静定力kg

図～1を参照しB点に作用する自重による曲げモーメントは，つぎのように求め得られる。

$$M_{(b1)0}=\Upsilon tr^2\left[\sin\phi\int_0^{\pi-\phi}d\theta-\int_0^{\pi-\phi}\sin(\phi+\theta)d\theta\right]$$

$$=\Upsilon tr^2\{\sin\phi(\pi-\phi)+(1+\cos\phi)\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然らばB点に作用する曲げモーメントは，つぎのように求め得られる。

$$M_{b1}=\Upsilon tr^2\{\sin\phi(\pi-\phi)-(1+\cos\phi)\}+P_1r(1+\cos\phi)+M_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

歪エネルギU_1はつぎのように求め得られる。

$$U_1=\frac{1}{2EI}\int_\beta^\pi M_{b1}{}^2ds\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但しEはヤング係数，Iは断面二次モーメントである。

$$\frac{\partial U_1}{\partial M_1}=\frac{1}{EI}\int_\beta^\pi M_{b1}\frac{\partial M_{b1}}{\partial M_1}ds=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial M_{b1}}{\partial M_1}=1\qquad ds=rd\phi$$

$$\int_\beta^\pi M_{b1}d\phi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\int_\beta^\pi M_{b1}d\phi=\Upsilon tr^2\left[\int_\beta^\pi\sin\phi(\pi-\phi)d\phi-\int_\beta^\pi(1+\cos\phi)d\phi\right]$$

$$+P_1r\int_\beta^\pi(1+\cos\phi)d\phi+M_1\int_\beta^\pi d\phi$$

$$=\left[\Upsilon tr^2\{-\pi\cos\phi+\phi\cos\phi-2\sin\phi-\phi\}+P_1r(\phi+\sin\phi)+M_1\phi\right]_\beta^\pi$$

$$=P_1r(\pi-\beta-\sin\beta)+M_1(\pi-\beta)-\Upsilon tr^2\{(\pi-\beta)-\cos\beta(\pi-\beta)-2\sin\beta$$

$$=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$(\pi-\beta-\sin\beta)=A_{11}$$

$$\Upsilon tr^2\{(\pi-\beta)-\cos\beta(\pi-\beta)-2\sin\beta\}=K_{11}$$

$$A_{11}P_1r+(\pi-\beta)M_1-K_{11}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial P_1}=\frac{1}{EI}\int_\beta^\pi M_{b1}\frac{\partial M_{b1}}{\partial P_1}ds=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\frac{\partial M_{b1}}{\partial P_1}=(1+\cos\phi)$$

$$\int_\beta^\pi M_{b1}(1+\cos\phi)d\phi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\int_\beta^\pi M_{b1}\cos\phi d\phi=\Upsilon tr^2\left[\int_\beta^\pi\sin\phi(\pi-\phi)\cos\phi d\phi\right.$$

$$\left.-\int(1+\cos\phi)\cos\phi d\phi\right]+\int_\beta^\pi P_1r(1+\cos\phi)\cos\phi d\phi$$

$$+\int_\beta^\pi M_1\cos\phi d\phi$$

$$=\Upsilon tr^2\left[-\frac{\pi}{4}\cos^2\phi+\frac{\pi}{4}\sin^2\phi-\frac{\sin2\phi}{8}+\frac{2\phi\cos^2\phi}{8}\right.$$

$$\left.-\sin\phi-\frac{\phi}{2}-\frac{\sin^2\phi}{4}\right]_\beta^\pi+P_1r\left[\sin\phi+\frac{\phi}{2}\right.$$

$$+\frac{\sin\phi\cos\phi}{2}\Big]_{\beta}^{\pi}\ +M_1\Big[[\sin\phi]_{\beta}^{\pi}$$

$$=\gamma t r^2\Big\{-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\sin^2\beta-\frac{1}{4}\beta\cos^2\beta+\frac{1}{4}\beta\sin^2\beta+\frac{\beta}{2}$$

$$+\sin\beta+\frac{3}{4}\sin\beta\cos\beta\Big\}+P_1 r\Big\{\frac{\pi}{2}-\sin\beta-\frac{\beta}{2}$$

$$-\frac{\sin\beta\cos\beta}{2}\Big\}-M_1\sin\beta$$

$$=0 \cdots\cdots (10)$$

$$\Big\{\frac{\pi}{2}-\sin\beta-\frac{\beta}{2}-\frac{\sin\beta\cos\beta}{2}\Big\}=A_{12}$$

$$\gamma t r^2\Big\{-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\sin^2\beta-\frac{1}{4}\beta\cos^2\beta+\frac{1}{4}\beta\sin^2\beta+\frac{\beta}{2}+\sin\beta$$

$$+\frac{3}{4}\sin\beta\cos\beta\Big\}=K_{12}$$

$$A_{12}P_1 r-\sin\beta M_1+K_{12}=0 \cdots\cdots (11)$$

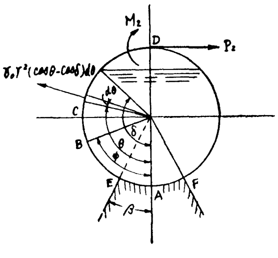
$$(7)\ A_{11}P_1 r+(\pi-\beta)M_1=K_{11}$$

$$(11)\ A_{12}P_1 r-\sin\beta M_1=-K_{12}$$

$$P_1=\frac{-K_{11}\sin\beta+K_{12}(\pi-\beta)}{-A_{11}r\sin\beta-A_{12}r(\pi-\beta)} \cdots\cdots (12)$$

$$M_1=\frac{-K_{12}A_{11}r-K_{11}A_{12}r}{-A_{11}r\sin\beta-A_{12}r(\pi-\beta)} \cdots\cdots (13)$$

(Ⅱ) 管内水圧によって生ずる不静定力



図～2

γ_o：液体の密度kg/cm²

$M_{(b2)o}$：任意点bに作用する液体圧による曲げモーメントkgcm

M_{b1} ： 任意点Bに作用する曲げモーメント

M_2 ： 液体圧による不静定曲げモーメントkgcm

P_2：液体圧による不静定力

図～2を参照しB点に作用する液体圧による曲げモーメントはつぎのように求め得られる

$$M_{(b2)o}=-\gamma_o r^3\int_{\phi}^{\delta}(\cos\theta-\cos\delta)\sin(\theta-\phi)d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma_o r^3\{\cos\phi+\cos\delta\cos(\delta-\phi)-\sin(\delta-\phi)$$

$$-2\cos\delta\} \cdots\cdots (14)$$

然らばB点に作用する曲げモーメントはつぎのように求め得られる。

$$M_{b2}=-\frac{\gamma_0 r^3}{2}\{\cos\phi+\cos\delta\cos(\delta-\phi)-\sin\phi(\delta-\phi)$$

$$-2\cos\delta\}+P_2 r(1+\cos\phi)+M_2 \qquad \beta\leqq\phi\leqq\delta \cdots (15)$$

歪エネルギU_2はつぎのように求め得られる。

$$U_2=\frac{1}{2EI}\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}{}^2 ds \cdots\cdots (16)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial M_2}=\frac{1}{EI}\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}\frac{\partial M_{b2}}{\partial M_2}ds=0 \cdots\cdots (17)$$

$$\frac{\partial M_{b2}}{\partial M_2}=1$$

$$\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}d\phi=0 \cdots\cdots (18)$$

$$\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}d\phi=\int_{\beta}^{\delta}M_{(b2)0}d\phi+\int_{\beta}^{\pi}P_2 r(1+\cos\phi)d\phi$$

$$+\int_{\beta}^{\pi}M_2 d\phi=0$$

$$\int_{\beta}^{\delta}M_{(b2)0}d\phi=-\frac{\gamma_0 r^3}{2}\Big[\mathrm{s\ n}\phi+\mathrm{c\ s}^2\delta\sin\phi-\cos\delta\sin\delta\cos\phi$$

$$+\delta\cos\phi-\phi\cos\phi+\sin\phi+2\phi\cos\delta\Big]_{\beta}^{\delta}$$

$$=-\frac{\gamma_0 r^3}{2}[2\sin\delta-2\delta\cos\delta-2\sin\beta-\cos^2\delta\sin\beta$$

$$+\cos\delta\sin\delta\cos\beta-\delta\cos\beta+\beta\cos\beta+2\beta\cos\delta]$$

$$\int_{\beta}^{\pi}P_2 r(1+\cos\phi)d\phi=P_2 r\Big[\phi+\sin\phi\Big]_{\beta}^{\pi}=P_2 r\{\pi-\beta-\sin\beta\}$$

$$\int_{\beta}^{\pi}M_2 d\phi=M_2(\pi-\beta)$$

$$\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}d\phi=-\frac{\gamma_0 r^3}{2}[2\sin\delta-2\delta\cos\delta-2\sin\beta-\cos^2\delta\sin\beta$$

$$+\cos\delta\sin\delta\cos\beta-\delta\cos\beta+\beta\cos\beta+2\beta\cos\delta]$$

$$+P_2 r(\pi-\beta-\sin\beta)+M_2(\pi-\beta)=0 \cdots\cdots (19)$$

$$(\pi-\beta-\sin\beta)=A_{21}$$

$$\frac{\gamma_0 r^3}{2}[2\sin\delta-2\cos\delta-2\sin\beta-\cos^2\delta\sin\beta+\cos\delta\sin\delta\cos\beta$$

$$-\delta\cos\beta+\beta\cos\beta+2\beta\cos\delta]=K_{21}$$

$$A_{21}P_2 r+(\pi-\beta)M_2-K_{21}=0 \cdots\cdots (20)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial P_2}=\frac{1}{EI}\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}\frac{\partial M_{b2}}{\partial P_2}ds=0 \cdots\cdots (21)$$

$$\frac{\partial M_{b2}}{\partial P_2}=(1+\cos\phi)$$

$$\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}(1+\cos\phi)d\phi=0 \cdots\cdots (22)$$

$$\int_{\beta}^{\pi}M_{b2}\cos\phi d\phi=\int_{\beta}^{\delta}M_{(b2)0}\cos\phi d\phi+\int_{\beta}^{\pi}P_2 r(1+\cos\phi)$$

$$\cos\phi d\phi+\int_{\beta}^{\pi}M_2\cos\phi d\phi=0$$

$$\int_{\beta}^{\delta}M_{(b2)0}\cos\phi=-\frac{\gamma_0 r^3}{2}\Big[\frac{\phi}{2}+\frac{\sin\phi\cos\phi}{2}+\cos^2\delta\Big\{\frac{\phi}{2}$$

$$+\frac{\sin\phi\cos\phi}{2}\Big\}+\frac{\cos\delta\sin\delta\sin^2\phi}{2}-\frac{\delta\sin^2\phi}{2}+\frac{1}{4}\Big\{$$

$$-\phi\cos2\phi+\sin\phi\cos\phi\Big\}-2\cos\delta\sin\phi\Big\}_{\beta}^{\delta}$$

$$=-\frac{\gamma_0 r^3}{2}\Big[-\frac{3}{4}\sin\delta\cos\delta+\frac{\delta}{2}\Big(1+\frac{\cos2\delta}{2}\Big)-\frac{\beta}{2}$$

$$-\frac{3}{4}\sin\beta\cos\beta-\frac{\beta}{2}\cos^2\delta-\cos^2\delta\frac{\sin\beta\cos\beta}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\cos\delta\sin\delta\sin^2\beta+\frac{\delta}{2}\sin^2\beta+\frac{1}{4}\beta\cos2\beta$$

$$+2\cos\delta\sin\beta]$$

$$\int_{\beta}^{\pi} P_2 r(1+\cos\phi)\cos\phi d\phi = P_2 r\left[\frac{\pi}{2}-\sin\beta-\frac{\beta}{2}-\frac{\sin\beta\cos\beta}{2}\right]$$

$$\int_{\beta}^{\pi} M_2\cos\phi d\phi = -M_2\sin\beta$$

$$\left\{\frac{\pi}{2}-\sin\beta-\frac{\beta}{2}\frac{-\sin\beta\cos\beta}{2}\right\} = A_{22}$$

$$\frac{\gamma_0 r^3}{2}\left[-\frac{3}{4}\sin\delta\cos\delta+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{\cos 2\delta}{2}\right)-\frac{\beta}{2}-\frac{3}{4}\sin\beta\cos\beta\right.$$

$$-\frac{\beta}{2}\cos^2\delta-\cos^2\delta\frac{\sin\beta\cos\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\delta\sin\delta\sin^2\beta$$

$$\left.+\frac{\delta}{2}\sin^2\beta+\frac{1}{4}\beta\cos^2\beta+2\cos\delta\sin\beta\right] = K_{22}$$

$$A_{22}P_2 r-\sin\beta M_2-K_{22}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

$$(20) A_{21}rP_2+(\pi-\beta)M_2=K_{21}$$

$$(23) A_{22}rP_2-\sin\beta M_2=K_{22}$$

$$P_2=\frac{-K_{21}\sin\beta-K_{22}(\pi-\beta)}{-A_{21}r\sin\beta-A_{22}r(\pi-\beta)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

$$M_2=\frac{A_{21}rK_{22}-A_{22}rK_{21}}{-A_{21}r\sin\beta-A_{22}r(\pi-\beta)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

（Ⅰ）（Ⅱ）を綜合し不静定力PおよびMはつぎのように求め得られる。

$$P=P_1+P_2=\frac{-K_{11}\sin\beta+K_{12}(\pi-\beta)}{-A_{11}r\sin\beta-A_{12}r(\pi-\beta)}$$

$$+\frac{-K_{21}\sin\beta-K_{22}(\pi-\beta)}{-A_{21}r\sin\beta-A_{22}r(\pi-\beta)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

$$M=M_1+M_2=\frac{-K_{12}A_{11}r-K_{11}A_{12}r}{-A_{11}r\sin\beta-A_{12}r(\pi-\beta)}$$

$$+\frac{K_{22}A_{21}r-K_{21}A_{22}r}{-A_{21}r\sin\beta-A_{22}r(\pi-\beta)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

これらの計算は計算機を用うれば簡単に取り扱うことができる。

最後に参照いたしました文献[1][2]にお礼申し上げます。

(1) 南大路謙一，薄肉の鉄管を地上に横たえた場合の変形について 機械学会誌，Vol.32，No.150，(昭4〜10)

(2) 中沢　盛直，輪の応力，機械学会誌，Vol. 28，No.101，(Sept. 1925)

本稿は化学工学協会北陸地方大会（昭38〜10〜1）にての講演要旨である。

（昭和38.10.31受付）