門形ラーメンの問題についての一考察

長　元　亀　久　男

One Consideration on The Problems of Rahmen

Kikuo NAGAMOTO

One method of calculation of indeterminate force in the problems of rahmen with general loading is described in this paper.

I　仮想働原理の応用についての考察

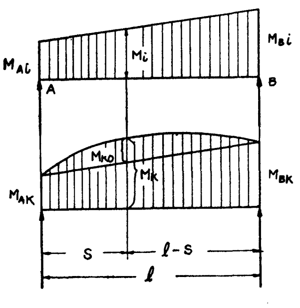
いま不静定構造にてある部材を考え，その部材について荷重による曲げモーメントを M_k とし，不静定力を X_i とした場合，$X_i=1$ によるこの部材の曲げモーメントを M_i とする。いまこの部材の軸線にそうて測った長さを ds とすれば不静定力は仮想働原理を用うればつぎのように求め得られる。[(1)]

$$X_i=-\frac{\Sigma\int\frac{M_iM_kds}{EI}}{\Sigma\int\frac{M_i^2}{EI}ds} \quad \cdots\cdots(1)$$

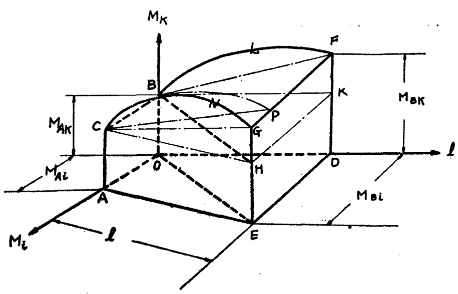
但し E はヤング係数，I は断面の二次モーメントである。いま(1)式の分子分母の項について考えてみることにする。図—1を参照し AB を一つの部材とし M_i は直線的に変化し M_k は任意に分布するものとすれば M_iM_k はつぎのように記述することができる。

$$M_i=M_{Ai}\frac{l-s}{l}+M_{Bi}\frac{s}{l} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$M_k=M_{AK}\frac{l-s}{l}+M_{BK}\frac{s}{l}+M_{KO} \quad \cdots\cdots(3)$$



図～1



図～2

$\int M_iM_kds$ の計算結果を考察するに図—2のように M_i, M_k, l, 軸をとって図示すれば図のような幾何学的形状の体積であらわされることになる。

図—2において $OB=M_{AK}$, $DF=M_{BK}$, $OA=M_{Ai}$, $DE=M_{Bi}$ にとっている。この幾何学的形状の体積を考察するのに便宜上 $M_{AK}=OB=AC=EH=DK$, $M_{Ai}=BC=FP$, にとっている。また OE, BH, BG, CP, を結んで考えることにする。

然らば図—2から

$$\int M_kM_ids=\text{〔OACBDEHK の体積〕}+\text{〔CGHKFB の体積〕}+\text{〔BLFGNC の体積〕}\cdots\cdots(4)$$

また図から

〔OACBDEHK の体積〕=〔OACBHE の体積〕+〔OBKDEH の体積〕 ……………………(5)

〔CGHKFB の体積〕=〔BCHG の体積〕+〔BFKHG の体積〕……………………… ……(6)

〔BLFNC の体積〕=〔BLFPQC の体積〕+〔CQPGC の体積〕 …………………………(7)

(4)式に (5)(6)(7) を代入しあとの計算に便利なように整理すればつぎのように記述することができる。

$$\int M_k M_i ds = 〔\text{OACBHE の体積} + \text{BCHG の体積}〕 + 〔\text{OBKDEH の体積} + \text{BFKHG の体積}〕 + 〔\text{BLFPQC の体積} + \text{CQPGC の体積}〕 \quad \cdots\cdots(8)$$

上式右辺括弧の第1項第2項第3項は著者の理論[2]によりつぎのように計算することができる。

$$〔\text{OACBHE の体積} + \text{BCHG の体積}〕 = \frac{M_{Ai}l}{2} \times M_{AK} - \frac{M_{Ai}l}{2} \times \frac{M_{BK}-M_{AK}}{3}$$

$$= \frac{M_{Ai}M_{AK}l}{3} + \frac{M_{Ai}M_{BK}l}{6} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$〔\text{OBKDEH の体積} + \text{BFKHG の体積}〕 = \frac{M_{Bi}l}{2} \times M_{AK} + \frac{M_{Bi}l}{2} \times \frac{2(M_{BK}-M_{AK})}{3}$$

$$= \frac{M_{Bi}M_{BK}l}{3} + \frac{M_{Bi}M_{AK}l}{6} \quad \cdots\cdots(10)$$

BLF の面積を A とし B から図心までの距離を $\bar{x}$ とすれば

$$〔\text{BLFPQC の体積} + \text{CQPGC の体積}〕 = A \times M_{Ai} + A \times (M_{Bi} - M_{Ai}) \times \frac{\bar{x}}{l}$$

$$= A \times M_{Bi}\frac{\bar{x}}{l} + A \times M_{Ai}\left(1 - \frac{\bar{x}}{l}\right)$$

$$= M_{Bi}K_B + M_{Ai}K_A \quad \cdots\cdots(11)$$

$$A \times \frac{\bar{x}}{l} = K_B, \qquad A \times \left(\frac{l-\bar{x}}{l}\right) = K_A$$

然らば(8)式はつぎのように記述される

$$\int_0^l M_i M_K ds = \frac{l}{6}〔M_{Ai}(2M_{AK} + M_{BK}) + M_{Bi}(M_{AK} + 2M_{BK})〕 + M_{Ai}K_A + M_{Bi}K_B \quad \cdots\cdots(12)$$

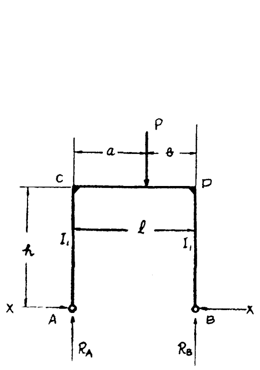
$M_K = M_i$ とすれば, $M_{KO} = O$, $M_{AK} = M_{Ai}$, $M_{BK} = M_{Bi}$ となるから

$$\int_0^l M_i^2 ds = \frac{l}{3}〔M_{Ai}^2 + M_{Ai}M_{Bi} + M_{Bi}^2〕 \quad \cdots\cdots(13)$$

以上のように (1)式分子の項である (12)式は図―2のような幾何学的形状を画けば著者の理論[2]により直ちに記述し得るもので甚だ簡易な関係にあるものである。(1)式分母の項は分子の項の特別な場合で (12)式を応用すればこれまた簡単に記述することができるものである。

Ⅱ　門形ラーメンの問題に応用することの考察

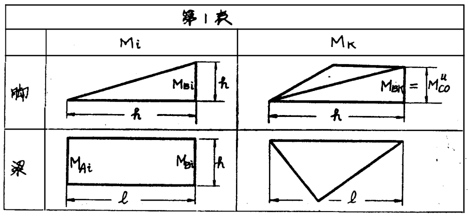
以上 Ⅰ. において述べた事項を応用して門形ラーメンの問題を解くことを考えてみる。いま図―3に示すような一次不静定の門形ラーメンの問題について考えてみる。h を高さ, l を経間, 断面の二次モーメントを脚については I_1, 梁については I_2 とする。いま B を移動端とする基本静定系を考え, これに不静定力 X を作用せしむるものとする。



図～3

然らば1箇の集中荷重が梁及脚に作用する場合を考えると M_i, M_k の形状は第1表のようなものとなる。この表にて脚の横荷重からくる

C点のモーメントをM^u_{CO}，D点のモーメントをM^u_{DO}と記している。



脚については⑫式にて $M_{Bi}=1\times h$，$M_{BK}=M^u_{CO}$，$M_{Ai}=0$，$M_{AK}=0$

$$\text{AC脚}\quad \int_0^h M_i M_k ds=\frac{h^2}{3}M^u_{CO}+hK^{AC}_B \qquad\cdots\cdots(14)$$

$$\text{BD脚}\quad \int_0^h M_i M_K ds=\frac{h^2}{3}M^u_{DO}+hK^{DB}_A \qquad\cdots\cdots(15)$$

⒀式にて　$M_{AK}=M_{Bi}=1\times h$

$$\text{AC脚 および BD脚}\quad \int_0^h M_i^2 ds=\frac{h^3}{3} \qquad\cdots\cdots(16)$$

梁については⑿式にて $M_{AK}=0$，$M_{BK}=0$，$M_{Ai}=1\times h$，$M_{Bi}=1\times h$

$$\text{CD梁}\quad \int_0^l M_i M_K ds=h(K^{CD}_A+K^{CD}_B) \qquad\cdots\cdots(17)$$

$$\int_0^l M_i^2 ds=lh^2 \qquad\cdots\cdots(18)$$

この場合 I_2 を基準部材にとり上記の結果を⑴式に代入して，$I_2h/I_1l=k$，とおいて不静定力を計算すれば，つぎのように求め得られる。

$$X=\frac{\frac{k}{3}[M^u_{CO}+M^u_{DO}]+\frac{k}{h}[K^{AC}_B+K^{DB}_A]+\frac{1}{l}[K^{CD}_A+K^{CD}_B]}{\frac{h}{3}(2k+3)} \qquad\cdots\cdots(19)$$

いま荷重が梁のみに作用する場合を考えると $K^{AC}_B=0$，$K^{DB}_A=0$，$M^u_{CO}=0$，$M^u_{DO}=0$ となり，この場合の不静定力はつぎのように求め得られる。

$$X=\frac{2(K^{CD}_A+K^{CD}_B)}{\frac{2}{3}(3+2k)lh} \qquad\cdots\cdots(20)$$

さて梁に荷重が存する場合の基本として，CD間に1箇の集中荷重が存在する場合を 考えてみることにする。この場合は⒇式にて $K^{CD}_A+K^{CD}_B$ なる計算は 図—4 を参照してつぎのように求めることができる。

$$K^{CD}_A+K^{CD}_B=\frac{Pl^2}{6}\left(\frac{b}{l}-\frac{b^3}{l^3}\right)+\frac{Pl^2}{6}\left(\frac{a}{l}-\frac{a^3}{l^3}\right)=-\frac{1}{2}Pab \qquad\cdots\cdots(21)$$

然らば図—3のような門形ラーメンにてCD間に1箇の集中荷重が存在するときの不静定力はつぎのように求め得られる。

$$X=\frac{3Pab}{2(3+2k)lh} \qquad\cdots\cdots(22)$$

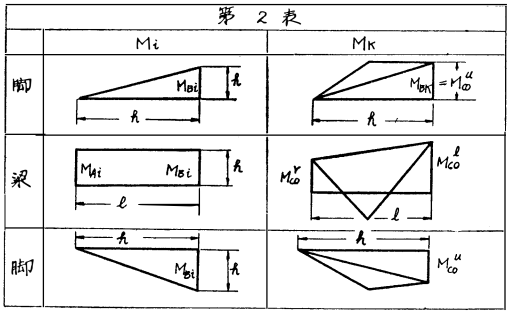
もしCD間 に数箇の集中荷重 $\sum_{i=1}^{n}P_i$ が存在するときの不静定力はつぎのように求め得られる。

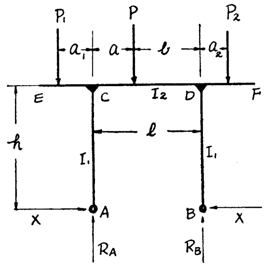
$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{P\,a_ib_i}{2(3+2k)lh} \qquad\cdots\cdots(23)$$

もしCD間 に等分布荷重が存在するときの不静定力はつぎのように求め得られる。

$$X=\int_0^l \frac{3Px(l-x)}{2(3+2k)lh}dx=\frac{Pl^2}{4(3+2k)h} \quad \cdots\cdots(24)$$

つぎに図—5のように CE, DF という張出し部材をもつ門形ラーメンの問題について考えてみよう。張出部には図のように荷重が存在するとしこれによる C点のモーメントを M^r_{CO}, D点のモーメントを M^l_{DO} とすれば門形部の梁の部分における M_K の形が前の場合と異ってくるだけで, M_iM_K の形状は第2表のようなものとなる。





図～5

AC脚については前と同様に

$$\int_0^h M_iM_Kds=\frac{h^2}{3}M^u_{CO}+hK^{AC}_B \quad \cdots\cdots(25)$$

BD脚については前と同様に

$$\int_0^h M_iM_Kds=\frac{h^2}{3}M^u_{DO}+hK^{DB}_A \quad \cdots\cdots(26)$$

AC脚 BD脚については前と同様に

$$\int_0^h M_i^2ds=\frac{h^3}{3} \quad \cdots\cdots(27)$$

梁 CD については(12)式にて $M_{AK}=M^r_{CO}$, $M_{BK}=M^l_{DO}$, $M_{Ai}=1\times h$, $M_{Bi}=1\times h$

$$\int_0^l M_iM_Kds=\frac{lh}{2}(M^r_{CO}+M^l_{DO})+h(K^{CO}_A+K^{CO}_B) \quad \cdots\cdots(28)$$

$$\int_0^l M_i^2ds=lh^2 \quad \cdots\cdots(29)$$

この場合 I_2 を基準部材にとり(25)(26)(27)(28)(29)を(1)式に代入し $I_2h/I_1l=k$ とおいて不静定力を計算すればつぎのように求め得られる。

$$X=\frac{\frac{k}{3}[M^u_{CO}+M^u_{DO}]+\frac{1}{2}[M^r_{CO}+M^l_{DO}]+\frac{k}{h}[K^{AC}_B+K^{DB}_A]+\frac{1}{l}[K^{CD}_A+K^{CD}_B]}{\frac{h}{3}(2k+3)} \quad \cdots\cdots(30)$$

荷重が梁にのみ作用する場合を考えると $K^{AC}_B=0$, $K^{DB}_A=0$, $M^u_{CO}=0$, $M^u_{DO}=0$

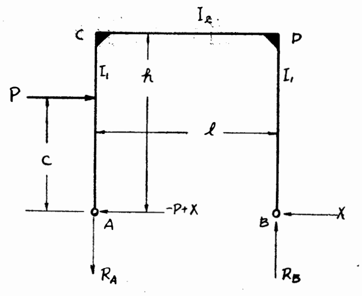
$$X=\frac{2(K^{CD}_A+K^{CD}_B)+l(M^r_{CO}+M^l_{DO})}{\frac{2}{3}(3+2k)lh} \quad \cdots\cdots(31)$$

もし荷重が CD梁間 のみに作用する場合には $M^r_{CO}=0$, $M^l_{DO}=0$, となり, (20)式が導き得られることになる。

今度は図—6のような門形ラーメンにて脚AC間に1箇の集中荷重 P が存在する場合を考えてみる。

この場合には(19)式にて, $K^{CD}_A=0$, $K^{CD}_B=0$, $K^{DB}_A=0$, $M^u_{DO}=M^l_{DO}=0$, $M^u_{CO}=M^r_{CO}=PC$, とおけば不静定力はつぎのように求め得られる。

$$X=\frac{(3+2k)PC+\frac{6k}{h}K_B^{AC}}{2(3+2k)h}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$



図～6

またこの場合のK_B^{AC}はつぎのように求め得られる。

$$K_B^{AC}=\frac{Ph^2C-PC^3}{6h}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

もしも脚 AC が全高にわたり等分布横荷重をうける場合には(32)式(33)式にて $P=p$, $C=x$ とおいて不静定力はつぎのように求め得られる。

$$X=\frac{1}{2(3+2k)h}\{(3+2k)p\int_0^h xdx+\frac{6k}{h}\frac{1}{6h}[ph^2\int_0^h xdx-p\int_0^h x^3dx]\}$$

$$=\frac{6+5k}{8(3+2k)}ph\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

参　考　文　献

(1)福田武雄：構造力学（河出書房）

(2)長元亀久男：構造における仮想仕事原理の応用についての考察，日本機械学会，宇部臨時大会前刷（昭和33-11-6）

（昭和37年10月31日受付）