むだ時間の近似伝達関数（続）

四谷平治
松田秀雄

Approximate Transfer Function of Dead Time (Continued).

Heiji YOTSUYA
Hideo MATSUDA

The transfer function of dead time is as is well known given by exponential function. when this exists in automatic control system, the theoretical treatment becomes very difficult. Therefore, this is expanded in rational series function and cut off by several terms. In this paper, the behaviors of these approximate transfer functions are verified theoretically and experimentally (using electronic analog computer).

1. 緒　　言

自動制御系のむだ時間要素の伝達関数 F(S) は周知のように

$$F(S)=e^{-sL}=e^{-S} \tag{1}$$

（ただし．L＝ むだ時間，S=sL）であらわされるが，系の解析において指数関数が含まれると取扱いがやっかいである。そこでこれを Taylor 級数に展開した。

$$F(S)=e^{-S}=\frac{1}{e^{S}}=\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\frac{S^4}{4!}+\frac{S^5}{5!}+\cdots\cdots} \tag{2}$$

により，分母の有限の項まで取った有理関数で F(S)を近似する場合を考える。[1] すなわち，1/(1+S) を1次近似，$1/(1+S+S^2/2!)$ を2次近似……等の如く命名する。これらの近似伝達関数についての周波数領域での検討の結果はすでに富山大学工学部紀要第13巻第1，2号で発表ずみである。[2] したがって，今回は時間領域での解析を試みる。

2. 近似伝達関数の過渡応答

各近似伝達関数に単位ステップを入力として加えた場合の過渡応答の理論式を導き，かつアナコンによりその波形を求める。

(i)　1次近似伝達関数

$$F_1(S)=\frac{1}{1+S} \tag{3}$$

これは単なる1次おくれ要素の伝達関数である。これに単位ステップを加えると，出力 $e_0(t)$ は

$$e_0(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{1+S}\cdot\frac{1}{S}\right]=1-e^{-t} \tag{4}$$

となる。図―1(a) はこれをアナコンによって求めた波形である。

(ii)　2次近似伝達関数

$$F_2\,(S)=\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}} \tag{5}$$

これの過渡応答 $e_0(t)$ は

$$e_0(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}}\cdot\frac{1}{S}\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{(S+1)^2+1}\cdot\frac{1}{S}\right]$$

これに Laplace 変換の公式

$$L^{-1}\left[\frac{1}{S\{(S+\alpha)^2+\beta^2\}}\right]=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{-\alpha t}\sin(\beta t-\phi)$$

$$\therefore\quad \phi=\tan^{-1}[\beta/(-\alpha)]$$

を適用して $e_0(t)$ を求める。

$$e_0\,(t)=\left[1-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{6}$$

図—1(b) はこれをアナコンによって求めた波形である。

(iii) 3次近似伝達関数

$$F_3\,(S)=\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}+\frac{S^3}{6}} \tag{7}$$

過渡応答 $e_0(t)$ を求める。

$$\begin{aligned}e_0(t)&=L^{-1}\left[\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}+\frac{S^3}{6}}\cdot\frac{1}{S}\right]\\&=L^{-1}\left[\frac{6}{(S+1.596)\,\{(S+0.702)^2+3.2664\}}\cdot\frac{1}{S}\right]\\&=1-0.933e^{-1.6t}-0.852e^{-0.7t}\sin\left(1.8t+\frac{4.4}{180}\pi\right)\end{aligned} \tag{8}$$

図—1(c) はこれをアナコンによって求めた波形である。

(iv) 4次近似伝達関数

$$F_4\,(S)=\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}+\frac{S^3}{6}+\frac{S^4}{24}} \tag{9}$$

この過渡応答 $e_0(t)$ は

$$\begin{aligned}e_0\,(t)&=L^{-1}\left[\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}+\frac{S^3}{6}+\frac{S^4}{24}}\cdot\frac{1}{S}\right]\\&=L^{-1}\left[\frac{24}{(S^2+3.46S+3.783)(S^2+0.54S+6.3486)}\cdot\frac{1}{S}\right]\\&=L^{-1}\left[\frac{24}{\{(S+1.73)^2+0.7901\}\,\{(S+0.27)^2+6.2757\}}\cdot\frac{1}{S}\right]\\&=1+0.4857e^{-0.27t}\sin\left(2.5051t+\frac{149}{180}\pi\right)\\&\qquad-1.7197e^{-1.73t}\sin\left(0.8889t+\frac{46.7}{180}\pi\right)\end{aligned} \tag{10}$$

図—1(d) にこれをアナコンにより求めた波形を示す。

(v) 5次近似伝達関数

$$F_5(S)=\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}+\frac{S^3}{6}+\frac{S^4}{24}+\frac{S^5}{120}} \tag{11}$$

上式の過波応答 $e_0(t)$ は

$$\begin{aligned}
e_0(t)&=L^{-1}\left[\frac{1}{1+S+\frac{S^2}{2}+\frac{S^3}{6}+\frac{S^4}{24}+\frac{S^5}{120}}\cdot\frac{1}{S}\right]\\
&=L^{-1}\left[\frac{120}{(S+2.1806)(S^2+3.3S+5.5874)(S^2-0.4806S+9.8506)}\cdot\frac{1}{S}\right]\\
&=L^{-1}\left[\frac{120}{(S+2.1806)\{(S+1.65)^2+2.8649\}(S-0.2403)^2+9,7929\}}\cdot\frac{1}{S}\right]\\
&=1-\left\{1.1161e^{-2.1806t}+1.3776e^{-1.65t}\sin\left(1.6926t+\frac{4.4}{180}\pi\right)\right.\\
&\qquad\left.-0.248e^{0.2403t}\sin\left(3.1294t+\frac{116.8}{180}\pi\right)\right\}
\end{aligned} \tag{12}$$

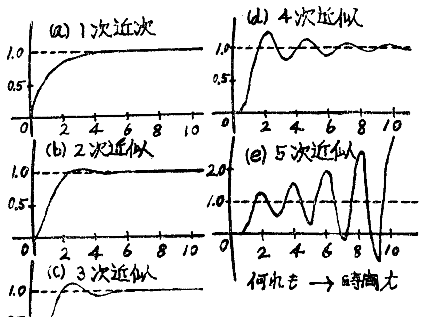
ここれをアナコンに組込んで波形を求めてみたのが図—1(e) である。

3. 検　　　討

いま時間領域のスペックを図—2のように定める。Φp は行過ぎ量〔%〕, Td は遅れ時間〔S〕, Tr は立上り時間〔S〕, Ts は落着き時間〔S〕である。

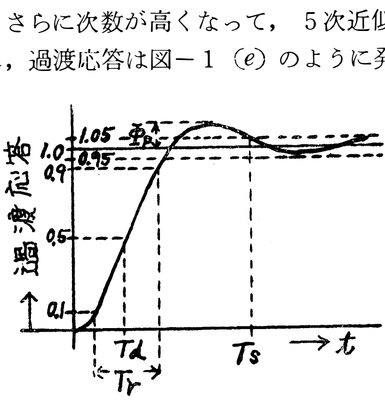
1次近似伝達関数から4次近似伝達関数まではいずれも安定なので, それぞれ Φp, Td, Tr, Ts を求めることができる。表—1はこれをまとめたものである。

遅れ時間ができるかぎり1に近く, 立上り時間ができるかぎり小さいものが良い近似度を与える近似伝達関数であるといえる。表—1では, 立上り時間において次数が高まるとこの傾向のあることがわかる。しかし, 遅れ時間については次数が高くなったからといって, 必ずしも1に近づかない。けれども遅れ時間の差はわずかであるから, 立上り時間の小さい4次近似が, 一番近似度が良いといえる。



図—1　アナコンによる近似伝達関数の過渡応答

さらに次数が高くなって, 5次近似伝達関数になると, (12)式からわかるとおり, 不安定根が存在し, 過渡応答は図—1 (e) のように発散してしまう。このような不安定根は6次, 7次, 8次の各近似伝達関数にも存在することが Routh 判別によって確められ



図—2　時間領域のスペック

表—1

	1 次	2 次	3 次	4 次
行ぎ過量 Φp〔%〕	0	4.3	14	25.6
遅れ時間 Td〔S〕	0.7	1.01	1.11	1.14
立上り時間 Tr〔S〕	2.2	1.5	1.1	0.8
落着時間 Ts〔S〕	3	2.1	3.3	8.4

た。以上のことから，むだ時間の伝達関数を(2)式の有限項数までとった近似伝達関数であらわす場合，4次近似までは安定しているが，5次近似以上においては不安定根を有する場合があるので注意しなければならない。

文　　献

(1) J.G.Truxal : Automatic Feedback Control System Synthesis, McGraw-Hill (1955), New York.

(2) 四谷，松田 : 本誌，13，57 （昭和37年）

（昭和37年10月31日受付）