アーチ問題についての一考察

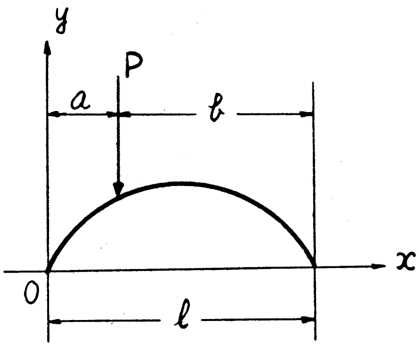
長 元 亀 久 男

One Consideration On The Problem Of Arches

Kikuo NAGAMOTO

One labourless calculating method for the indeterminate forces on the problem of arches with general loading, is stated in this paper.

今例えば (1) 式で示すような 2 ヒンヂパラボリックアーチについて考えることにする。このアーチの基本静定系として曲り梁を考えその断面力即ち軸力，せん断力，曲げモーメントを N_0 Q_0 M_0 とする。然らばこのアーチにおける不静定力を X とすれば，アーチ任意点における断面力 N，Q，M は (2) 式のように求め得られる。



図—1

$$y=\frac{4f}{l^2}x(l-x) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} N&=N_0-X\cos\theta \\ Q&=Q_0-X\sin\theta \\ M&=M_0-Xy \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

このアーチ頂における断面積を A_c 二次モーメントを I_c とし任意断面におけるものを A，I として近似的に $A=A_c\cos\theta$，$I=I_c/\cos\theta$ なる関係を用うれば一般に不静定力 X は (3) 式のように求め得られる。

$$X=\frac{\int_0^l M_0 y dx}{\int_0^l y^2 dx+\frac{I_c l}{A_c}} \quad \cdots\cdots(3)$$

図—1のように1箇の集中荷重 P をもつ場合を考えると M_0 は (4) 式のように求め得られる。

$$\left.\begin{aligned} &0\leqq x\leqq a \qquad M_0=\frac{Pb}{l}x \\ &a\leqq x\leqq l \qquad M_0=\frac{Pb}{l}x-P(x-a) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

$\int M_0 y dx$，$\int y^2 dx$ は (5) (6) 式のようになる。

$$\int_0^l M_0 y dx=\frac{4Pfb}{l^3}\left(\int_0^a x^2(l-x)dx+\int_a^l x^2(l-x)dx\right)-\frac{4Pf}{l^2}\int_a^l (x-a)(xl-x^2)dx$$

$$=\frac{Pf}{3l^2}\left\{l^3(l+a)-a^3(l+b)-l^4\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\int_0^l y^2 dx=\left(\frac{4f}{l}\right)^2\int_0^l x^2(l-x^2)dx=\frac{8}{15}f^2 l \quad \cdots\cdots(6)$$

この場合の不静定力は (7) 式のように求め得られる。

$$X=\frac{\frac{Pf}{3l^2}\left\{l^3(l+a)-a^3(l+b)-l^4\right\}}{\frac{8}{15}f^2l+\frac{I_cl}{A_c}}=\frac{5P}{8fl^3}\left\{l^3(l+a)-a^3(l+b)-l^4\right\}(1-\alpha)\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\alpha=\frac{15I_c}{8f^2A_c}$$

つぎに2ヒンヂパラボリックアーチが任意の集中荷重 P_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$ をもつ場合の不静定力は (8) 式のように計算することができる。

$$X=\sum_{i=1}^{n}\frac{5P_i}{8fl^3}\left\{l^3(l+a_i)-a_i^3(l+b_i)-l^4\right\}(1-\alpha)\cdots\cdots\cdots(8)$$

もし荷重が $P=f(x)$ として与えられるならば，この場合の不静定力は (9) 式のように計算することができる。

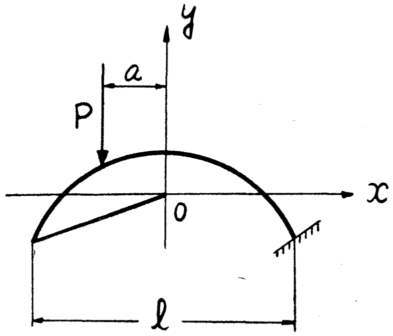
$$X=\frac{5}{8fl^3}(1-\alpha)\int_0^l f(x)\left[l^3(l+x)-x^3(2l-x)-l^4\right]dx\cdots\cdots\cdots(9)$$

例えば単位長につき p なる等分布荷重をもつ場合の不静力ならば (9) 式にて $P\rightarrow p$ とおき全スパンにつき積分すればつぎのように求め得られる。

$$X=\frac{5p}{8fl^3}(1-\alpha)\int_0^l\left[l^3(l+x)-x^3(2l-x)-l^4\right]dx=\frac{pl^2}{8f}(1-\alpha)\cdots\cdots\cdots(10)$$

つぎにA端B端を固定した図―2のような固定パラボリックアーチについて考えることにする。この場合弾性重心法により計算するために図―1に示す座標原点を $x\rightarrow l/2$, $y\rightarrow 2/3\cdot f$ に移す。然らばこの新座標について (1) のパラボラ式は (11) 式のようになる。

$$y=\frac{f}{3l^2}(l^2-12x)\cdots\cdots\cdots(11)$$



図―2

この場合基本静定系としてB端を固定した片持ち曲り梁を考え図―2のように1箇の集中荷重Pをもつ場合の M_0 は (12) 式のように求め得られる。

$$-a<x<\frac{l}{2}\qquad M_0=P(-a-x)\cdots\cdots\cdots(12)$$

然らば不静定力 X_1, X_2 不静定モーメント X_3 は前と同様に (13) (14) (15) 式のように求め得られる。

$$X_1=\frac{\int_{-a}^{\frac{l}{2}}M_0y\,dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}y^2dx+\frac{I_cl}{A_c}}\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$X_2=\frac{\int_{-a}^{\frac{l}{2}}M_0x\,dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}x^2dx}\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$X_3=\frac{\int_{-a}^{\frac{l}{2}}M_0\,dx}{l}\cdots\cdots\cdots(15)$$

アーチの断面力はつぎのように求め得られる。

$$\left.\begin{array}{l} N=N_0-X_1\cos\theta-X_2\sin\theta \\ Q=Q_0-X_1\sin\theta+X_2\cos\theta \\ M=M_0-X_1y+X_2x+X_3 \end{array}\right\} \cdots\cdots (16)$$

$\int M_0ydx$, $\int M_0xdx$, $\int M_0dx$, $\int y^2dx$, $\int x^2dx$ はつぎのように計算し得られる。

$$\int_{-a}^{\frac{l}{2}} M_0ydx=\frac{Pf}{3l^2}\int_{-a}^{\frac{l}{2}}(-a-x)(l^2-12x^2)dx=\frac{Pf}{3l^2}\left\{\frac{l^4}{16}-\frac{a^2l^2}{2}+a^4\right\} \cdots\cdots (17)$$

$$\int_{-a}^{\frac{l}{2}} M_0xdx=P\int_{-a}^{\frac{l}{2}}(-a-x)xdx=P\left\{-\frac{al^2}{8}-\frac{l^3}{24}+\frac{a^3}{6}\right\} \cdots\cdots (18)$$

$$\int_{-a}^{\frac{l}{2}} M_0dx=P\int_{-a}^{\frac{l}{2}}(-a-x)dx=P\left\{-\frac{al}{2}-\frac{l^2}{8}-\frac{a^2}{2}\right\} \cdots\cdots (19)$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2dx=\frac{f^2}{9l^4}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}(l^2-12x^2)^2dx=\frac{4f^2l}{45} \cdots\cdots (20)$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dx=\frac{1}{12}l^3 \cdots\cdots (21)$$

$$X_1=\frac{\int_{-a}^{\frac{l}{2}} M_0ydx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} y^2dx+\frac{I_cl}{A_c}}=\frac{15P}{4fl^3}\left\{\frac{l^4}{16}-\frac{a^2l^2}{2}+a^4\right\}(1-\alpha) \cdots\cdots (22)$$

$$\alpha=\frac{45I_c}{4f^2A_c}$$

$$X_2=\frac{\int_{-a}^{\frac{l}{2}} M_0xdx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dx}=\frac{12P}{l^3}\left\{-\frac{al^2}{8}-\frac{l^3}{24}-\frac{a^3}{6}\right\} \cdots\cdots (23)$$

$$X_3=\frac{\int_{-a}^{\frac{l}{2}} M_0dx}{l}=\frac{P}{l}\left\{-\frac{al}{2}-\frac{l^2}{8}-\frac{a^2}{2}\right\} \cdots\cdots (24)$$

つぎに固定パラボリックアーチが任意の集中荷重 P_i $(i=1, 2, \cdots\cdots n)$ をもつ場合の X_1, X_2, X_3 はつぎのように計算することができる。

$$X_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{15P_i}{4fl^3}\left\{\frac{l^4}{16}-\frac{a_i^2l^2}{2}+a_i^4\right\}(1-\alpha) \cdots\cdots (25)$$

$$X_2=\sum_{i=1}^{n}\frac{12P_i}{l^3}\left\{-\frac{a_il^2}{8}-\frac{l^3}{24}-\frac{a_i^3}{6}\right\} \cdots\cdots (26)$$

$$X_3=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{l}\left\{-\frac{a_il}{2}-\frac{l^2}{8}-\frac{a^2_i}{2}\right\} \cdots\cdots (27)$$

もし荷重が $P=f(x)$ として与えられるならば，この場合の X_1, X_2, X_3 はつぎのように計算することができる。

$$X_1=\frac{15}{4fl^3}(1-\alpha)\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x)\left[\frac{l^4}{16}-\frac{l^2x^2}{2}+x^4\right]dx \cdots\cdots (28)$$

$$X_2=\frac{12}{l^3}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x)\left[-\frac{l^2}{8}x-\frac{l^3}{24}-\frac{x^3}{6}\right]dx \cdots\cdots (29)$$

$$X_3=\frac{1}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x)\left[-\frac{lx}{2}-\frac{l^2}{8}+\frac{x^2}{2}\right]dx \quad\cdots\cdots(30)$$

例えば単位長さにつき p なる等分布荷重をもつ場合の X_1, X_2, X_3 は上式にて $P \to p$ とおき全スパンにつき積分すればつぎのように求め得られる。

$$X_1=\frac{15p}{4fl^3}(1-\alpha)\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left[\frac{l^4}{16}-\frac{l^2x^2}{2}+x^4\right]dx=\frac{pl^2}{8f}(1-\alpha) \quad\cdots\cdots(31)$$

$$X_2=\frac{12p}{l^3}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left[-\frac{l^2}{8}x-\frac{l^3}{24}-\frac{x^3}{6}\right]dx=-\frac{pl}{2} \quad\cdots\cdots(32)$$

$$X_3=\frac{p}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left[-\frac{lx}{2}-\frac{l^2}{8}+\frac{x^2}{2}\right]dx=-\frac{pl^2}{6} \quad\cdots\cdots(33)$$

(昭和36年11月30日受付)