

## むだ時間の近似伝達関数

四 谷 平 治  
松 田 秀 雄

### An Approximate Transfer Function of the Dead Time

Heizi YOTUYA  
Hideo MATUDA

The transfer function of the dead time in the automatic control system is given by the exponential function. But it is difficult to treat of the transfer function of systems containing the exponential function.

Therefore we intend to replace it with an approximate transfer function to take the form of rational function.

#### 1. むだ時間の伝達関数

周知のように自動制御系にはむだ時間というものがあり、入量よりある時間だけ遅れて出量に信号が現われるものがある。いま入量を  $x(t)$  とし、出量  $y(t)$  が時間  $L$  だけ遅れて現われるとすれば

$$y(t) = x(t-L) \quad (1)$$

で表わされる。この式の右辺  $x(t-L)$  を形式的に Taylor 級数に展開すれば

$$x(t-L) = x(t) - x'(t)L + x''(t)\frac{L^2}{2!} - x'''(t)\frac{L^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

微分演算を  $s$  で表わせば(2)式より

$$x(t-L) = x(t) \left[ 1 - sL + \frac{(sL)^2}{2!} - \frac{(sL)^3}{3!} + \dots \right] = x(t) \varepsilon^{-sL} \quad (3)$$

すなわち時間的に  $L$  だけ遅れることは指数関数  $\varepsilon^{-sL}$  を乗ずることになる。

一方、(1)式を Laplace 変換すれば

$$Y(s) = X(s) \varepsilon^{-sL} \quad (4)$$

であるから、むだ時間の伝達関数  $G(s)$  は

$$G(s) = \varepsilon^{-sL} \quad (5)$$

となる。

#### 2. 近似展開

むだ時間の伝達関数を含む制御系では指数関数が入って来ることになり、その取扱いがはなはだ不便である。そこでこれを近似展開して有理関数の形に直して取扱えば便利となる。この際に、近似展開の項数を多くとればとる程、近似度が高くなるのは当然であるが、その半面余り項数を多く取ると取扱いが徒らに複雑となって、実用的でない。そのためこれを有限項で止めた場合にどの程度の誤差が生ずるかを調べてみよう。

いま

$$sL = S = j\Omega \tag{6}$$

の如く  $sL$  を規格化すれば

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-sL} &= \varepsilon^{-S} = \varepsilon^{-j\Omega} = \cos\Omega - j \sin\Omega = 1 - j\Omega + \frac{(j\Omega)^2}{2!} - \frac{(j\Omega)^3}{3!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\Omega^2}{2!} + \frac{\Omega^4}{4!} - \dots\right) - j\left(\Omega - \frac{\Omega^3}{3!} + \frac{\Omega^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned} \tag{7}$$

(7)式の右辺の近似展開の項数を順次増して、 $\Omega$  の各次数1次、2次、3次……の各項まで取った近似伝達関数を、1次近似伝達関数、2次近似伝達関数、3次近似伝達関数……とすれば、各近似伝達関数は表-1 のようになる。

表 - 1

	実 数 部	虚 数 部
原 式	$\cos\Omega$	$-\sin\Omega$
1次近似伝達関数	1	$-\Omega$
2次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2}$	$-\Omega$
3次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2}$	$-\Omega + \frac{\Omega^3}{6}$
4次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Omega^4}{24}$	$-\Omega + \frac{\Omega^3}{6}$
5次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Omega^4}{24}$	$-\Omega + \frac{\Omega^3}{6} - \frac{\Omega^5}{120}$
6次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Omega^4}{24} - \frac{\Omega^6}{720}$	$-\Omega + \frac{\Omega^3}{6} - \frac{\Omega^5}{120}$
7次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Omega^4}{24} - \frac{\Omega^6}{720}$	$-\Omega + \frac{\Omega^3}{6} - \frac{\Omega^5}{120} + \frac{\Omega^7}{5040}$
8次近似伝達関数	$1 - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Omega^4}{24} - \frac{\Omega^6}{720} + \frac{\Omega^8}{40320}$	$-\Omega + \frac{\Omega^3}{6} - \frac{\Omega^5}{120} + \frac{\Omega^7}{5040}$

### 3. 図 表

#### (1) 近似伝達関数

表-1の近似伝達関数の $\Omega$ に適当な値を与えて複素平面上にその軌跡を描いたものが図-1の近似伝達関数である。原式  $\varepsilon^{-j\Omega}$  の軌跡は勿論半径1の円となり $\Omega$ の増加と共に時計方向に廻わる。他の近似伝達関数は $\Omega=0$ で $(+1, j0)$ の点から出発し、 $\Omega$ の小さい範囲では単位円に沿い、 $\Omega$ が大きくなるにしたがって、これより離れる曲線となる。また、次数が高ければ高い程円に沿う $\Omega$ の範囲が増大する。

#### (2) ゲイン—周波数曲線

近似伝達関数の周波数とゲインとの関係を表わしたものが図-2のゲイン—周波数曲線である。原式  $\varepsilon^{-j\Omega}$  はゲイン1の直線でいかなる周波数 $\Omega$ に対しても一定である。1次、2次、6次、7次の各近似伝達関数は $\Omega$ のどの値に対しても1より

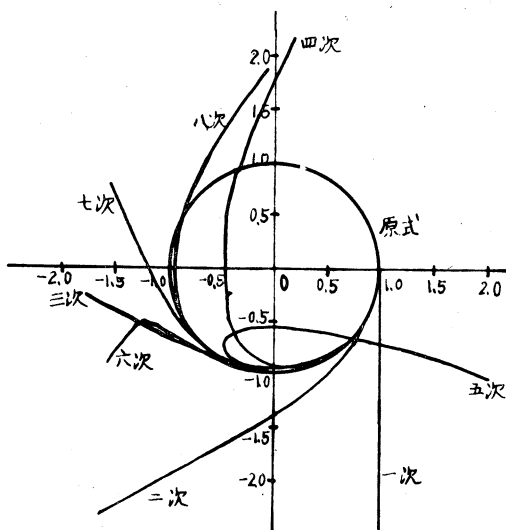


図-1. 近似伝達関数

大きいか、あるいはこれに等しい。3次、4次、5次、8次の各近似伝達関数においてはある  $\Omega$  の値において、ゲインが1より小さくなる部分がある。これはことに4次、5次近似伝達関数に著しく表われている。

(3) 位相—周波数曲線

近似伝達関数の周波数と位相との関係を曲線で表わしたものが図-3の位相—周波数曲線である。原式  $\varepsilon^{-i\Omega}$  は原点と  $\Omega=\pi$  で位相角が  $-180^\circ$  である点とを通る直線となる。他の近似伝達関数は  $\Omega$  の小さいところでのこの直線に沿い、 $\Omega$  が大きくなるにしたがって、これよりはずれ、進むか遅れる位相となる。

4. 検 討

図より次のことが推論される。

(1) むだ時間の伝達関数を近似展開して表わした場合に誤差は主として  $\Omega$  の大きいところで生ずる。これを時間領域でいえば Laplace 変換初期値定理により  $[\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+)]$  時間の

初期に誤差を生ずることになる。しかもむだ時間  $L$  が大きくなればなる程、 $\Omega = \omega L$  の関係より、大きい誤差を生ずることになる。

(2) 周波数領域でゲインの誤差を  $\pm 3\text{db}$  ( $+3\text{db} = 1.41$  であるから41%増し、 $-3\text{db} = 0.701$  であるから30%減)、および位相の誤差を  $\pm 10^\circ$  まで許すとすれば近似関数の許容帯域幅は表-2のようになる。

表中ゲインの項の ( ) 中の数字は図-2で4次、5次の近似伝達関数のゲイン—周波数曲線が  $-3\text{db}$  の線を越える誤差を無視することを許さないとした場合の  $\Omega$  の許容帯域幅を示す。

相隣った次数の近似伝達関数を比較すると、 $\Omega$  の許容帯域幅がゲインの方でのびたところは位相の方が余りのびず、あるいはかえって減ったりし、また反対に位相で許容帯域幅がのびれば、ゲインの方で余りのびないということが見出される。

近似伝達関数を用いて、むだ時間の伝達関数を近似する場合、ゲインの方で近似の次数の少いわりに大きな  $\Omega$  の許容帯域幅が得られるのは5次近似伝達関数であり、位相の方でいえば2次近似伝達関数である。ことに2次近似伝達関数が位相の誤差において、3次、4次、5次近似伝達関数より許容帯域幅が大きいということは注目すべきである。すなわち労力少くしていい近似を得ることができる。

しかし現実に要求されるのはゲインと位相の両面においてできるかぎり誤差の少い近似伝達関数であろう。ところが表-2の結果からはこの要求を完全に満足している近似伝達関数を求めることはできない。しかし、5次近似伝達関数が次数のわりにこの要求を比較的満足しているように思

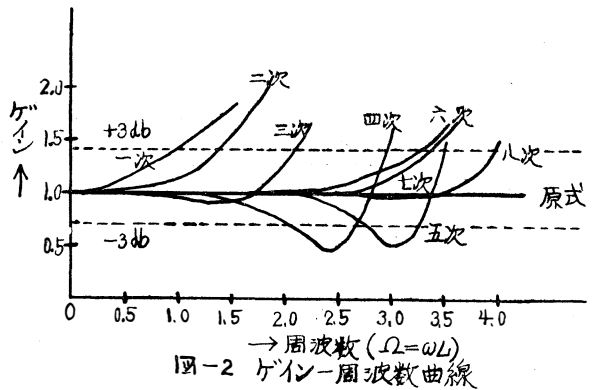


図-2 ゲイン—周波数曲線

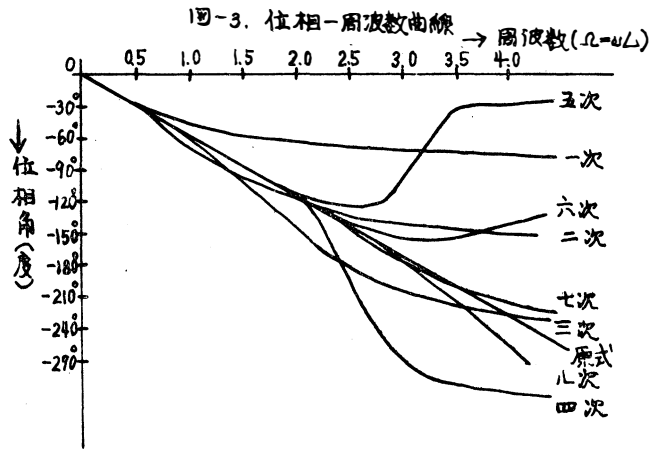


図-3. 位相—周波数曲線

われる。

表 - 2

近似伝達関数	$\Omega$ の許容帯域幅	
	ゲイン ( $\pm 3\text{db}$ )	位相 ( $\pm 10^\circ$ )
原式	$0 \sim \infty$	$0 \sim \infty$
1次近似伝達関数	$0 \sim 1.0$	$0 \sim 1.0$
2次近似伝達関数	$0 \sim 1.4$	$0 \sim 2.5$
3次近似伝達関数	$0 \sim 2.2$	$5 \sim 1.4$
4次近似伝達関数	$0 \sim 3.0$ (2.1)	$0 \sim 2.1$
5次近似伝達関数	$0 \sim 3.6$ (2.8)	$0 \sim 2.3$
6次近似伝達関数	$0 \sim 3.3$	$0 \sim 2.9$
7次近似伝達関数	$0 \sim 3.5$	$0 \sim 3.8$
8次近似伝達関数	$0 \sim 4.0$	$0 \sim 3.5$

(昭和36年11月30日受付)