絶縁破壊の統計学的研究（第一報）

絶縁破壊値の確率変数としての取扱いに就て

斉　藤　金　一

The Statistical investigation of the Dielectric Break Down. (Part I)

On the Distribution function of the Dielectic Break Down Measurements.

Kin-ichi SAITO

The measurements of dielectric break down strength consist of undeterministic variables, but they conform to a rule. Assuming that the distribution of the variables is normal, a series of these reports is starting.

I 緒　言

本論文は「絶縁破壊の統計学的研究」と云う題名で 六報から成立ち，第三報まで 本号第四報以下は次号に掲戴する予定である。本報は その緒論に相当する部分である。電気材料の 絶縁破壊値の最も信頼度の高い値を得るためには，特別の場合を除いて 測定を数回行って その代表値を用いるのが最も合理的である。同一条件で 絶縁破壊を数回行う場合， 破壊値は測定者が如何にその測定条件を一定にした所で その値は非決定論的な変動（測定者に制御出来ない変動）を含むものである。 しかしその変動は， 集団的にはある規則性をもっているものと考えられる。 此の非決定論的には変動するか或る規則性を持っている，と云う条件から 絶縁破壊測定値は数学的に 確率変数で表はす事が出来る。その確率変数の密度函数を 正規分布と仮定する。 此の事が本論文全体の基礎であり出発点である。

II 本　論

〔1―1〕

気体液体及び固体の絶縁破壊値の最も信頼し得る値を求めるのに， 唯一度の測定による事は， その測定が如何に精密な管理下に行なわれたとしても，非常に危険な事である。

それは例えば， 固体の場合たまたま選ばれた試料に微視的な亀裂が 存在する事もあり得るからである。又気体，液体の場合 偶然電極に異物が附着する場合も同様である。従って 試料が唯一度しか得られない場合及び 一回の測定が次の測定値に著しい影響を与える場合を除いて， 測定条件がそのために変化しない様十分な管理のもとで， 測定を適当な回数行って， その代表値をもって，絶縁破壊値と定める事が最も合理的であると考えられる。

絶縁破壊を数回行う場合 その絶縁破壊値は測定者が 如何にその測定条件を一定にした所でその値は非決定論的な動揺を含むものである。 之は気体， 液体で１度の破壊の後，耐力が再び恢復して，初めの破壊が次の破壊値に 全く影響をあたえないと考えられて 数回測定を用う場合，又は固体の場合の様に測定毎に試料を取り替えねばならぬ場合でも同様である。

ここで絶縁破壊測定値は， その絶縁物の真の絶縁耐力と測定条件の変化に基く 変動との和であると考える。測定条件は 測定者によって 或程度まで管理出来るが無限に出来るものではない。周囲湿

度とか電極圧力とかは一定にして測定出来ても，電極表面の微視的な変化，電圧印加過程に於ける試料の温度上昇の状態等は一般には管理できないものである。

次にもし上述の測定条件を完全に一定に出来たとした場合，絶縁破壊測定値と云うものは測定毎に同じ値を得るであろうか，即ち上述の真の絶縁耐力と云うものが一意的に存在し得るだろうか。之は気体，液体及び固体の絶縁破壊機構が衝突電離作用，γ 作用と云う様な本質的に確率論的なもの —之は量子統計力学によって説明されている— を含む以上やはり確率性をもって変動をするものと考えねばならない。

以上の様に測定条件を完全には管理出来なくて，而も，絶縁破壊機構そのものが本質的に確率性をもつ以上，之等の合成的結果として表わされる気体，液体，及び固体の絶縁破壊値は当然測定毎に非決定論的な変動をするすのである。

次に此の測定値の変動は全く不規則であるだろうか，或は何らかの規則性を有するだろうか，常識的には気体，液体，固体の如何を問わず，材料が決まり電極間隔が決まれば，或値 —我々が一般に測定値として用いている平均値の様な値— を中心にして上下に分布するもので絶縁破壊値の変動は分布の様式は明らかでないが集団的には，或規則性をもっているものと考えられる。そこでここでは或る様式の規則性をもって変化するものと仮定する。

〔1—2〕

そうすれば，此の様に (1)非決定論的な変動をして (2)而も集団的には規則性のある変動をする変数は，数学的には確率変数として定義されるものである。即ち前述の様によく管理された測定条件のもとに測定される絶縁破壊値は確率変数で，而も絶縁破壊値は連続的な値をとり得るから，連的確率変数である。（以後本論文に表われて来る絶縁破壊値を実現値する確率変数はすべて連続的確率変数として取扱う。）今それをXで表わし，x を任意の実数とするとXは x より小さい事も x より大きくなる事もあるだろうが，(1)(2) の条件が成立する以上 $X \leqq x$ となる確率は一意的に決ってくる。

此の確立をP $\{X \leqq x\}$ で表わし

$$F(x)=P\{X \leqq x\} \quad (-\infty < x < \infty)$$

とおくとF(x) は x の函数とみなすことが出来る。此のF(x)が即ち確率変数Xの分布函数である。絶縁破壊値の様な連続的確率変数の分布函数は又連続的分布函数であって，定義から当然次の様な性質がある。

(a) F(x) はxの非減少函数である。

(b) $\lim_{x \to \infty} F(x)=F(\infty)=P\{X<\infty\}=1$

$\lim_{x \to -\infty} F(x)=F(-\infty)=P\{X<-\infty\}=0$

(c) Cを任意の実数として，x が大きい方からCに近ずく極限を F(C＋0)で，x が小さい方からCに近づく極限を F(C－0)で表わすと，連続的分布函数に於ては

$$F(C+0)=F(C-0)=F(C)$$

次に此の絶縁破壊値を表わす連続的確率変数Xの分布函数 F(x) に対して

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

を満足する $f(x)$ が存在するものと仮定する。之が絶縁破壊値を表わす確率密度函数である。F(x) が非減少函数であるから $f(x) \geqq 0$ である。

〔1—3〕

F(x) が x の如何なる形の函数であるか即ち$f(x)$ の形を定める事が〔1—1〕に述べた非決定論

的に変動する絶縁破壊値の集団的規則性の形を定めることである。ここで如何なる絶縁破壊値も同じ函数形の $f(x)$ を持つであろうか。球対球電極で間隙長 2 cm の空気の絶縁破壊値の n 個を実測値とする確率変数，球対針電極で間隙長 3 cm の変圧器油の絶縁破壊値の n 個を実測値とする確率変数平板電極間にはさまれた厚さ 1 mm の塩化ビニールの絶縁破壊値の n 個を実測値とする確率変数等々がすべて同じ分布函数 $F(x)$ をもち同じ確率密度函数 $f(x)$ をもつだろうか。

此の問題は〔1－1〕に述べた様に，数個の測定値を得るのに測定条件を出来る限り一定にした場合 一此の程度が測定の精度になるわけであるが一 それらの測定値に表われる変動は

（Ⅰ）測定者の制御出来ない測定条件の変動する部分と

（Ⅱ）気体，液体及び固体の夫々の絶縁破壊機構からくる本質的な確率的変動をするものとからなり

（Ⅰ）は一般的には測定誤差に属するものと考える事が出来て 例えば 測定中の周囲湿度の微少変化，一度乃至数度の放電による電極表面の微視的な変化，固体試料の場合，その厚さの微少なちがいの影響等の様に（A）それらが絶縁破壊値に及ぼす影響はいづれも極めて小さく（B）互に独立していて即ち影響の正負が互に独立で（C）而も測定値に表われる誤差は之らの独立の微少誤差の代表和として見なされるから絶対破壊値に表われる変動が（Ⅰ）のみの影響と考えるならば，それは明らかに Gauss の曲線即ち正規分布に従うものと考えてよい。

（Ⅱ）に関しては〔1－1〕で述べた様に絶縁破壊機構に関する事で気体，液体，固体に共通した理論は勿論まだ確立されていないが，共通的に云える事は衝突電離作用（係数 α 及び β）γ 作用，光電離作用（係数 θ）等の本質的に確率的の量が複雑に絶縁破壊電圧（火花電圧）に影響している事は当然考えられる事である。此の事に関連して，気体の場合九州大学の宮副泰氏の論文[5]「火花の統計的性質に関する研究（1960）」があるが然し此の論文では火花電圧の分布函数まで出していない様である。

今気中絶縁破壊機構の中最も簡明な理論と考えられている場合を例として考える。[18][19] 即ち平等電界中の気体の絶縁破壊機構を Townsend の理論から電子の衝突電離係数 α 及び陽イオンが陰極に衝突して二次電子を放出する γ 作用のみが主に作用すると考える場合その電流密度 I_0 は

$$I_0 = i_0 \frac{\varepsilon^{\alpha d}}{1-\gamma(\varepsilon^{\alpha d}-1)}$$

但し i_0 は陰極表面の照射などにより陰極表面間に供給される電子による電子流密度であたえれれ，此の式から自続放電に移る条件式として

$$1-\gamma(\varepsilon^{d\alpha}-1)=0$$

$$\therefore\ \alpha d=\log\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) \qquad (11)$$

の Schumann の式が導かれ一方，相対電離係数 α/P 及び相対電界強度 E/P との間には（P は気圧，E は電界強度）

$$\frac{\alpha}{P}=A\varepsilon^{-\frac{B}{E/P}} \qquad (12)$$

なる関係が存在するから（A，B は気体の種類により定まる定数）式(11)(12)式と火花電圧 $Vs=E\alpha$ なる関係から

$$Vs=B\frac{Pd}{\log\left\{\dfrac{AP\alpha}{\log\left(1+\dfrac{1}{\gamma}\right)}\right\}} \qquad (13)$$

なる関係が求められる。（此の式で γ の影響を無視すれば Paschen の法則を表わす。）

此式では確率的に変動するαは函数形の中に入っていないがγの影響は 此の式からは極く少ないとしても入っていて絶縁破壊値Vsの確率的変動の原因になっている。更に液体，固体の場合は勿論気体の場合でも此の式の様に簡単なものとは考えられず 更に複雑な形で 火花電圧の変動の原因が入って来るものと考えられる。従って（Ⅱ）即ち破壊機構からくる本質的な変動が如何なる形式であるか解らないから，之と（Ⅰ）の偶然誤差の合成した形で表われる絶縁破壊値を表わす確率変数Xの変動の形，即ち$f(x)$の函数形は定められないのである。

〔1−4〕

然し（Ⅱ）が（Ⅰ）に対して無視出来ると考える場合（式（13）でγの変動の影響は小さいから無視するという様な場合）又は（Ⅱ）も又（Ⅰ）の様に偶然誤差の様な性質をもった変動をするものと仮定すれば$f(x)$の函数形を正規分布であると仮定出来る。（正規分布の加法性による。）

即ち慎重に管理された条件のもとで測定された気体， 液体或は 固体の絶縁破壊値を表わす確率変数の確率密度函数$f(x)$は正規分布 $N(a,\ \sigma^2)$ であると仮定する。ここに aは母平均σ^2は母分散である。即ち

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\Sigma^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

此の仮定の正当性は前述の様に直接証明する事は 出来ないが 統計学に於ては一般に余り神経質にならなくともよいとされている[(6)(14)]。それは

(1) 中心極限定理により，平均の場合， その標本分布は常に正規形に近づく事， 即ち確率変数Xの母集団が平均a分散σ^2をもつ場合その標本平均を表わす確率変数Xの分布函数は元の母集団の分布形の如何をとわず $n\rightarrow\infty$ に於て，正規分布函数 $N\left(a,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に収斂する。

(2) 本論文の統計処理に用いられる，t 分布， F分布，K^2 分布等は正規性の前提が成立しない場合でも余りちがった値をあたえないという性質があるからである。

Ⅲ 結　　論

同一条件のもとで破壊を数回行って， 絶縁破壊値を求める場合， 其の測定値が確率変数の実現値と見なし得る事を指摘し， その分布函数を正規型であると仮定し得る所以に就て論じた。 固体，液体，気体の如何を問はず絶縁破壊値が 測定者に制御出来ない不測の変動をする事は 我々が常に経験する所である。 此の一連の論文は統計学を用いて 此の現象を理論的に解明しょうとするもので本報では共の基礎的な仮定を行った。

Ⅳ 補　　遺 (1)〜(4)

統計理論の中第二報以下の解析に直接必要な部分のみを記述する。

(1) k^2分布 (chi-sguare)：

Gamma 分布

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(a+1)b^{a+1}}x^a e^{-\frac{x}{b}}\quad 但し\quad x>0,\ a>-1,\ b>0$$

に於て $a=\frac{m}{2}-1$，$b=2$ と置いたものをk^2分布と云ひ，その密度函数$f(k^2)$は

$$f(k^2)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(k)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{k^2}{2}},\quad K^2\geqq 0$$

此の分布を規定する唯一の parameter m を自由度と云いfで表はす。そしてK^2分布の平均値

$E(\kappa^2)$ 及び分散 $V(k^2)$ は

$$E(\kappa^2)=m \quad V(\kappa^2)=2m$$

であたえられる。

K^2 分布と正規分布との関係は，自由度 $f=1$ の場合，K^2 の平方根に開いた K の分布は正規分布 N(0 ， 1) に一致する。例えば

$$K^2=\frac{n(\bar{x}-a)^2}{\sigma^2}$$ が $f=1$ の K^2分布をする場合

$$K=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-a)}{\sigma}$$ は N(0 ， 1) に従う。

(2) F分布 :

二つの確率変数 $K^2{}_1$，$K^2{}_2$ が独立に夫々自由度 $f_1=m_1$，$f_2=m_2$ のK^2分布をするとき

$$F=\frac{K_1{}^2}{m_1}\Big/\frac{K^2{}_2}{m_2}$$

を自由度 $f_1=m_1$ $f_2=m_2$ の F分布と云い，その密度函数 $g(F)$ は

$$g(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m1}{2}}F^{\frac{m1}{2}-1}\left(1+\frac{m_1}{m_2}F\right)^{-\frac{m1+m2}{2}}$$

であたえられる。

(3) 平方和 :

Xi $(i=1.2,\ \cdots\cdots n)$ を N $(a,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数とすると

$$[S=\sum_{i=1}^{n}(xi-a)^2]=[S_{R(G)}=\sum_{i=1}^{n}(xi-\bar{x})^2]+[S_G=n(\bar{x}-a)^2]$$

$f=n$のσ^2K^2分布　$f=n-1$のσK^2分布　$f=1$のσ^2K^2分布

$E(S)=n\sigma^2$　　$E(S_{R(G)})=(n-1)\sigma^2$　$E(S_G)=\sigma^2$

此の式は母数aを中心とした確率変数 X の平方和 S は， a を中心とした標本平均 $\bar{X}$ の平方和 S_G と，$\bar{X}$ を中心としたXの平方年 $S_{R(G)}$ と云う独立な二成分と分けられる事を示す。

S_G は $f=1$ の σ^2K^2 分布，$S_{R(G)}$ は $f=n-1$ の σ^2K^2 分布に従ひ両者は独立であるから(2)より

$$F=\frac{S_G}{1}\Big/\frac{S_{R(G)}}{n-1}$$

は $f_1=1$，$f_2=n-1$ の F 分布をなす。此の関係を分散分析に用いる。

（昭和36年11月30日受付）