矩形波などの不連続波のフーリェ級数について

森　光　三
四谷平治

On the Fourier's Series of the Discontinuous Waves as a Rectangular Wave.

Mituzo MORI
Heizi YOTUYA

As an example of a continuous wave, Fourier's series of a triangle wave with equal sides is computed as far as ten terms. The series of some discontinuous waves, such as a rectangular wave, a saw-teeth wave and a rectangular impulse wave, are computed. The highest point does not approach the original curve even if number of terms is increased infinitely. It is shown that the highest point can be calculated by the sine integral, and the highest point for the rectaugular wave and the saw-teeth wave exceeds the original height by 17.9%

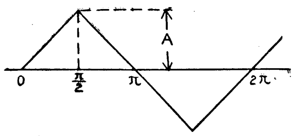
1. 概　　要

連続波の一例として二等辺三角形のフーリェ級数を 10項までとつて計算した。三角波との差は非常に小さく，項数を多くとるに従つて三角波と一致する。矩形波などの不連続波に対してはこのような事が成立しないことを確めるために，矩形波のフーリェ級数を第６項まで，第51項まで及び181項までとつて計算した。最高の点は，第181項まで計算しても矩形波より17,9%だけ高いという結果となつた，項数を無限に増加する場合の最高点の高さを正弦積分を用いて計算した。この結果も17.9%だけ高くなり，前の数値計算の結果と一致した。鋸歯状波及び矩形衝撃波に対しても同様の計算をした。

2. 二等辺三角波

図—１の二等辺三角波をフーリェ級数に展開すれば

$$y=\frac{8A}{\pi^2}(\sin x-\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x-\cdots\cdots\cdots)$$



図—１

ここで　$A=\frac{\pi^2}{8}=1.2337$　とすれば

$$y=\sin x-\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x-\cdots\cdots\cdots$$

項数を10とすれば

$$y=\sin x-\frac{1}{9}\sin 3x+\cdots\cdots\cdots-\frac{1}{361}\sin 19x$$

$x=10°$，$20°$，………$90°$ に対するyの値を計算した。以下計算は小数点下4桁の三角表を用い，計算機により有効数字4桁（４捨５入）まで出し，和をとり小数点下4桁（４捨５入）まで計算した。表—１

を得た。

x	y	三角波に対する値 z	$y-z$
0	0	0	0
10°	0,1375	0,1371	0,0004
20	0,2733	0,2741	−0,0008
30	0,4125	0,4112	0,0013
40	0,5461	0,5483	−0,0021
50	0,6872	0,6854	0,0018
60	0,8206	0,8224	−0,0018
70	0,9611	0,9595	0,0016
80	1,0971	1,0966	0,0005
90	1,2087	1,2337	−0,0250

表—1

90° で差が最大で 0,025であるがグラフに書けばほとんど三角波と一致する。項数を無限大とし，$x=90°$ に対する y の値は

$$y=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

この級数の値は$\frac{\pi^2}{8}$であることが知られている。すなわち，二等辺三角波の $x=90°$ に対する y の値である。三角波のような連続波に対しては，項数を大とすればフーリェ級数の示す曲線はもとの曲線と一致する。

3. 矩　形　波

図—2の矩形波のフーリェ級数は

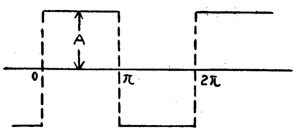
$$y=\frac{4A}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 6x+\cdots\cdots\right)$$

ここで　$A=\frac{\pi}{4}=0,7854$　とすれば

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots\cdots$$

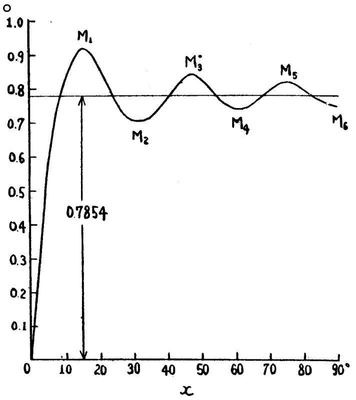
項数を6とすれば

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{11}\sin 11x$$

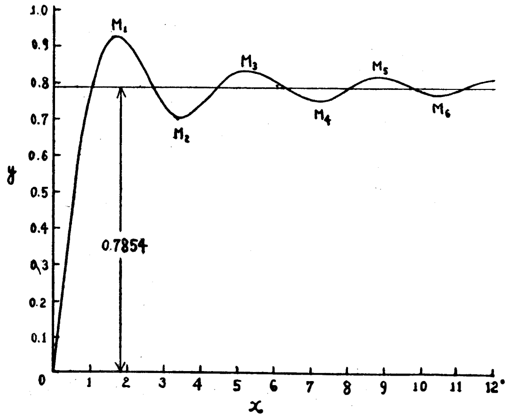


図—2

この曲線は図—3となる。最高の点 M_1は矩形波の高さよりかなり高い，項数を増して51とすれば M_1は矩形波の高さに接近するかもしれないので，これに対する曲線を出した。



図—3



図—4

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{101}\sin 101x$$

xが 0° から 12° までに対する y の値を計算して表—2，図—4を得た。

x	y
0	0
0.5	0.4262
1	0.7471
2	0.9137
2.5	0.8324
3	0.7453
3.5	0.7088
4	0.7333
5	0.8301
6	0.8035
7	0.7466
7.5	0.7574
8	0.7868
9	0.8181
10	0.7725
11	0.7754
12	0.8036

表—2

図—3と図—4を比較してみると，極大極小の点に左から番号を付してM_1，M_2，M_3………とすればM_1点の高さは両図に於て等しい。M_2 等に対して同じことが云える。ただ図—4に於てはM_1，点のx座標が図—3のM_1点のx座標より小さくなつている。

最高点M，の高さが項数を増せばどのように変るかをみる。項数をmとすれば

$$y=\sin x+13\sin 3x+\cdots\cdots+\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)x$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x+\cos 3x+\cdots\cdots\cdots+3cs\ (2m-1)\ x$$

$x=\dfrac{1}{m}\ \dfrac{\pi}{2}$にて $\dfrac{dy}{d_n}=0$ となる。すなわちM_1点の x座標は$\dfrac{1}{m}\ \dfrac{\pi}{2}$である。これに対する$y$の値を計算する。表—3を得た。この結果から，項数を増加してもM_1の高さは0,9259より減小しよないうに思われる。

項数	M_1の x座標	M_1の 高さ
7	90°	1
3	30	0.9333
5	18	0.9286
7	12.85	0.9273
9	10	0.9266
11	8.13	0,9266
21	4.28	0,9261
51	1.76	0,9260
91	0.99	0,9259
181	0.496	0,9259

表—3

4. 正弦積分の利用

項数を無限に増加した場合に最高値の収斂する値を 正弦積分を利用して 求めることができる。項数をmとすれば

$$y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots\quad+\frac{1}{2m-1}\sin(2m-1)x$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\qquad=\sum_{n=1}^{m}\frac{x}{(2n-1)x}\sin(2n-1)x$$

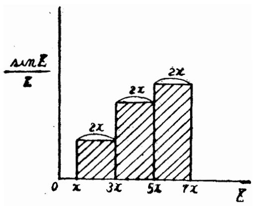
ここで $(2n-1)x=z$，$(2m-1)x=z_0$。とおく。

$$y=\sum_{n=1}^{m}x\ \frac{\sin z}{z}$$

$n=1,\ 2,\ 3,$ ………に対し $z=x,\ 3x,\ 5x,$ ………となる。

z を横軸，$\dfrac{\sin z}{z}$を縦軸として図—5を作る。斜線を施した部の面積の和は

$$S=\sum_{n=1}^{m}2x\ \frac{\sin z}{z}\qquad\qquad \therefore\quad y=\frac{1}{2}S$$



図—5

前節に述べたように，M_1点のx座標は項数を無限大にすれば零に収斂する。従つてM_1の高さを求める場合には，非常に小さい x に対してyを計算することになる。

$2x=\triangle z$とすれば

$$S=\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin z}{z}\triangle z$$

$m\to\infty$とすれば $x\to 0$，$\triangle z\to 0$ であるから，$m\to\infty$ のときは S は積分表示となる。

$$S=\int_{0}^{z_0}\frac{\sin z}{z}dz$$

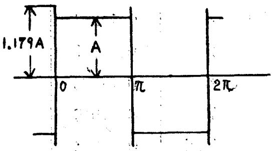
積分の限界をきめるには，n=1 にて $z=x$，これは $m\to\infty$ とすれば $x\to 0$ であるから下限は 0 になる，n=m にて $z=(2m-1)x=z_0$ であるから，上限は z_0 である。z_0 によつて定積分の値が定まる。この正弦積分は $z_0=\pi$ にて極大となる，正弦積分の表から

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}dz=1.8517 \qquad y=\frac{1}{2}\times 1.8517=0.9259$$

これは91項までの数値計算の結果と一致する M_1 の高さは 0.9259 よりは小さくならない。

$$\frac{0.9259-0.7854}{0.7854}=17.9\%$$

結局フーリェ級数の項数を大にして曲線をかくと 図—6 のように $x=0$，$x=\pi$ にて 17.9% だけAよりとび出した図形になり矩形波には一致しない。



図—6

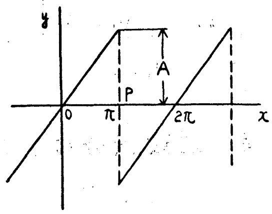
5. 鋸 歯 状 波

図—7 の鋸歯状波のフーリェ級数は

$$y=\frac{2A}{\pi}\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\cdots\cdots\right]$$

原点をP点に移せば

$$y=-\frac{2A}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots\cdots\right]$$



図—7

ここで $A=\dfrac{\pi}{2}=1.5708$ とすれば

$$y=-\left[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\sin nx=-\sum_{n=1}^{m}\frac{x}{xn}\sin nx$$

ここで $nx=z$，$mx=z_0$ とおく

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots\cdots+\cos mx\right]$$

$x=\dfrac{\pi}{m+1}$ とすれば $\dfrac{dy}{dx}=0$ となる。n=1, 2, 3, ………に対し，$z=x$, $2x$, $3x$, ………となる。

$x=\triangle z$ とおく

$$y=-\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin z}{z}\triangle z$$

$m\to\infty$ とすればこれは積分表示となる。

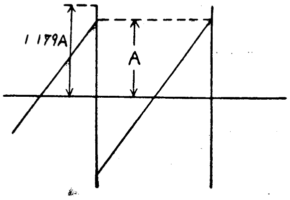
$$y=-\int_0^{z_0}\frac{\sin z}{z}dz$$

この正弦積分は $z_0=\pi$ にて極大となる。

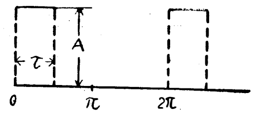
$$y=-\int_0^{\pi}\frac{\sin z}{z}dz=-1.8517 \qquad \frac{1.8517-1.5708}{1.5708}=17.9\%$$

mが非常に大きい場合にフーリェ級数の示す曲線は図—8 のようにAより 17.9% だけとび出している。

6. 矩形衝撃波



図—8



図—9

図—9 の矩形衝撃波を示す級数は,

$$y=\frac{A\tau}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}\sin n\tau\cos nx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n\pi}(1-\cos n\tau)\sin nx$$

ここで $\tau=\frac{\pi}{2}$ の場合をとる。級数は次の形になる。

$$y=\frac{A}{4}+\frac{A}{\pi}\left[\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x\cdots\cdots\right]$$

$$+\frac{A}{\pi}\Big[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots$$

$$+2\left\{\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{10}\sin 10x+\cdots\cdots\right\}\Big]$$

正弦の級数は前節と同様に正弦積分とすることができる。

$$\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\int_{o}^{z_o}\frac{\sin z}{z}dz$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{6}\sin 6x+\cdots\cdots=\frac{1}{4}\int_{o}^{z_o}\frac{\sin z}{z}dz$$

$$\therefore\quad y=\frac{A}{4}+\frac{A}{\pi}(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\cdots\cdots)$$

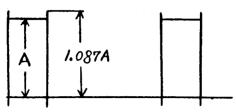
$$+\frac{A}{\pi}\int_{o}^{z^o}\frac{\sin z}{z}dz$$

$z_o=\pi$ とすれば正弦積分は極大で 1.8517となる。余弦級数は x が非常に小なる値と仮定すれば

$$\cos-\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots\cdots=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots=0.7794$$

$$\therefore\quad y=A\left[0.25+\frac{1}{\pi}0.7794+\frac{1}{\pi}1.8517\right]$$

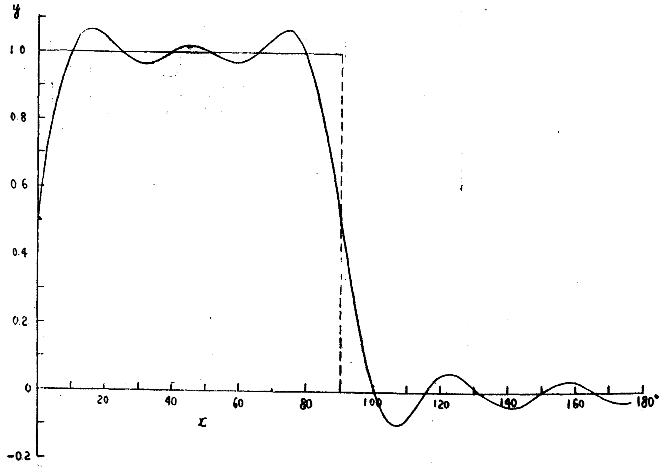
$$=A\left[0.25+0.8375=\right]1.0875A$$



図—10

$\tau=\frac{\pi}{2}$ の矩形衝撃波に対して項数を大にしてフーリェ級数を描くと, 図—10のように8.8%だけAよりとび出した波形になる。

なお第10項までとつて級数を計算すると, 表—4, 図—11となり, Aから約7%とび出している。



図—11

x	y	x	y
0	0.5158	95°	0.2198
5°	0.8004	100	−0.0014
10	0.9956	105	0.0993
15	1.0706	110	−0.083
20	1.0519	115	−0.0104
25	1.0000	120	0.0505
35	0.9784	125	0.0596
40	1.0070	130	0.0221
45	1.0218	135	−0.0259
50	1.0070	140	−0.0473
55	0.9784	150	0.0087
60	0.9694	160	0.0335
65	1.0000	170	−0.0252
70	1.0519	180	−0.0158
80	0.9956		
85	0.8004		
90	0.5158		

表—4