単位函数の複素積分表示から実積分表示を導くこと

森　　光　　三

Deduction of the Real Integral Representation of the Unit Function from the Imaginary Integral Representation.

Mituzo MORI

The unit function is represented by the real integral and the imaginary integral. Then the real integral representation is to be deduced from the imaginary integral. A method is shown in the text book of transient phenomenon published by the Institute of Electrical Engineers of Japan. But considered pricisely this method is wrong. A correct method is shown in this paper.

過渡現象論にラプラス変換というのがある。これは相当難解なので，教科書の記載も不完全であり，又誤りの箇所もある。以下述べるのはこの一例である。単位函数は実積分で表示することもでき又複素積分で表示することもできる。従つて複素積分表示から実積分表示を導くことができるはずである。この証明であるが，過渡現象論（電気学会編）には次のようになつている。

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{e^{pt}}{p}dp=\begin{cases}1 & (t>o)\\ 0 & (t<o)\end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

これが単位函数の複素積分表示で $t>o$ ならば1で，$t<o$ ならば0である。

ここで

$$p=j\omega \quad \cdots\cdots(2)$$

$$dp=jd\omega$$

とおけば (1) は

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{\omega}d\omega=1 \quad (t>o) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{\omega}d\omega=0 \quad (t<o) \quad \cdots\cdots(4)$$

(4) で $t=-t'$（t' を正）とすれば

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t'}}{\omega}d\omega=0 \quad (t'>o) \quad \cdots\cdots(5)$$

t' を t と書き換えて (5) は

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}d\omega=0 \quad (t>o) \quad \cdots\cdots(6)$$

(3)－(6) を作る。

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{\omega}d\omega=1 \quad (t>o) \quad \cdots\cdots(7)$$

しかるに

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega j}}{2j}&=\sin\omega t\\ \frac{e^{t\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}&=\cos\omega t\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(8)$$

があるから，(7) は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\pi \quad (t>o) \cdots\cdots(9)$$

次に (3) から

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}d\omega=1 \quad (t<o) \cdots\cdots(10)$$

(4)－(10) から

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{\omega}d\omega=-1 \cdots\cdots(11)$$

(8) を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=-\pi \quad (t<o) \cdots\cdots(12)$$

$\frac{\sin\omega t}{\omega}$ は ω に対して偶函数であるから $-\infty$ から 0 までの積分と 0 から ∞ までの積分は等しい，故に (9) と (12) から

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\frac{1}{2} \quad (t>o) \cdots\cdots(13)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=-\frac{1}{2} \quad (t<o) \cdots\cdots(14)$$

(13) から

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=1 \quad (t>o)$$

(14) から

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=0 \quad (t<o)$$

総合して

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}1 & (t>o)\\ 0 & (t<o)\end{cases} \cdots\cdots(15)$$

(15) が単位函数の実積分表示である。従つて単位函数の複素積分 (1) から実積分 (15) が導かれた。

―――――・―――――・―――――

以上が過渡現象論に記載された証明であるが，これを点検してみて容易に誤りを見出すことができない。しかしどうもおかしい。例えば

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}}{\omega}d\omega=1 \quad (t>o) \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t}}{\omega}d\omega=0 \quad (t>o) \cdots\cdots(6)$$

(3)＋(6) を作つてみる。

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j\omega t}+e^{-j\omega t}}{\omega}d\omega=1 \cdots\cdots(16)$$

(8) を利用して，(16) は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega=\pi j \cdots\cdots(17)$$

この式は実数の定積分が虚数になつているから誤りである。(3)－(6) から作つた (12) も正しいかどうか。

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \quad (t>o) \cdots\cdots(12)$$

函数論の書を見ると次のような実積分がある。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

これは正しい。従つてこれから (12) は $t=1$ の時は成立するし，t の正の任意の値に対しても成立することが証明されるが，上記の証明は誤つた操作をした結果偶然結果が正しく出たというにすぎない。

ではどこに誤りがあるか容易に見出すことはできないが，誤りは証明の頭初にある。

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = \begin{cases} 1 & (t>o) \\ 0 & (t<o) \end{cases} \cdots\cdots(1)$$

に対し

$$p = j\omega \cdots\cdots(2)$$

とおいて (1) が次のように変形される。

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & (t>o) \cdots\cdots(3) \\ 0 & (t<o) \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

としたが，ここに誤りがある。元来 (1)の積分路は虚軸を $-j\infty$ から$+j\infty$ までではなくて図1のように原点を右にさけている。$-j\infty$ から虚軸に沿うて原点の近くの A 点まで，それから半円上を反時計式に B を通つて C 点まで，C から虚軸に沿うて $+j\infty$ までである。従つて $-j\infty$ から A まで，C から $+j\infty$ までは$p=j\omega$ とおいてよろしいが，A から B を通つて C までは，$p=j\omega$ とおくことができない。従つて (3)，(4) は誤りである。では正しい証明はどうか，要するに (1) の積分を $-j\infty$ からAまで，AからCまで，Cから$j\infty$ までに分けて正直に積分するより他ない。次がその証明である。

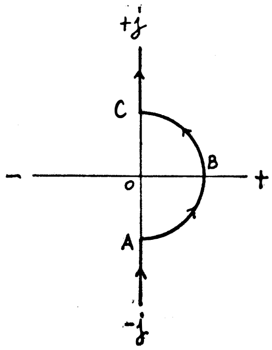

図 1

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = \begin{cases} 1 & (t>o) \\ 0 & (t<o) \end{cases} \cdots\cdots(1)$$

I を3つの部分に分ける。図1参照

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{\mathrm{A}} \frac{e^{pt}}{p} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathrm{ABC}} \frac{e^{pt}}{p} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathrm{C}}^{j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp$$

半円ABCの半径を a とすれば

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{-ja} \frac{e^{pt}}{p} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{\mathrm{ABC}} \frac{e^{pt}}{p} dp + \frac{1}{2\pi j} \int_{ja}^{j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp \cdots\cdots(18)$$

(18) の第1項第3項をまとめ，$p=j\omega$ とおく。

$$\text{第1項}+\text{第3項} = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{-\infty}^{-a} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega + \int_a^\infty \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega \right]$$

$\omega = -z$ とおき変形すれば

$$\int_{-\infty}^{-a} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega = \int_\infty^a \frac{e^{-jzt}}{z} dz = \int_\infty^a \frac{e^{-j\omega t}}{\omega} d\omega = -\int_a^\infty \frac{e^{-j\omega t}}{\omega} d\omega$$

途中で z を ω と変えるのは，定積分の変数は x と書いても z と書いても ω と書いても変らないからである。

$$\text{第1項}+\text{第3項} = \frac{1}{2\pi j} \int_a^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega} d\omega \cdots\cdots(19)$$

(18) の第2項に対す計算では

$$p=ae^{j\phi}=a\cos\phi+ja\sin\phi \quad \cdots\cdots(20)$$
$$dp=aje^{j\phi}d\phi$$

とおかねばならない。

$$第2項=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{ae^{j\phi}t}}{adj}ajej\phi d\phi=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}je^{at\cos\phi}e^{jat\sin\phi}d\phi \quad \cdots\cdots(21)$$

円の半径 a は如何程小くとつても差支 ないから，$a\to0$ とする。

(19) から

$$第1項+第3項=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

(21) で

$$\lim_{a\to0} e^{at\cos\phi}e^{jat\sin\phi}=1$$

であるから，

$$第2項=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}jd\phi=\frac{1}{2\pi j}j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

故に

$$\mathrm{I}=(第1項+第3項)+第2項=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega+\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(22)$$

この式の右辺は単位函数の実積分表示である。よつて単位函数の複素積分表示から実積分表示が導かれた。