電源電圧変動の統計的性質

四　谷　平　治

Statistical Properties of the Fluctuation of Source Valtage.

Heiji YOTSUYA

Recently in the field of analysis of automatic control systems, the statistical method becomes widely to be introduced. This is the case that reference input or disturbance to a servomechanism is not a fixed single-valued function, but a statistically random time function. There are many random time functions, for example; the rush-wind against airplane, generator load varing complexly, noise occuring in controlling circuits, variation of radar waves and so on.

In this paper there has been treated the fluctuation of source voltage. This can be considered a stationary time series. The correlation function was determined on graph paper from data of observations. and from this the spectral density function was also derived. These are very important means for the statistical design of automatic control systems.

1. 緒　　　言

近年自動制御系の解析の手法の中へ確率的な考えが取り入れられ注目をうける様になつてきた。即ち系に加えられる入力や外乱が確定的な単一函数でなくて不規則な時系列となつている様な場合である。不規則な変化をする入力や外乱の例は航空機に当る突風，複雑な変化をする発電機負荷，制御回路の各部に発生する雑音，レーダー電波の変動など種々のものがあげられるが，本稿で問題にしようとする電源電圧の変動もやはりこれに属するものと考えられる。この様な変化は時間に対する既知の単一函数として表わすことが出来ないし，直接に Fourier 変換や Laplace 変換を施す普通の手段では処理することは出来ないので，これを部分振動に分けて平均の電力の周波数分布即ちスペクトル密度を求めてこれによつて問題を処理するのである。

ここでは電源電圧変動の統計的性質即ち相関函数とスペクトル密度を求めたので報告する。

2. 相関函数とスペクトル密度

時間に対して不規則に変化する量 C（t）を考える。この内で時間 t の原点をずらせても C（t）の基本的性質たとえば後で述べる相関函数が変化しない様な場合を定常不規則函数　(stationary random function）という。しかも不規則といつてもその時間平均と集合平均とが等しいと仮定することにする。この様な性質をエルゴート性（ergodic）という。即ち時系列は時間に対して確率的な変化をする函数又は系列で表わされ，その母過程である確率過程からの標本と考える。時系列の集合を $f(\alpha,t)$ で表わせばパラメータ α は確率空間を構成し，その値を指定すれば一つの時系列がこれに対応する。α について $f(\alpha,t)$ を平均したものを集合平均（ensemble average）と云い，t について平均したものを時間平均（time average）という。吾々が以下取扱う函数又は時系列は不規則とは言つてもこの集合平均と時間平均との等しい様なものに限るのである。

不規則変化の内で定常性とエルゴート性の満足されるものについては次の様に相関函数を確定な単一函数として求めることが出来るのでそれよりスペクトル密度を求められるのである。

相関函数（Correlation Function）は次の様に定義する。即ち

$$R(\tau)=\overline{C(t)C(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dtC(t)\,C(t+\tau)\cdots\cdots\cdots(1)$$

これは確率過程から理論的に求めることが出来る。信号記録の実測値から計算によつて求めるには時間に細分してその標本をとることによつて次の式から求める。

$$R(m\triangle)\fallingdotseq\frac{1}{N-m}\sum_{m=1}^{N-m}C_n\,C_{n+m}\cdots\cdots\cdots(2)$$

△は主たる変化を見落さない程度に細分する時間間隔を表わし C_n，C_{n+m} は $t=n\triangle$，$t=(n+m)\triangle$ における C（t）の値，N△ は計算に使う全時間，m の値は通常 N/5 以下にとるのが普通である。m をあまり大きくとると計算した結果に信頼性が出て来ない。

さてこの様に実測値から計算によつて求められた相関函数 R（m△）がグラフ上に曲線として表わされると，これに対応する実験式 R（τ）を定めることが出来る。これから C（t）のスペクトル密度 S（f）が次式によつて定められる。

$$S(f)=4\int_{0}^{\infty}R(\tau)\cos 2\pi f\tau\,d\tau\cdots\cdots\cdots(3)$$

随つて又 S（f）を知つて R（τ）を求めるには

$$R(\tau)=\int_{0}^{\infty}S(f)\cos 2\pi f\tau\,df\cdots\cdots\cdots(4)$$

スペクトル密度 S（f）は S（f）df が波長分 f と $f+df$ の間による動力成分を表わすものである。随つて S（f）から次式によつて c（t）の自乗平均値が求められる。

$$\overline{C^2(t)}=\int_{0}^{\infty}S(f)\,df\cdots\cdots\cdots(5)$$

尚定常不規則変化 C（t）においてその時間平均 $\overline{C(t)}\neq O$ である場合には $C(t)-\overline{C(t)}$ のスペクトル密度を R_1（τ）とし，C（t）のそれを R（τ）とすれば

$$R(\tau)=R_1(\tau)+2\pi\overline{C^2(t)}\,\delta(f)\cdots\cdots\cdots(6)$$

但し　$f\neq O$ では $\delta(f)=O$ また $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)\,df=O\cdots\cdots\cdots(7)$

この関係を用いると計算の労力を遥かに軽減することが出来る。

3. 実測結果と計算

実測は至つて簡単であつて交流 100ボルト 電源に電圧計をつないで電圧変動の主なる変化を見落さない程度の時間間隔でその読みをとればよい。理想を言えば記録計器で連続的な値をとればよいのであるが適当なものがなかつたのでサンプリング値をとることにした。時間間隔は変動の模様から30秒間隔で大体の事は推定出来ると思う。計器にどんな型のものを用いるかという事は一応考慮すべき問題であるが電圧波形を純正弦波と考えれば何れをとつても良いわけで整流型と可動鉄片型と観測は二つの計器について行つたが実際に計算したのは整流型計器によるもののみである。観測は昭和30年10月1日12時5分から12時45分に亘つて学内実験室において行つたものを第1図に示す。

これから式(2)によつて計算した R(τ) を第2図に示す。計算は相当厄介なものであるがここでは結果のみを示すことにする。

この R（τ）は次の形で近似される。（図で点線で示す）

$$R(\tau)=0.078e^{-0.7t}+0.065\cdots\cdots\cdots(8)$$

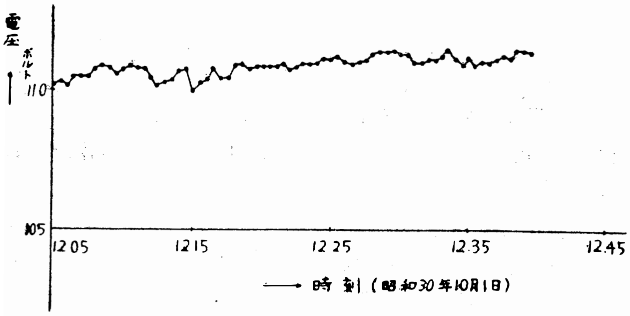
これを式(3)に入れると S（f）が求められる。

$$S_1(f) = \frac{0.218}{0.49 + 39.5f^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

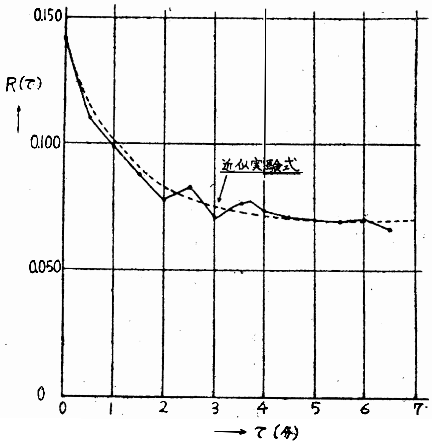
$$S(f) = S_1(f) + 2\pi\overline{C^2(t)}\,\delta(f)$$

第3図に $S_1(f)$ を示す。

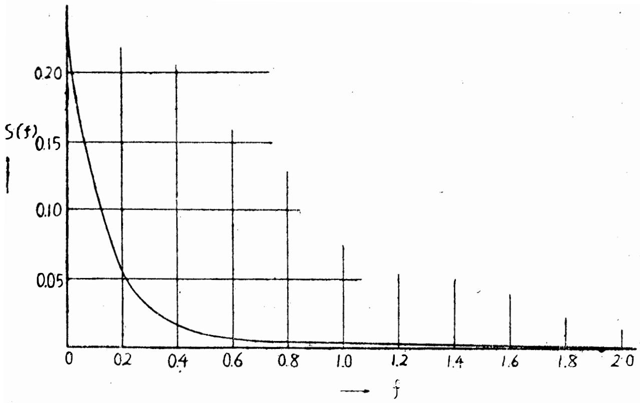
図一 1



図一 2



図一 3



4. 結　　　言

以上の結果から電源電圧の変動を定常不規則変化と見たとき，その相関函数及びスペクトル密度を求めることが出来た。

第3図の結果から見て電源電圧変動には1サイクル以上の周波数においては相関は非常に少なくなつていると言える。尚この観測値は学内実験室の昼食時における時系列を取つたものであるが，時刻を違えるとか或いは場所を変へて工場地帯等では若干異るものになることが当然予想せられる。

終りに観測及び計算には学生内形君山田君に手伝つて貰つた。記して謝意を表する。

参　考　文　献

James, Nichols Philips: Theory of Servomechanism
高橋安人 ：自動制御計算法