音片に関する研究

井　上　浩

Studies on Tuning Bars

Hirosi INOUE

Tuning bars or free-free bars are in use for the independent synchronization of Faximil and Telephoto-transmission instead of tuning folks.

Tuning bars are excellent in the simplicity of the form, and oscillotors with these bars have good stability of the frequency. In this paper the author has given some notes regarding tuning bars, that is to say, non-linear vibration, zerotemperature coefficient materials, temperature coefficient of bimetal tuning bars, radiation impedance, vibration losses, and new method of excitation of non magnetic materials.

緒　　言

音片とは周知の様に，自由一自由棒であつて，音叉或は音環に代り，模写電信又は写真電送の独立同期用電源として利用せられて居るもので，製作の容易さと精度（周波数温度係数の少いことと電源電圧変動に対する安全度の高いこと）の優秀な特徴がある。著者も此の音片の特性向上のために二三研究する機会を得たので，玆に取りまとめて報告し，諸彥の御参考に資したいと考えて居る。

第一章　音片の非線型振動 (1) (3)

1.1　目的——音片の振動振巾が，増大して来ると音片の共振周波数は低下して来るもので，此の原因としては音片の非線型振動と考えられる。従つて音片の周波数安定度を向上せしめるためには振動振巾を微小にする必要があり，振動振巾と共振周波数との関係を定量的に求める必要を生じ本文で此の関係を明にする。

1.2　音片の近似的振動姿態——厳密な振動姿態で音片の非線型振動を取り扱うのは困難なため近似的な振動姿態を利用する。座標の原点を音片の中央にとり，長さ $2l$，長さの方向を s とし，$\frac{s}{l}$を x で表わすと，振動振巾 w は

$$w=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6$$

と表わされ，自由端の条件 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0$，$x=1$ に於ける変位を-1.6452とすると，$\alpha=15\gamma$，$\beta=-5\gamma$，$\gamma=-0.2404$ となる。此の振動姿態に於ける節線の位置は $x=0.55$ にあり，厳密な値は 0.552 で大差ない。又共振周波数は，ρ：材料の密度：E：Young 率，I 断面の慣性能率とすると

$$\int_{-l}^{+l}\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mathrm{EI}\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}\right)w\,ds=0$$

より求められる。共振角周波数 q は

$$q=\frac{\mathrm{EI}}{\rho l^4}\times 31.48$$

となるが，此の式の係数を Rayleigh の m（coshm cosm = 1 の根）に換算すると $\left(\frac{m}{2}\right)^4$ になるから，厳密なる式の 4.73 に比して 4.72 となり，近似度が相当によいことがわかる。

1.3　非線型振動に対する共振周波数

使用する音片の非線型振動方程式として(2)

$$\rho\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\frac{\partial w}{\partial s}\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\ \frac{\partial_3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3\right\}=0$$

を取り，近似振動姿態に対して共振周波数を求めために

$$\int_{-l}^{l}\left[\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3\right\}\right]w\,ds=0$$

とおけばよい。此の解を

$$w=f(t)\ (1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6)$$

とおくと $$\frac{d^2 f}{dt^2}+q^2 f+\alpha' f^3=0$$

の様に表しうる。 $f=ae^{ipt}$ とおくと

$$\alpha'=2.813\ q^2/l^2$$

従つて $$p^2=q^2\ (1-\frac{3}{4}\alpha'\,a^2)\ =q^2\ (1-1.735a^2/l^2)$$

自由端の振巾 a'，全長 l'とすると

$$p=q\left(1-1.287\frac{a'^2}{l'^2}\right)$$

故に共振周波数は振巾の増大と共に減少して来るもので， 実験の結果は此の非線型修正の 2 倍程度となる。此れは振動振巾の増大と共に振動損失が増大するためで，振動損失を考慮に入れると， 実験値と理論値は一致する様になる。

1.4 高調波に依る節線の振動

音片の近似度を更に低下して音片の振動姿態を次の様に取る。 $m=\frac{\pi}{l'}$ とおいて

$$w=a\,(-1.645+2.645\sin ms)\cos qt$$

玆に s は自由端を原点とし，1.645a は自由端の振巾とする。$\frac{\rho}{EI}=\lambda^4$ とおくと

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+2\frac{\partial w}{\partial s}\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\ \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3+\lambda^4\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

此の非線項は少いものとし攝動項として取り扱い， $q^2=\frac{\pi^4}{\lambda^4\ l'^4}$ $\lambda_1{}^4=\frac{\pi^4}{p^2\ l'^4}$とおくと

$$\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+\lambda_1{}^4\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-2\frac{\partial w}{\partial s}\ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},\ \frac{\partial^3 w}{\partial s^3}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^3+(\lambda^4{}_1-\lambda^4)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

の様に表わしうる。0 次の近似は $w=2.645a\sin ms\cos pt$ とピストン運動の和であるが後者は暫く考えず，第一近似式を求めると ($a^\circ=2.645a$)

$$w=a^\circ\left[(1-\frac{7}{3840}a^{\circ 2}m^2)\cos pt\sin ms-\frac{9}{1280}a^{\circ 2}m^2\cos pt\ \sin 3ms-\frac{1}{384}a^{\circ 2}m^2\cos 3pt\right.$$

$$\left.\sin 3ms-\frac{1}{128}a^{\circ 2}\ m^2\cos 3pt\sin ms\right]$$

基本振動に於ける $s=0.224l'$ の振動振巾と自由端振巾 a' との比は $0.013\ a'^2/l'^2\ \cos pt$

三次高調波振巾比は $\frac{1}{384}a^{\circ 2}\ m^2\sin 3ms=0.0048\frac{a^{12}}{l^{12}}$及び$\frac{1}{128}a^{\circ 2}\ m^2\sin\ ms=0.005\ a'^2/l'^2$ となり，空間的な三次高調波と時間的な三次高調波との両者が存在することが分る。 此の振動様式に対する共振角周波数は

$$p=q\ \ (1-2.51\ a'^2/l^2)$$

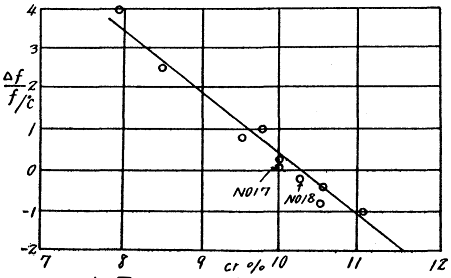
となり，損失を含めた音片の共振角周波数の実験値と略一致することとなる。 故に損失を考慮に入れた時には後者の近似的振動姿態を取扱うと便利である。

第二章　単純音片 (3)

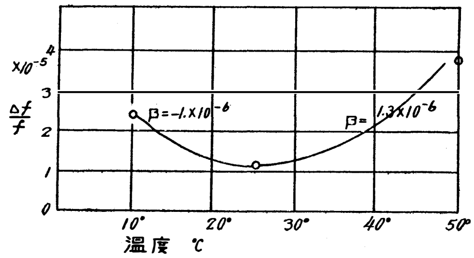
2.1　目的——音片の周波数温度係数は最も独立同期用としては重要なる因子であつて，此の係数を少くするためには貼合せ音片を使用して来たが，此れも利点を有する代りに次章に述べる様な欠点もあるので，合金で然も周波数温度係数の少い（少くとも $2\times10^{-6}/c^{\circ}$）材料の試作が要求せられ，此の目的を達するための試作結果を報告する。

2.2　試作結果

Fe, Ni, Cr の三元合金で Fe, Ni, Cr の種々の%の合金の周波数温度係数を音片に就いて求めると第一図の様になる。熱処理は 1100°C 三時間真空炉中で加熱，除冷したものである。



オ一図 Cr %と周波数温度係数 (Ni 36%)



オ二図 NO 17の温度と Δf/f
β は Δf/f/°C

No.17 の材料では $1\times10^{-6}/c^{\circ}$ の周波数温度係数を有するもので，分折の結果

Ni	36.53%	Cr	9.8%	w	1.26%	Mn	0.78%
C	0.22%	Si	0.65%	Fe	balance		

此の合金は三回の charge に依り $1\sim2\times10^{-6}/c^{\circ}$ の結果を得て居り充分使用に堪えるものである。此の合金は温度及振巾変化に対する機械振動損失の変化も少いので現在長時間運転中で，此の結果については後日報告出来ることと思われる。

第三章　貼合せ音片の温度係数

3.1　目的——貼合せ音片は正負の温度係数を有する合金を適当の寸法にして貼合せて 0 温度係数とするもので，厚味方向に貼合せるものは周波数調整と振動損失の点より香ばしくなく，巾方向の接着のみが利用せられる。

然るに実験に依ると此の様な音片は正負の温度係数の合金の一方を圧縮する時と他方を圧縮する時とでは僅かではあるが周波数温度係数が異なるもので此の原因を明にするのが本文の目的である。

3.2　丸い欠けた輪の面に直角方向の撓振動

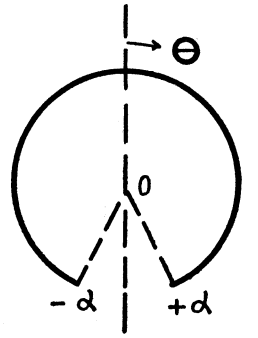
丸い欠けた輪の面に直角方向の撓み振動は円形の切口の半径を c，輪の半径を a とする。

直角方向の変位を v，変位面がもとの平面となす角を β とすると次の関係式が成立つ。(12)

$$\frac{\partial N^1}{\partial\theta}=ma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\quad\text{（単位長の質量）}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial\theta}+H-N^1 a=-\frac{1}{4}c^2 m\frac{\partial^3 v}{\partial t^2\partial\theta}\qquad(2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial\theta}-G=\frac{1}{2}c^2 ma\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}\qquad(3)$$



オ三図

茲に　N^1：辷りの力，G：曲けモーメント，H：捩りモーメント

境界条件としては θ が $+a$, $-a$ に於いて

$$G=0 \qquad H=0 \qquad N^1=0 \tag{4}$$

なる様な解を求めることとなるが，G,Hに対する (4) の条件式は (3) が入ると困難となるので β を小さいものとして，静的変形の条件

$$\frac{\partial H}{\partial\theta}-G=0 \tag{5}$$

を入れる。

$$G=A_n\left\{(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{a}\theta\right\} \tag{6}$$

とおけば

$$H=-A_n\frac{a}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{a}\theta \tag{7}$$

となる。然るに A, C を曲げ及び振りの強さとすると

$$G=-\frac{A}{a^2}\left\{\frac{dv^2}{d\theta^2}-a\beta\right\} \tag{8}$$

$$H=\frac{C}{a^2}\left\{\frac{dv}{d\theta}+a\frac{d\beta}{d\theta}\right\} \tag{9}$$

であるから，G, H に (6), (7) を代入すると

$$a\beta=\left(\frac{a^2}{C}+\frac{a^2}{A}\right)\frac{\left(-A_n\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right)}{1-\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2}+b_n\cos\theta$$

$$v=\frac{a^2}{C}\left\{A_n\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi}{a}\theta\right\}+C_n+\left(\frac{a^2}{C}+\frac{a^2}{A}\right)\frac{A_n\cos\frac{n\pi}{\alpha}\theta}{1-\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2}-b_n\cos\theta$$

(1) と (4) との関係より

$$C_n\ a=b_n\sin a$$

又 v の θ に無関係なる部分は G の θ に無関係なる部分に対応する故

$$C_n=A_n\frac{a^2}{A}(-1)^n$$

従つて $$b_n=\frac{a}{\sin a}A_n\frac{a^2}{A}(-1)^n$$

となり，積分定数は全部決定された。

此の共振周波数は Rayleigh—Ritz の方法を用い，第一近似で近似を打切るものとすれば

$$T_{11}=\lambda\int_0^a\left\{\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)^2+\left(a\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right\}d\theta$$

$$W_{11}=\int_0^a\left(a\beta-\frac{d^2v}{d\theta^2}\right)+\sigma\int_0^a\left\{\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{d\beta}{d\theta}\right\}^2d\theta$$

$$\sigma=C/A$$

$$\lambda=\frac{W_{11}}{T_{11}}=\lambda_0\{1-0.22a^2\}\ [\alpha\ll1,\ a\to0]$$

$$\lambda_0=\frac{m\pi A^2a^4f^2}{EI}$$

此の λ_0 は真直な棒であるため

$$(2a)^4\lambda_0=\frac{m\pi A^2f^2}{EI}(2aa)^4=\frac{m\pi A^2f^2l^4}{EI}=(ml)^4=480=(4.698)^4$$

即ち $ml=4.698$ となり，4.73 なる厳密なる解には隔りがあるが近似度は充分であると考えられる。

3.3 温度係数

上式を周波数に置き換えると

$$f=f_{\circ}(1-0.11\,a^{2})$$

玆に $f_{\circ}$ は真直なる棒の共振周波数

今 w_1，w_2 なる巾の合金を夫々接着すると温度が $f_{\circ}$ より t まで上昇したものとした時，曲つた曲率半径 r は

$$\frac{1}{r}=\frac{3}{2}\;\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\;(t-t_{\circ})}{\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2}$$

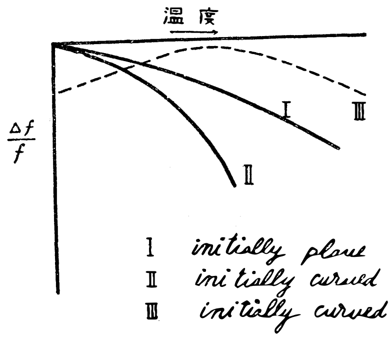
ε_1：ε_2 は夫々の材料の線膨脹係数

此の r を書き換えて

$$f=f_{\circ}\left(1-0.11\frac{l^2}{4r^2}\right)=f_{\circ}\left\{1-b\,(t-t_{\circ})^2\right\}$$

$$b=0.06\,\frac{l^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{(\mathrm{w}_1+\mathrm{w}_2)^2}$$

従つて初期的に曲つた板の共振周波数は図の様に変化を来たすこととなる。数値的に $\varepsilon_2=1.9\times10^{-5}$ $\varepsilon_1=0$ とすると，温度10°c の上昇に対して，巾 1.2cm ($\mathrm{w}_1=0.6$，$\mathrm{w}_2=0.6$) とすると，周波数変化率は 0.22×10^{-6}/10°c となる。従つて厳密に言えば此れだけの考慮を貼合せ音片に対して払う必要がある。もし更に巾の狭い音片或は初期的に曲つた音片に対しては更に大なる補正を必要とすることが分る。

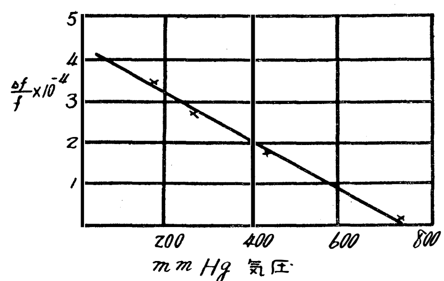


II，III は正負反対に curve する

ｵ四図 貼合せ音片の温度係数

第 四 章　音片の輻射インピーダンス(6)

4.1　目的——音片発振器を使用中温度及電源が一定であつても，微細な周波数変動が経験される。此の一原因として大気圧の変動が影響すると考えられる。此れを実験するために 1000∾ の音片を乾燥器に入れて真空度を高めてゆくと図の様な変化が求められ，一寸予想よりも大きい値を得たので，音片の輻射インピーダンスと寸法との関係を求める必要を生じた。此の関係を明にするのが本文の目的である。



ｵ五図 気圧と周波数変化

(2.5mm厚. 12mm巾 1000∾)

4.2 —— 音片の近似法

音片には長さ，厚さ，巾の三自由度があり，近似的には Lame 函数(11) で行なえば理想的であるが，数表がないので計算の都合上近似方法を二つに分けた。

先ず長さと巾が音片の幅射インピーダンスに及ぼす効果を知るために丸い棒で然も有限長の棒の横振動を考え，此のために偏長回転楕円体の輻射インピーダンスを求め，音片の長さが巾に比して非常に長いと言う条件を入れて結果を簡単にする。

次に音片の厚さと巾との輻射インピーダンスに対する効果を知るために音片の断面が楕円で然も長さを無限大として，Mathieu 函数を利用し，無限長楕円棒の輻射インピーダンスを求める。此の

後者は前者の補正項と考える様な取扱い方をする。

4.3 扁長回転楕円体の輻射インピーダンス

直角座標軸 x, y, z を扁回転座標軸 v, u, φ (10) で表わすと次の様な関係式が成立つ。

$$
\begin{aligned}
x &= d \sin v \sinh u \cos\varphi \\
y &= d \sin v \sinh u \sin\varphi \qquad (1) \\
z &= d \cos v \cosh u
\end{aligned}
$$

直角座標軸を用いた波動方程式は速度ポテンシヤル Φ を用いると

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \qquad (\mathrm{c}\ 音速) \quad (2)$$

となるが，(2) 式に $\xi=\cosh u$, $\eta=\cos v$ を用いると

$$\Phi=\mathrm{X}(\xi)\,\mathrm{Y}(\eta)\ \begin{matrix}\cos m\,\varphi\\ \sin m\,\varphi\end{matrix}\ \mathrm{ejwt}$$

の様に変数分離可能であり，X，Y の満足する微分方程式は

$$\frac{d}{d\xi}\left\{(\xi^2-1)\frac{dx}{d\xi}\right\}+\left\{\mathrm{k}^2\xi^2-\tau-\frac{m^2}{\tau^2-1}\right\}x=0$$

$$\frac{d}{d\eta}\left\{(1-\eta^2)\frac{dy}{d\eta}\right\}+\left\{-\mathrm{k}^2\eta^2+\tau-\frac{m^2}{1-\tau^2}\right\}\mathrm{Y}=0$$

茲に　$\mathrm{k}=\dfrac{\omega}{\mathrm{c}}=\dfrac{2\pi d}{\lambda}$　（λ 波長）

本文に於いては $m=1$ とし，$\Phi=\phi\ \mathrm{ejwt}$ とおくと

$$\phi=\Sigma_n \mathrm{A}_n \mathrm{Pe}_n(\eta)\mathrm{Re}_n(\xi)\sin\varphi$$

を求める解として与えることが出来る。此の A_n は速度分布の与え方に依り決められるが，今音片の直角方向の速度が与えられたものとし，回転楕円体の表面を $u_\circ$ とすると

$$\left(\frac{d\phi}{d\mathrm{N}}\right)_{u=v_\circ}=-\mathrm{V}_\circ(v)\cos\alpha \quad u=u_\circ$$

とする。バツフルはなく，一様なる直角方向の速度を与え

$$\pi>v>0 \ に於いて,\quad \mathrm{V}_\circ(v)=\mathrm{V}_\circ$$

とすると，

$$\cos\alpha=\frac{\partial y}{\partial u}\Big/\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}=\frac{\sin v\cosh \mathrm{u}_\circ\sin\varphi}{\sqrt{\cosh^2\mathrm{u}_\circ-\cos^2 v}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{N}}=\frac{\partial\phi}{\partial u}\Big/\sqrt{\cosh^2 u_\circ-\cos^2 v}$$

此の関係式から

$$\mathrm{A_n}=-\frac{d\mathrm{V}_\circ\cosh\mathrm{u}_\circ\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\kappa^2}\,\mathrm{Pe}_n{}^1(\eta)\,d\eta}{\sinh\mathrm{u}_\circ\int_{-1}^{1}\{\mathrm{Pe}_n{}^1(\eta)\}^2 d\eta}\ \frac{1}{\mathrm{Re}_n{}'^1(\xi)}$$

茲に $\mathrm{Re_n}'^1$ は $\mathrm{Re_n}^1(\xi)$ を ξ で微分することを表わす。媒質の密度を ρ とし，音圧を p とすると，

$$p=\rho\frac{d\Phi}{dt}=\mathrm{j}\omega\rho\Phi\ \mathrm{ej\omega t}$$

であるから，ejwt を取去り，表面上の全音圧を素面積 $d\mathrm{s}$ について積分すれば

$$\mathrm{P}=\int p\cos\alpha\, d\mathrm{s}$$

で表わされ，積分は全表面に亘り取るとする。

素面積は

$$ds=2\pi d^2 \sin v \sinh u_\circ \sqrt{\cosh^2 u_\circ - \cos^2 v}\ du dv$$

であるから

$$P=j\omega\rho\, 4\pi d^2 \cosh^2 u_\circ \frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}\ Pe_n{}^1(\eta)d\eta}{\int_{-1}^{1}\{Pe_n{}^1(\eta)\}^2 d\eta}\ \frac{Re_n{}'(\zeta)}{Re_n{}^{1\prime}(\xi)}\ dV_\circ$$

$\xi \fallingdotseq 1$ 即ち充分

細長い回転楕円体として $Pe_n{}^1$ $Qe_n{}^1$ は近似的に

$$Pe_n{}^1=\frac{1}{4}\nu_{n1}K\sqrt{\xi^2-1}$$

$$Qe_n{}^1=\frac{\tau_{n1}-K^2}{2K^2\nu_{n1}}\sqrt{\xi^2-1}\ \log\frac{\xi+1}{\xi-1}-\frac{2}{\nu_{n1}K^2\sqrt{\xi^2-1}}$$

で表わされるから

$$\frac{P}{V_\circ \rho c\,\pi d^2 \cosh^2 u_\circ}=\frac{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\kappa^2}\ Pe_n{}^1(\eta)d\kappa}{\int_{-1}^{1}\left\{Pe_n{}^1(\eta)\right\}^2 p\eta}\times 4\left[\frac{1}{8\xi}\nu_{n1}{}^2K^4(\xi^2-1)^2 -j\ \frac{K(\xi^2-1)}{\xi}\right]$$

従つて

$$\frac{P}{V_\circ 4\pi\rho c\, d^2 \sinh u_\circ \cosh u_\circ}=A\ (K\times長)\ (K\times巾)^3-jB\ (K\times巾)$$

で表わすことが出来る。$^1 4\pi d^2 \sinh u_\circ \cosh u_\circ$ は回転楕円体の全表積を表わす故左辺は単位面積当りの輻射インピーダンスを ρc で割つた値を表わし，A，B は次の値を取る。

K×長	2	4	6	8	10
A	0.0111	0.02	0.0258	0.030	0.0348
B	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4

故に扁長回転楕円体の長さが長い時には単位面積当りの輻射抵抗は(K×長)×(K×巾)^3 に比例し，輻射リアクタンスは(K×巾) に比例する。球の場合輻射抵抗が (K×半径)^4 に比例するに比較して興味あることである。

4.4 無限長楕円壔の輻射インピーダンス

z 軸方向に無限長とし，x, y 軸にて楕円体の断面を表わすものとすると，x 軸，y 軸は

$$x=d\cosh u\ \sin v$$

$$y=d\sinh u\ \cos v$$

で表わし，$\cosh u=\xi$，$\sin v=\eta$ とおくと，=次元の波動方程式であるから，Φ なる速度ポテンシャルを用いると

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{1}{c}\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

で与えられるが，$\Phi=\phi\, e^{jwt}$ とおくと

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}+K^2\phi=0$$

ϕを変数分離するために

$$\phi=\Sigma_n A_n \Xi_n(\xi) H_n(\zeta)$$

とおくと，変数分離の定数として Λ を入れ

$$\frac{d^2\Xi_n}{dv^2}+\Xi_n(-\Lambda+2h^2\cosh^2 u)=0$$

$$\frac{d^2 H_n}{dv^2}+H_n\left(A-2h^2\cos 2v\right)=0$$

となる。茲に $h^2=\dfrac{K^2d^2}{4}$ とする。此の式は Mathieu[11] の方程式であるから解として

$$\Xi_n=\sum_n B_{n\ 2m+1}\,H^{(2)}_{2m+1}\ (2hu)$$

$$H_n=\sum_n B_{n\ 2m+1}\sin\,(2m+1)\ v$$

で与えることが出来る。h が小さい時には

$$\Xi_1=H_1{}^{(2)}(2hu)-\frac{h^2}{8}H_3{}^{(2)}(2hu)+O(h^4)$$

$$\Xi_3=H_3{}^{(2)}(2hu)-h^2\left\{\frac{1}{16}H_5{}^{(2)}(2hu)-\frac{1}{8}H_1{}^{(2)}\right\}+O\,(h^4)$$

$$H_1=\sin v-\frac{h^2}{8}\sin 3v+O\,(h^4)$$

$$H_3=\sin 3v-h^2\left(\frac{1}{16}\sin 5v-\frac{1}{8}\sin v\right)+O\,(h^4)$$

としてよい。式中の $H_n{}^{(2)}$ は n 次の Hankel 函数を表わす。今 u_0 の表面に於いて前と同じ考えで一様な速度分布が与えられ，其の直角方向の速度は

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)_{u=u_0}=-V_0\cos\alpha$$

の様に与えて，全音圧 P を求め，前と同様な計算を試みて，

$$\frac{P}{V_0\rho c}=jkd^2\frac{\cosh^2 u_0}{\sinh u_0}\,\frac{\Xi\,(\xi_0)}{\Xi'(\xi_0)}\,\frac{\left(\int_0^{2\pi}H_n{}^2\sin v\,dv\right)^2}{\int_0^{2\pi}H_n{}^2(\sin v)dv}$$

単位面積に換算し，H_1，$\Xi_1\cdots$ に近似式を入れ長さを l とすると，$Q=kd\cosh u_0$ として

$$\frac{P}{V_0\rho cl}=j\frac{1}{2}\,\frac{\Xi\,(\theta)}{\Xi'(\theta)}\,\frac{1}{\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\mathrm{sech}^2 u_2\cos^2 v\ dv}\right)}$$

然して此れを補正項として取扱う故 $\dfrac{\Xi\,(\theta)}{\Xi'(\theta)}$ を求めて見ると実数部は

$$\mathrm{Real}\left(\frac{\Xi}{\Xi'}\right)\propto\frac{\pi}{8}Q^3\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}\,\frac{1}{\cosh^2 u_0}+\frac{5}{6}\,\frac{1}{\cosh^4 u_0}-\frac{35}{64}\,\frac{1}{\cosh^6 u_0}}$$

虚数部は

$$\mathrm{Jmag}\left(\frac{\Xi}{\Xi'}\right)\propto\frac{Q}{2}\,\frac{1-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\cosh^2 u_0}+\frac{1}{8}\,\frac{1}{\cosh^2 u_0}-\frac{5}{64}\times\frac{1}{\cosh^6 u_0}}{〃}$$

即ち単位長当りの無限長楕円壔の輻射抵抗は (K×巾)^3 に比例し，輻射リアクタンスは (K×巾) の一乗に比例する。もし $Kd\cosh u_0=Ka$ として円形の無限長棒を与えると

$$\frac{P}{V_0\rho c}=\frac{z}{\rho c}=\frac{1}{2}\,j\,\frac{H_1{}^{(2)}(Ka)}{H_1{}'^{(2)}(Ka)}$$

となる。此れは Morse[13] に依りて求められたものである。

4.5 実験結果との比較

実験方法としては陰極線オシログラフに減衰曲線を画かしめて，此の振巾が或る値まで減衰するまでの時間を測定し，此の音片を乾燥器内に入れて真空度を変化して，減衰曲線より輻射抵抗を求め，共振周波数のずれより輻射リアクタンスを求めた。此の様な音片と種々の寸法に作り，求めた実験結果は計算値は略半分に近い値を示す。これは音片の振動姿態が一様な速度分布を有して居な

いためで，音片に正弦的な速度分布を与えた時に計算値の二分の一の値を示す故，音片の幅射インピーダンスの前に述べた計算結果の½を取ればよいことが分る。

第五章　音片の振動損失に関する実験

5.1　目的——音片発振器の周波数安定度は機械振動損失の少い程向上するもので，従つて，振動損失を出来るだけ小とする必要がある。此の振動損失に関する因子に就いて考察する必要が生じ，振動振巾，温度，共振周波数，磁場，熱処理，音響輻射損，支持損等に関して，通常使用せられて居る範囲に於いてどの様な影響があるかについて考察したものである。

5.2　振動振巾との関係

音片の共振附近に於いて，共振曲線より，振動損失を求めると，機械尖鋭度は振巾の自乗に比例して減少するもので，一例として 150∞ の音片（長さ 30cm）に於いて振巾 $a$mm とすると，尖鋭度 Q は $a=0$ の時 Q_0 として

$$Q=Q_0(1-0.1a^2)$$

の様に与えることが出来る。

5.3　温度と Q との関係

音片の Q は温度の上昇につれて低下する。単純音片では鋼製のものは 5000 の Q のものが常温より 10°c の上昇に対して 500 程度低下する。エリンバー製のものは殆んど Q が低下せず，線膨脹係数の小さいもの程温度に依る Q の低下は少いと云う説[(7)]が確められる。

5.4　共振周波数と Q との関係

音片の共振周波数は自由度が 2 であつて，長さと厚さに依り決められる。今種々の寸法の音片に対する共振周波数と Q との関係の測定結果は多種多様のものを含むので統計的に論ずるには標本が少いけれども，共振周波数が増大すると Q が増大し，又厚味の厚い音片程 Q が大である。熱処理一定として，厚みを一定として，長さを変化し共振周波数を変化し Q を求めると $Q=kf_0$ なる様に共振周波数に直線的に比例するが，周波数が大となれば飽和した様な形となる。此れは音片の音響輻射損が同一の音片巾のために $(K\times 巾)^3$ に比例して増大するために Q が低下するためである。

此れを熱弾性的な考察[(8)]結果と比較すると絶対値は相当の偏りあるが，傾向としては大体一致する。従つて附加的に共振周波数に無関係な定振動損失が入つて居ると見ることが出来る。

5.5　磁場との関係

磁場を増大して Q を測定すると Q は低下するのが通常であるが，場合により Q が上昇することがある。此の原因は次の如く考えることが出来る。強磁性体の弾性体は変形する際回転磁化と移動磁化とを生ずるが[(9)]，移動磁化は損失を伴うもので，外部磁場に依り移動磁化がさまたげられると弾性履歴は減少して来り振動子の Q は向上するもので，後者の場合は此の例で，振動に依り自発磁化域の磁化が非可逆的に反転するのが妨げられて Q が向上したものと考えることが出来る。

5.6　熱処理と Q との関係

鋼製（0.4%c）の音片を約 1000°c に熱して水にて焼入れ，此れを 100°c 以上の温度で焼鈍すると，焼鈍する温度を上昇するにつれて Q が向上するもので，又高い温度で焼鈍する程振動振巾に対する Q の変化は少い。此の実験は内部摩擦は結晶の転移の運動に起因するとして説明する Zener[(8)] の考察の正しいことを示すものである。然して焼入温度を低くして，焼入温度以上で焼鈍すると Grain の大さが大となつて反つて Q が低下する故注意するを要する。

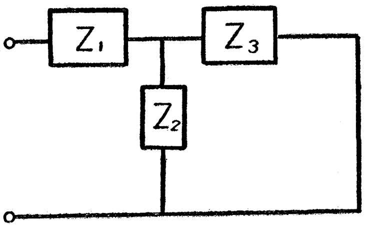
5.7　音響幅射損を減少する寸法

音片の共振周波数を一定として音響輻射を考えると大体巾で決定される故巾は出来る限り小する必要がある。然して音片の共振周波数は $(厚さ)^1\times(長さ)^{-2}$ に比例する故，前章の音響輻射を考

慮に入れて振動子の Q を求めて見ると，3000∞の音片に対しては 3*mm* 以上の厚さ，500∞ の音片に対しては 2*mm* 以上の厚さとするとよいことが結論される。

5.8　支持損失

音片は支持されて居り，機械的な等価回路は次の図に示すことが出来る。図中の Z_1 は機械振動子の機械インピーダンス，Z_2 は支持物のインピーダンス，Z_3 は支持台のインピーダンスで，Z_2 は通常スティフニスだけと考えればよい。Z_1 は自由端の機械インピーダンスを支持点のインピーダンスに換算したもので理想的な場合には∞となるべきものである。又 Z_2 が O であれば此の系の共振周波数は Z_3 の影響受けないため振動損失は少くなる。高い周波数の音片では Z_2 は O に近くすることが容易であるが低い周波数では容易ではない。此の考え方は単に支持棒を長くすることに依り容易に確めることが出来る。



第六図　音片の機械的等価回路

以上は単独に個々の影響を取り上げたが，此等は互に相関連して入るもので複雑になるが，常に此等を考慮に入れて音片の Q を向上する必要がある。

第 六 章　非磁性体音片の駆動(3)

6.1　目的——音片発振器の周波数温度係数は容易に測定することが出来る。非磁性体に於いても駆動することが出来れば容易に周波数温度係数が測定出来る。此の目的で非磁性体音片の駆動を考察したものである。此れは時計材料に於いて非磁性体で然も温度係数の少い材料を求める必要上行つたものである。

6.2　非磁性体音片を用いた音片発振器

a)——真鍮　長さ 11*cm* 厚さ 2*mm* 巾 1.3*cm* の音片を作り発振時の収動電圧 11×10^{-4}volt，駆動電流 20*mA* であり，発振限界から動時相互インピーダンスを求めると 0.056 オームで通常の磁性体音片の 1000 分の一の大である。此の収動，駆動コイルは受話器のマグネツトを使用した。

発振周波数 710∞，所要増幅度 86*db* 程度である。

b)——アルミニウム製，長さ 10*cm* 厚さ 4*mm*，巾 1.5*cm* の音片で重量 17瓦，1750∞の発振周波数で，収動電圧 10^{-4}volt，駆動電流 5*mA* であり，動時相互インピーダンスは 0.2Ω 程度である。

c)——銅製，長さ 14.2*cm* 厚さ 3*mm* 巾 1.35*cm*で 58瓦の重量を有する。収動電圧 1.5×10^{-4} volt，駆動電流 50mA，動時相互インピーダンス 0.03Ω である。増巾度の減少及微小の負荷に依り発振停止することとある故注意する必要がある。

6.3　駆動理論

此の変換機構としては振動に依り音片に生ずる渦流に依り生ずる磁束と磁石よりの磁束との鎖交により生ずるものと考えることが出来る。簡単のために音片は振動せず耐久磁石を振動させ，音片は薄く無限に広い平面と仮定して求めた変換系の力係数 A は磁石と音片の空隙をgとし

$$A=\frac{\mathrm{j}\omega \mathrm{NH}'\mathrm{S}}{2g^2\left(\mathrm{j}\omega+\dfrac{\mathrm{c}^2a}{2\pi\sigma d g^2}\right)}$$

で与えることが出来る。式中の ω，駆動角周波数，N：耐久磁石に捲いた線輪数，H′：耐久磁石に依る起磁力，σ，音片の導電率，S：磁極の実効面積，d：音片の厚さ，a,：音片の平均変位，c：光速とする。同一の音片について $\omega=\dfrac{\mathrm{c}^2a}{2\pi\sigma d g^2}$ で使用するものとすると，前例に於いてはアルミニウムが最大の力係数を有するが，此れは動時相互インピーダンスを比較すると明なことである。

6.4 結言

渦流を利用した音片発振器について述べたが此の方法で容易に非磁性体を用いて発振せしめることが出来る様になつた。目下此の方法を応用して非磁性体の周波数温度係数を測定中である。

謝　辞

以上の研究は音片発振器の特性向上のために行つたもので，今迄に定量的或は定性的に不明であつた音片の特性を明にすることが出来，音片の specification の上に二三附加しうる様になつた。本研究は東北大学永井教授の御指導に依つたもので厚く感謝の意を表わす次第である。又数々の御鞭撻を賜わる石原工学部長に厚く感謝の意を表わすと共に，御批判を下さつた，学振小委員会の諸氏，音片同好会の諸彦に厚く御礼申し上げる。

文　献

1 例えば一般論に関しては

井上；非直線力学序説，電通省通研調査報告プリント　昭和26年7月

井上；非直線力学入門　電気評論　昭和18年 1～2月

井上；非直線力学に於ける摂動論の応用電気評論　昭和18年 5～6月

井上；学振第99小委員会編，コロナ社刊

通信工学に於ける〝同期の研究〟第二編〝同期に関する非直線理論の応用〟昭和26年7月

2 植村；理工学研究所報告　昭和24年

3 井上 守屋 野尻；機械振動子の一応用，電学電通学会東北支部講演予稿　昭和25年10月

4 井上；貼合せ音片の温度係数，東北大学通研音片同好会　昭和27年5月

5 井上；音片の機械尖鋭度と寸法　電気，電通学会東北支部講演予稿　昭和24年10月

6 井上，玉虫，清水；音片の輻射インピーダンス　電気，電通学会東北支部講演予稿　昭和23年6月

7 Zener ; Phy. Rev. 1935

8 Zeitz ; Modern theory of metal

9 Bitter ; Ferromagnetism

10 小谷 ; 回転楕円型空洞共振器　昭和23年

立体回路専門講習会 第一編

11 Strutt ; Lame, Mathieu, Hill-Funktionen

12 松沢 ; 弾性論　岩波物理講座

13 Morse ; Vibration and Sound, 2nd edition