

多相誘導電動機精密円線図の新解法

上 野 亭

New Method for Exact Circle Diagram of Polyphase Induction Motor

Toru UENO

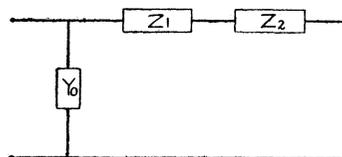
A number of methods for drawing the exact circle diagram of the polyphase induction motor are known, the best one being that of HO'S. Dr. HO has shown his method in 1923, and no other progress has been made since.

The present paper shows a new very easy method for the diagram, which concerns no special theories such as inversion and superposition.

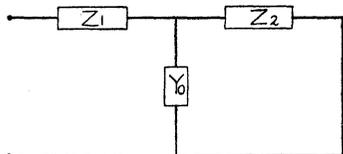
は し が き

多相誘導電動機〔以下、PIMと略記する〕の電流ベクトルの頭の軌跡〔以下、電流軌跡と略称する〕が円となる事を最初に発表した人はハイランド氏である〔ETZ. 1894. S. 561〕。

ハイランド氏の用いたPIMの〔1相当りの〕等価回路は第1図に示すもので、現今では近似的等価回路と称せられて居る。ハイランド氏円線図は、氏自身が数回改良したのみならず、他に多くの人も検討改善して、今日ではPIMの特性を求める目的に広く実用せられて居る。然しPIMの精密なる〔1相当り〕等価回路は第2図に示す様なものであるから、 Y_0 や Z_1 の比較的大なるPIM〔小出力のもの及大極数のものが之に該当する〕に第1図の回路を用いると誤差が大となるので、第2図の精密等価回路の電流軌跡を求める工夫が古くから色々と試みられて来た。



第1図 近似的等価回路



第2図 精密等価回路

から、 Y_0 や Z_1 の比較的大なるPIM〔小出力のもの及大極数のものが之に該当する〕に第1図の回路を用いると誤差が大となるので、第2図の精密等価回路の電流軌跡を求める工夫が古くから色々と試みられて来た。

例えば代数計算による法〔McGraw—Hill:—Std. H. B. Sec. 7—206〕、幾何学的作図法〔Simec:—ETZ. 1910. S. 110〕及インバージョン法〔Arnold:—Wechselstrom-technik VI.〕などがある。然し之等によつて電流軌跡が〔ハイランド氏円線図と同じく〕円となることを証明するのは容易であるが、円線図の各部の長さから、PIMの特性を求め得る事を証明するのは〔ハイランド氏円線図と異り〕中々容易ではない。

此の様な状況下に鳳博士は重疊定理を応用して精密円線図の証明をなし、更に円線図の各部の長さ、PIMの特性との関係を簡単に求め得る事を示した〔電気学雑誌・大正12年・P. 870〕。此の方法が今日では最も進歩せるものと世界の学会から認められ、各国の教科書に引用せられて居る。

精密円線図論は以上の如くであるが、其の後30年近くも進歩して居ない。

筆者が此の論文に於て示す新解法は、鳳氏法を理解するとき最も困難を感じる重疊定理〔従つて励磁インピーダンス〕の使用を避けて居る処に特徴がある。

1. 内 容 概 説

ハイランド氏円線図はPIMの等価回路を第1図の如く仮定してその特性を求めたのであるから、もし完全に第1図に適合するPIMが存在すれば、そのPIMについては不精密さはない。然し現実

には総ての PIM は第 2 図の回路に相当するので、多少の不精密さを免れ得ない。その不精密さは全く第 1 図と第 2 図の相違に原因するのであつて、ハイランド氏円線図法そのものにはない。再言すれば、ハイランド氏などの人々が、第 2 図で表すべきものを、いきなり第 1 図の如く考える処に於て不精密が生じて来るものであるから、精密度を絶対に損じない方法で、第 2 図を第 1 図の形のものに変換し得るならば、その後の操作はハイランド氏などの人々が行つた方法を踏襲してもよいわけである。筆者の円線図法は此の方法によつて居る。

筆者は第 2 図の回路の 1 次電流を示す等式

$$\dot{I}_1 = \frac{(1+Z_2 Y_0) \dot{V}_1}{Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0}$$

に複素常数の四則算法を施し変形して

$$\dot{I}_1 = \dot{V}_K \dot{Y}_K + \frac{\dot{V}_K}{Z_K + Z_2}$$

なる等式を得た。之は第 1 図の如き形の回路の電流を精密に表すこと勿論である。

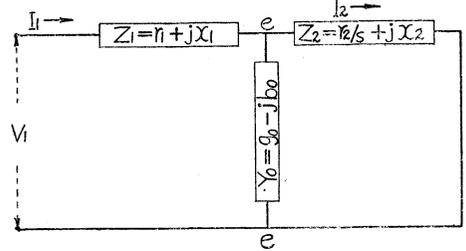
此の等式に精密に適合する PIM は実在しないけれども、之を仮想することは可能である。その仮想 PIM の出力其の他の 2 次諸量が元の PIM の出力其の他の 2 次諸量と精密に一定の倍率関係にあることを明かにした。

2. 等式の変換

本論文に於ては総て 1 相当りの値を用いる例えば電力、出力或はトルクなどの如き量についても 1 相当りの値を用いることにする。

円線図を求め様とする主題の PIM [主機と略称する] の 1 相当りの等価回路を第 3 図の如くとする。

r_1 = 1 次抵抗, r_2 = 2 次抵抗, S = 滑り, x_1 = 1 次リアクタンス, x_2 = 2 次リアクタンス, $Z_1 = r_1 + jx_1$, $Z_2 = r_2/S + jx_2$, g_0 = 励磁コンダクタンス, b_0 = 励磁サセアタンス, $Y_0 = g_0 - jb_0$, V_1 = 1 次印加電圧, I_1 = 1 次電流, I_2 = 2 次電流,



第 3 図 主機回路

第 3 図に於て、1 次端子から見た合成アドミッタンスは

$$Y = \frac{1 + Z_2 Y_0}{Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0}$$

右辺を変形すると

$$Y = \frac{1}{Z_1(1 + Z_1 Y_0) + Z_2(1 + Z_1 Y_0)} + \frac{Y_0}{1 + Z_1 Y_0}$$

式を見易くするため $\mathbf{A} = 1 + Z_1 Y_0$ と置き、1 次電流 $\dot{I}_1 = \dot{V}_1 Y$ を求めると

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{\mathbf{A}Z_1 + \mathbf{A}^2 Z_2} + \frac{\dot{V}_1 Y_0}{\mathbf{A}} \dots \dots \dots (1)$$

なお一層見易くするために、次の方法により $Z_1 = \mathbf{A}Z_K$, $Y_0 = Y_K/\mathbf{A}$ 及び $\dot{V}_1 = \mathbf{A}^2 \dot{V}_K$ を代入する。即ち $m = |\mathbf{A}|$

$$\mathbf{A} = m(\cos\alpha - jsin\alpha) = 1 + Z_1 Y_0 = 1 + (r_1 + jx_1)(g_0 - jb_0)$$

[この結果、次の(2)及び(3)式が得られる]

$$\begin{cases} m = \sqrt{(1 + g_0 r_1 + b_0 x_1)^2 + (b_0 r_1 - g_0 x_1)^2} \dots \dots \dots (2) \\ \tan\alpha = \frac{b_0 r_1 - g_0 x_1}{1 + g_0 r_1 + b_0 x_1} \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

$$Z_K = \frac{Z_1}{A} = r_K + jx_K$$

$$r_K = \frac{1}{m}(r_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha)$$

$$x_K = \frac{1}{m}(x_1 \cos \alpha + r_1 \sin \alpha)$$

$$Y_K = AY_0 = g_K - jb_K \dots \dots \dots (4)$$

$$g_K = m(g_0 \cos \alpha - b_0 \sin \alpha)$$

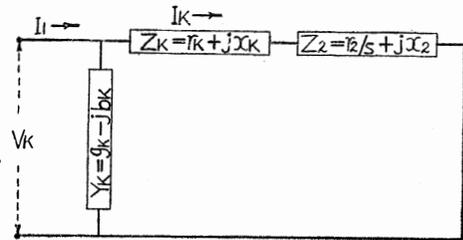
$$b_K = m(b_0 \cos \alpha + g_0 \sin \alpha)$$

$$\dot{V}_K = \frac{\dot{V}_1}{A^2} = \frac{\dot{V}_1}{m^2}(\cos 2\alpha + j \sin 2\alpha) \dots \dots (5)$$

此れ等を用いて(1)式を置換変形すれば次式が得られる。

$$\dot{I}_1 = \dot{V}_K Y_K + \frac{\dot{V}_K}{Z_K + Z_2} \dots \dots \dots (6)$$

此の式は(1)式を変形して見易くしたものであるから、第3図の端子電流を精密に表すと勿論であるが、同時に第4図の端子電流をも精密に表わしている。第4図は、第1図と同一の形式の回路であるから、ハイランド氏などの方法を用いて V_K を規準ベクトルと考えた精密なる電流軌跡を求め得る。

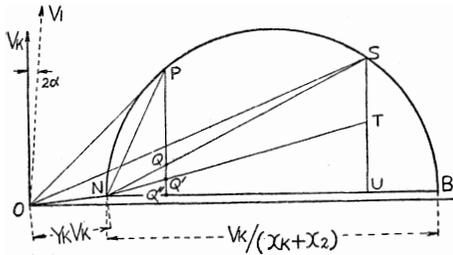


第4図 補機回路

3. 円線図

以下、円線図の事を単に円と称する。

先ず第4図及(6)式によりハイランド氏法を用いて電流軌跡を画けば、第5図の円が得られる。



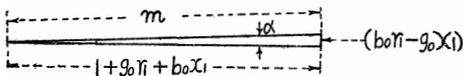
第5図 補機円線図

之は第4図の回路に精密に適合するのである。何となれば、(1)式から(6)式を導くに当り、何等の省略算も行つて居ないからである。

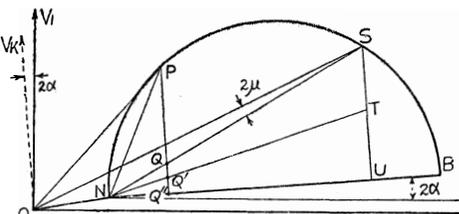
然し第5図を第2図或は第3図の様な精密回路の精密円であると云えば〔従来の習慣もあり〕少々風がわりに見えるので、規準ベクトルを V_K から V_1 に変換すればよい。それには、 \dot{V}_K と \dot{V}_1 との関係を(5)式から求める必要がある。実用上は、大きはどうでもよいの

で、基準直径の傾角 2α のみの問題となり、(3)式から 2α を算出すれば、直ちに第6図が得られる。〔 m 及 a を V_K 図解により求めるには第7図による〕

鳳氏法では此のときに、円の直径の長さにも変化があるので、理解上面倒である。



第7図 m 及 a の図解



第6図 主機円線図

4. 主機と補機の関係

第4図の回路に精密に適合するPIMを作ることは出来ないけれども、仮想することは可能であるから、それを補機と名付けることにする。従つて、前にも述べてある如く、第3図の回路で示される、主題のPIMを主機と称するわけである。

今までに判明して居ることを要約すれば『主機に \dot{V}_1 なる端子電圧を印加したときの電流軌跡と、補機に \dot{V}_K なる端子電圧を印加したときの電流軌跡は全く等しい』と云うことになる。

(1)式及(6)式は本来、同一のものである故に変数 S に或る値を与えると、同一の \dot{I}_1 を得るから、主機と補機とは同一の滑り〔即ち速度〕に於ては同一の一次電流 \overline{OP} を探ることは明かである。

補機の2次電流 I_K は、(6)式及第4図から

$$\dot{I}_K = \frac{\dot{V}_K}{Z_K + Z_2} \dots \dots \dots (7)$$

となり、之は第5及6図に於て \overline{NP} にて表される。

主機の2次電流 \dot{I}_2 は次の如くして求め得る。第3図に於ける $e-e$ 間の電圧 \dot{V}_e は $\dot{V}_1 - \dot{I}_1 Z_1$ であるから

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{V}_e Y_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_1 Z_1 Y_0 - \dot{V}_1 Y_0 = \dot{I}_1 A - \dot{V}_1 Y_0$$

(4)、(5)及(6)式を代入すれば

$$\dot{I}_2 = \left\{ \frac{\dot{V}_K}{Z_K + Z_2} \right\} A$$

更に(7)式を用いて

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_2 &= A \dot{I}_K \\ I_2 &= m I_K \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

即ち、同一滑りに於ては、主機2次電流は補機2次電流の m 倍である。

PIMに於ては、トルク、出力及2次銅損等は滑り、2次抵抗及2次電流の2乗により定まるものである。主機及補機の2次抵抗は共に r_2 で相等しいから、同一滑りのとき〔即ち同一一次電流のとき〕について論ずれば、主機のトルク、出力及2次銅損は補機の m^2 倍である。

以上を総合すれば次表を得る。

〔主機 / 補機〕

	端子電圧	速 度	1次電流	2次電流	2次銅損・トルク・出力
大 小 比	m^2	1	1	m	m^2
位 相 差	$-2a$		0	$-a$	

ハイランド氏円に於ては〔例えば第5図を用いて〕例えば出力の如き2次量は、図上に \overline{PQ} の長さを測り、 $V_K \cdot \overline{PQ}$ から得られる。即ち、補機の出力 W_K は次式により示される。

$$W_K = V_K \cdot \overline{PQ}$$

同一の滑りに於ける主機出力 W_2 は W_K を m^2 倍すれば得られる。即ち

$$W_2 = m^2 W_K = m^2 V_K \cdot \overline{PO} = V_1 \cdot \overline{PQ}$$

之を第6図上に考えれば、P点より基準直径 \overline{NB} に垂線を下し、 \overline{PQ} の長さを測り主機の端子電圧を乗することにより主機の出力が求められる。

トルク点をTとすれば、 $V_1 \cdot \overline{PQ'}$ は主機のトルクであり、 $V_1 \cdot \overline{QQ'}$ が主機の2次銅損であることは、補機を用いて容易に証明し得る。

但し、 $V_K \cdot \overline{Q'Q''}$ は補機の1次銅損 $r_K I_K^2$ であるけれども、 $V_1 \cdot \overline{Q'Q''}$ は主機の1次銅損 $r_1 I_1^2$ ではない。

トルク点 T は、補機にハイランド氏円の理論を用いて、次式により求められるから、主機即ち第6図に於ても同じく次式から定め得る。

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{TU}} = \frac{r_2}{r_K}$$

5. 精密円線図法の実用化

精密円を作図し、之を利用するには、設計値から、 g_0 、 b_0 、 r_1 、 r_2 、 x_1 及 x_2 を算出し得る場合は、点 N、角 α 、直径 $V_1/(x_K+x_2)$ 、点 S 及点 T を定めて、作図を完了し得る。

実験による場合は、点 N 及点 S はハイランド氏其の他が示して居る如く容易に定るけれども、角 2α 及点 T は、 g_0 、 b_0 、 r_1 及 x_1 を実験値から算出しなければならぬので、不便である。鳳氏法に於ても同様のなやみがある。

先ず傾角を簡単に求める方法から論ずる。PIM に於ては $x_1=x_2$ と置くのは普通であるが、拘束試験実施の場合に限り更に $r_1=r_2$ と見ることにすれば、 $Z_1=Z_2$ となる。

(6) 及 (7) 式を用いて \dot{I}_1/\dot{I}_K を計算し、 Y_K 及 Z_K を元にもどし、更に $S=1$ 即ち $Z_1=Z_2$ とすれば

$$\begin{cases} \text{拘束1次電流} = \overline{OS} = \dot{I}_S \\ \text{拘束補機2次電流} = \overline{NS} = \dot{I}_{KS} \end{cases}$$

$$\dot{I}_S/\dot{I}_{KS} = (1+Z_1 Y_0)^2 = A^2 = m^2 (\cos 2\alpha - j \sin 2\alpha)$$

となり \overline{OS} と \overline{NS} とのなす角 2μ が所要の傾角 2α に等しい筈である。

換言すれば点 S と点 N とを求めると同時に基準直径の傾角 2α が〔何等の計算を要せず〕図上で求め得る事となり甚だ便利である。

電気規格調査会標準規定〔JEC-37〕誘導機に記載してある乙種円線図法は、この事を利用して作図して居る。但しその説明は鳳氏円線図法によつて居る。

次にトルク線 \overline{NT} 即ち点 T を簡単に求める方法を論ずる。前節に於て明らかにした処によれば、拘束2次銅損は $V_1 \cdot \overline{ST}$ により与えられるから、拘束2次鉄損を無視するか、或は $V_1 \cdot \overline{ST}$ の中に含ませることにすれば、点 T を

$$V_1 \cdot \overline{ST} = [\text{拘束2次入力}]$$

となる様に定めればよい。それには次式を用いる。

$$[\text{拘束2次入力}] = [\text{拘束1次入力}] - [\text{拘束1次銅損}] - [\text{拘束1次鉄損}]$$

拘束時には、上述せる如く大体 $Z_1=Z_2$ と見てよいから、第3図の e-e 間の電圧は、無負荷時の殆ど $1/2$ となつて居る。故に鉄損は $1/4$ となつて居ると考えられる。仍つて

$$I_0 = \text{無負荷1次電流} = \overline{ON}$$

$$I_S = \text{拘束1次電流} = \overline{OS}$$

$$W_0 = \text{無負荷1次入力}$$

$$W_S = \text{拘束1次入力}$$

と置けば、トルク点 T は次式から定る。

$$V_1 \cdot \overline{ST} = (W_S - r_1 I_S^2) - \frac{1}{4} (W_0 - r_1 I_0^2)$$

但し乙種円線法に、之の $1/4$ なる係数を記入して居ないのは誤りと思われる。

乙種円線図により傾角やトルク点を定め得る根拠は、上述の如く、精密円の理論にある。作図実

施の便宜上、 $r_1=r_2$ と仮定して居るのであるから、傾角及トルク点を定めること以外には、之の仮定を用いてはいけない。

6. 乙種円線図の傾角の吟味

本節に於ては、(3)式から計算した真の傾角 2α と、乙種円線図法による第6図の傾角 2μ とを比較する。

2μ は、拘束1次電流 $\dot{I}_s = \dot{I}_1 = \overline{OS}$ と拘束補機2次電流 $\dot{I}_{KS} = \dot{I}_K = \overline{NS}$ とのなす角であるから \dot{I}_s / \dot{I}_{KS} の偏角でなければならない。但し便宜上、 \dot{I}_s よりも \dot{I}_{KS} が進相であるとき $\angle OSN$ の計り方をプラスとする。

(6) 及 (7) 式から \dot{I}_1 / \dot{I}_K を計算し、 Y_K 及 Z_K を元へもどせば

$$\dot{I}_1 / \dot{I}_K = Y_K(Z_K + Z_2) + 1 = 1 + Z_1 Y_0 + Z_2 Y_0 + Z_1 Z_2 Y_0^2$$

$Z_2 = r_2 / S + jx_2$ に於て、拘束時であるから $S=1$ とし、尙 $x_1 = x_2$ と置き、上記の式を展開すれば、 \dot{I}_s / \dot{I}_{KS} の偏角 2μ が求まるから、その正切を計算する。

$$\tan 2\mu = \frac{\{b_0 - (g_0^2 - b_0^2)x_1\}(r_1 + r_2) + 2g_0 b_0 r_1 r_2 - 2g_0 x_1 - 2g_0 b_0 x_1^2}{1 + 2b_0 x_1 - (g_0^2 - b_0^2)x_1^2 + (g_0^2 - b_0^2)r_1 r_2 + g_0(1 + 2b_0 x_1)(r_1 + r_2)}$$

非常に小なる項を無視して

$$\tan 2\mu = \frac{b_0(r_1 + r_2) - 2g_0 x_1}{1 + b_0 x_1} \approx 2\mu \dots \dots \dots (9)$$

之が乙種円線図法に於て、 r_2 が r_1 と等しくないと考えたときの $\angle OSN$ である。

(3)式から $\tan 2\alpha$ を計算し、非常に小なる項を無視すれば

$$\tan 2\alpha = \frac{b_0(2r_1) - 2g_0 x_1}{1 + b_0 x_1} \approx 2\alpha \dots \dots \dots (10)$$

(10)式から得られるのが真の傾角であるから、乙種円線図に於て $\angle OSN$ 即ち (9)式を用いると、 $r_2 > r_1$ のときには真値よりも大なる傾角を作図し、 $r_2 < r_1$ のときには真値よりも小なる傾角を作図することになる、 $r_2 = r_1$ ならば勿論正確なる傾角を得ることが出来る。

2μ と 2α との関係をより一層具体的に知るためには「少しく無理ではあるが」 $2g_0 x_1$ を無視する事がゆるされねばならない。

傾角の誤差率を ε とすれば

$$\varepsilon = \frac{2\mu - 2\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{r_2 - r_1}{r_1} \right\}$$

即ち乙種円線図法により円の「基準直径の」傾角を求めると、その誤差率は、抵抗偏差率の約 $1/2$ となる。

特殊の電動機〔例えば起重機用〕を除けば、抵抗の偏差はあまり大きくないから、乙種円線図法は満足すべきものである。

7. 拘束鉄損の吟味

円線図の実用化に当り、無負荷時の機械的損失及拘束時の2次鉄損が、あたかも1次の鉄損であるかの様に電力計の指示に含まれる。之を如何に取扱うべき哉を論ずる必要もあるが、筆者が本論文に示す所はあくまで等価回路に基づいて居るので、 g_0 は滑りに無関係に一定であるとして置き、上述の疑問の事柄に対する吟味は別の機会にゆずる。

扱、本節に於ては、無負荷時の鉄損と、拘束時の鉄損との関係を求め、第5節に於て拘束鉄損は無負荷鉄損の $1/4$ と考えた事の妥当性を吟味する。

第3図に於て $e-e$ 間の電圧を V_e とすれば

$$\text{無負荷鉄損} = [V_{e(s=0)}]^2 g_0$$

$$\text{拘束鉄損} = [V_{e(s=1)}]^2 g_0$$

となるから、両鉄損の比較をなす事は、結局 $V_{e(s=0)}$ と $V_{e(s=1)}$ との比較をする事に帰着する。
先ず \dot{V}_e を求める。即ち

$$\dot{V}_e = \dot{V}_1 - \dot{I}_1 Z_1 = \dot{V}_1 \left(\frac{1}{Z_1/Z_2 + (1 + Z_1 Y_0)} \right)$$

之に次式を代入する。

$$\mathbf{A} = m(\cos\alpha - jsina) = 1 + Z_1 Y_0 \dots \dots \dots (\text{再掲})$$

$$\dot{V}_e = \dot{V}_1 \left(\frac{1}{Z_1/Z_2 + \mathbf{A}} \right)$$

$V_{e(s=0)}$ のときには $[Z_{2(s=0)}] = \infty$ として

$$[\dot{V}_{e(s=0)}] = \dot{V}_1 \left(\frac{1}{m(\cos\alpha - jsina)} \right) = \dot{V}_1 \left(\frac{\cos\alpha + jsina}{m} \right)$$

$V_{e(s=1)}$ のときには、 $[x_1 = x_2]$ と見るのはもとよりであるが r_1 と r_2 とに少々の変差があつても、PIMの拘束インピーダンスを支配する決定的要素は $[r \ll x]$ であるから x でなければならぬ。仍つて傾角のときと同じく $r_1 \approx r_2$ [即ち $Z_1 \approx Z_2$] として拘束時の \dot{V}_e を求めることにする。

$$[\dot{V}_{e(s=1)}] = \dot{V}_1 \left(\frac{1}{1 + m(\cos\alpha - jsina)} \right)$$

此の結果を用いて両 V_e を比較すれば

$$\frac{\dot{V}_{e(s=0)}}{\dot{V}_{e(s=1)}} = \frac{1}{m} (\cos\alpha + jsina) \{1 + m(\cos\alpha - jsina)\} = (m + \cos\alpha + jsina) / m$$

必要なのは、電圧の大きさの比較であるからその比を n と置けば

$$\frac{V_{e(s=0)}}{V_{e(s=1)}} = n = \sqrt{m^2 + 2m\cos\alpha + 1} / m$$

(2) 及 (3) 式より或は [第7図を見て] 次の関係が承認され得る。

$$[m \approx 1 + b_0 x_1, \quad \cos\alpha \approx 1]$$

$$n = (m+1)/m \approx 2 - b_0 x_1$$

第5節に於て $1/n^2$ 即ち [拘束鉄損] / [無負荷鉄損] を $1/4$ と見たのは、上式の $b_0 x_1$ が小なるものと考えて $n \approx 2$ と置いたことになる。 $b_0 x_1$ はもとより小なるものであり、鉄損そのものも小であるから $n \approx 2$ と置くことは妥当である。

8. 結 論

多相誘導電動機の電流軌跡を示す精密なる円線図の理論は古くから数多くあるが、筆者は新しい考えのもとに別法を提案した。

精密円線図を実用化するには、傾角と、トルク点を求めねばならない。之等のものが、精密円線図論により証明せられて居れば、傾角は乙種円線図法により簡単に求め得る。トルク点は乙種円線図法の拘束鉄損の係数を訂正して簡単に求め得る。

上記の求め方 [傾角及トルク点] による誤差を、筆者の円線図論により吟味して、実用上支障のない事を知つた。