

デュプレックス歯切り法を考慮したハイポイドギヤの設計諸元関係式*

高橋 幸一*¹, 伊藤 紀男*², 高橋 幸敬*³

Basic Equations of the Hypoid Dimension Design for Duplex Cutting

Koichi TAKAHASHI, Norio ITO, and Yukitaka TAKAHASHI

The hypoid gear has had wide-spread use in industrial fields, but there has been no discussion about accurate design methods. For obtaining a satisfactory hypoid tooth form, some kinds of cutting machines have been made, with individual hypoid design and production systems. On the other hand, hypoid gear dimensions cannot be confirmed in the production, and the measuring systems are just their running test with the mating gear. Sometimes, plant engineers are quite confused by the hypoid noise trouble. This paper discusses the relationships between the hypoid dimensions and depthwise tooth taper for duplex cutting, and makes it possible to design accurate enough gear dimensions for designing and gear cutting.

Key Words: Gear, Hypoid Gear, Duplex Taper, Depthwise Taper, Hypoid Design Limit Pressure Angle, Normal Curvature, Geodesic Curvature

1. 緒 言

ハイポイドギヤが開発されて、すでに60有余年を経過しているが、いまだにこの種歯車の設計法は確立されているとはいえない。従来の方式⁽¹⁾では、設計諸元の精度がどのように位置づけられるかが、明らかに示されないからである。精密で、かつ優れた歯当たりをもつ歯車を得るためには、それにふさわしい精度の歯車諸元があってしかるべきである。

本論文は、ギヤの歯数が比較的多いハイポイドギヤを量産する場合に応用されるデュプレックス歯切り法を取り上げ、その精密な設計諸元の求めかたについて考察するものである。

2. こう配歯の影響

2-1 限界法曲率と歯元角の関係 ハイポイドギヤには歯形干渉が起こる境界として限界圧力角⁽²⁾が求められる。限界圧力角は、平歯車では零圧力角に相当し、歯形の相対曲率の符号が変わるところで、歯形の

実質側が逆転することである⁽³⁾。そこでハイポイドギヤについて、限界圧力角をもつ歯面の歯すじ方向の法曲率を限界法曲率⁽⁴⁾ $1/\rho_0^*$ 、その歯面を限界歯面 x_0 として表し、ピニオン、ギヤ両歯面の実質側の関係について考察する。ピニオン、ギヤの歯すじは限界圧力角 ϕ_0 において同一の ρ_0^* をもち、相対曲率は零である。 ρ_0^* を境にしてピニオン、ギヤの歯面は歯すじ方向の法曲率中心の位置、すなわち、実質側の関係が逆転する。この現象は平歯車の場合と同様である。しかるに、ハイポイドギヤの歯は駆動側と被動側に分かれ、実質側の関係はたがいに反転する。

いま、歯すじにそって十分に微小な歯が歯付けされる場合を考える。このとき、歯面の圧力角を ϕ_0 とすれば、歯すじ方向の歯面の法曲率は $1/\rho_0^*$ である。いま、圧力角を正より負へ変化させると、法曲率半径 ρ_0^* において実質側の反転を生ずるが、その点以外で反転することはない。そこで x_0 歯面を基準として設計し、上記の関係を満たすように歯付けをすれば、歯の両側において実質側の反転は生じない。

こう配歯の歯切りでは、カッタの回転面が歯車の歯底円すいに接するがごとく段取りされる。このため、カッタが構成する歯面の主方向はピッチ面上にはない。歯面のほぼ中央にある点Pがかみあい点である場

* 昭和62年11月3日 北陸信越支部北陸地方学術講演会において講演、原稿受付 昭和62年3月27日。

*¹ 正員、福井工業大学 (〒910 福井市学園3-618)。

*² 正員、富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190)。

*³ 正員、(〒230 横浜市鶴見区下末吉5)。

合、これを考察点に定め、図1のように運動学的座標系 P-XYZ を使用する。すなわち、点 P におけるピニオン、ギヤの速度ベクトルを v_1, v_2 で表し、相対速度ベクトル $w = -v_1 + v_2$ の方向を Z 軸、 $v_2 \times v_1$ の方向を Y 軸と定める。図1(a)はピッチ平面図、図1(b)は歯すじ直角断面図である。図1(c)はギヤ軸 a_2 を含み、ピッチ平面に垂直な断面図である。点 P を通る限界歯面を x_0 で表し、単位法線ベクトルを n_0 とする。ギヤの歯元角を δ_{11} とし、ギヤ歯底円すいを平行移動して点 P を通るようにしたときの円すい面の P 点での単位法線ベクトルを N' で表す。 N' を P-XYZ 座標系によって表せば、つぎのようになる。

$$N' = \begin{bmatrix} -\sin \delta_{11} \sin \psi_2 \\ -\cos \delta_{11} \\ -\sin \delta_{11} \cos \psi_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 ψ_2 はギヤのねじれ角である。また、 n_0 は

$$n_0 = \begin{bmatrix} -\cos \phi_0 \\ -\sin \phi_0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

限界法曲率中心を O_0 とすれば、これは n_0 ベクトル上で $\overline{PO_0} = \rho_0^*$ の位置に示される。 x_0 を局所的な回転面と考えれば、主方向の一つは回転軸に直角な方向である。その方向を単位ベクトル t_0 にて表せば、ベクトル N' および n_0 に直角である。また Z 軸の単位ベクトルを k で表せば、 t_0 はつぎのごとく計算される。まず、

$$t_0 = N' \times n_0 / \sqrt{(N' \times n_0)^2} \dots\dots\dots (3)$$

x_0 歯面上で、Z 軸に直角な方向は $n_0 \times k$ であるから、 t_0 が Z 軸となす角を δ_0 とすれば、 δ_0 は歯面の主方向と歯すじ方向のなす角を表す。よって、

$$\sin \delta_0 = t_0 \cdot n_0 \times k \dots\dots\dots (4)$$

式(1)~(3)を式(4)に代入して、

$$\sin \delta_0 = \tan \delta_{11} \cos \psi_2 \sec \phi_0 / \sqrt{h} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

$$h = 1 - 2 \tan \delta_{11} \tan \phi_0 \sin \psi_2 + \tan^2 \delta_{11} (\tan^2 \phi_0 + \cos^2 \psi_2) \dots\dots\dots (6)$$

点 P を通り、歯底円すいに平行な円すいの接平面をルート平面と名付ければ、この平面は歯切り段取りの基準平面になる。 t_0 がこの平面上にあることは、 t_0 の定義によって明らかである。

x_0 歯面の内接円筒を考え、その中心線を局所的な回転軸とし、単位ベクトル I_0 によって表せば、

$$I_0 = t_0 \times n_0 \dots\dots\dots (7)$$

x_0 の内接円筒の半径を r_c (P 点の曲率半径) として考えれば、 x_0 の主曲率半径の一つは定義上 r_c であるが、

他の一方は、一般に直線と考える。オイラーの定理によって、つぎの式が成り立つ。

$$1/\rho_0^* = \cos^2 \delta_0 / r_c \dots\dots\dots (8)$$

式(5)、(8)は歯元角 δ_{11} と ρ_0^* との関係を示す式である。

2.2 ピッチ面に関する測地的曲率 ρ_0^* の変化

は、ピッチ面に関する歯すじ方向の測地的曲率に影響を与える。図2は運動学的座標系の XY 立面図を表す。原点 P を通る $\overline{PO_{g2}}$ は x_0 の接平面を表す。ピニオン、ギヤ歯すじの曲率中心をそれぞれ H_1, H_2 とすれば、ともに歯すじ直角断面上にあるから、XY 平面上の点である。 $\overline{PH_1}, \overline{PH_2}$ が n_0 の方向、すなわち、 $\overline{PO_0}$ となす角をそれぞれ ϵ_1, ϵ_2 で表し、Z 軸に対し右回りの向きを正として定める。

つぎに、 x_0 歯面をもつピニオン、ギヤのピッチ面を考察する。曲面上の点には、一組の主曲率があるので、ピニオン、ギヤのピッチ面の主曲率半径の組を (ρ'_i, ρ''_i) 、 $(\rho'_{ii}, \rho''_{ii})$ として表す。ピニオン、ギヤ軸を表す単位ベクトルを a_1, a_2 とすると、

$$a_1 = [\cos \gamma \sin \psi_1, \sin \gamma, \cos \gamma \cos \psi_1]$$

$$a_2 = [\cos \Gamma \sin \psi_2, -\sin \Gamma, \cos \Gamma \cos \psi_2]$$

となる。ここで、 γ, Γ はピニオン、ギヤのピッチ角、 ψ_1 はピニオンのねじれ角である。ピッチ円すい距離をそれぞれ A_1, A_2 とすれば、各軸に直角方向の主曲率半径は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho'_i &= -A_1 \tan \gamma \\ \rho''_{ii} &= A_2 \tan \Gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

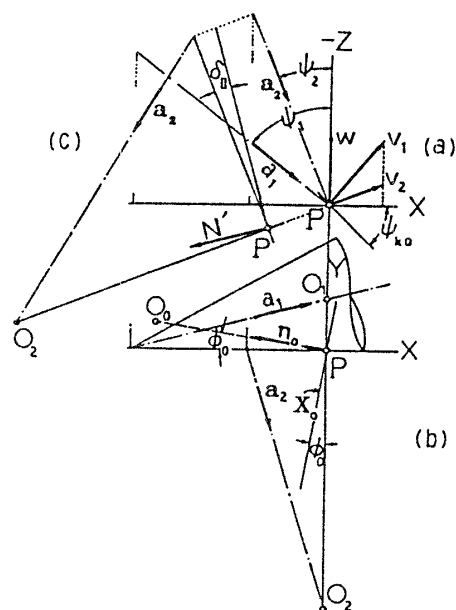


図1 P-XYZ 運動学的座標系と歯元角

ここに、各種曲率半径の符号は、曲率中心の位置が X, Y, Z 各座標に対し、負の方向にある場合を正として定める。

点 P におけるピッチ線が X 軸となす角を ψ_{k0} とすれば、つぎの式がある⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \tan \psi_{k0} &= \nu_3(1 + \tan \psi_1 \tan \psi_2) / \nu_1 - \tan \psi_2 \\ \nu_1 &= \tan \psi_1 \cot \gamma / A_1 + \tan \psi_2 \cot \Gamma / A_2 \\ \nu_3 &= \cot \gamma / A_1 + \cot \Gamma / A_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

また、ピッチ線の法曲率を $1/\rho_{k0}$ とすれば、つぎの式がある⁽⁴⁾。

$$\frac{1}{\rho_{k0}} = \frac{1}{\sin(\psi_1 - \psi_2)} \frac{\nu_3}{2} \sin(\psi_1 + \psi_2 + 2\psi_{k0}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1 \tan \gamma} - \frac{1}{A_2 \tan \Gamma} \right) \quad (11)$$

主曲率半径 ρ_{11} を用いれば、

$$\frac{1}{\rho_{k0}} = \frac{\sin^2(\psi_2 + \psi_{k0})}{\rho_{11}} + \frac{\cos^2(\psi_2 + \psi_{k0})}{A_2 \tan \Gamma} \quad (12)$$

また、歯すじ方向のギヤピッチ面の法曲率半径を ρ_{11} で表せば、オイラーの式から、

$$\frac{1}{\rho_{11}} = \frac{\cos^2 \psi_2}{\rho_{11}} + \frac{\sin^2 \psi_2}{A_2 \tan \Gamma} \quad (13)$$

図 2 において、ピッチ面の歯すじ方向の法曲率中心 O_{11} および O_{11} は Y 軸上にある。ギヤについて考えれば、 $\overline{O_{11}O_0}$ に P 点より下した垂線の長さ $\overline{PH_2}$ はギヤの歯すじ曲率半径を示す。微分幾何学的には歯すじの曲率半径⁽⁵⁾ $\rho_{t2} = \overline{PH_2}$ である。よって、

$$\rho_0^* = \rho_{t2} \sec \varepsilon_2 \quad (14)$$

また、

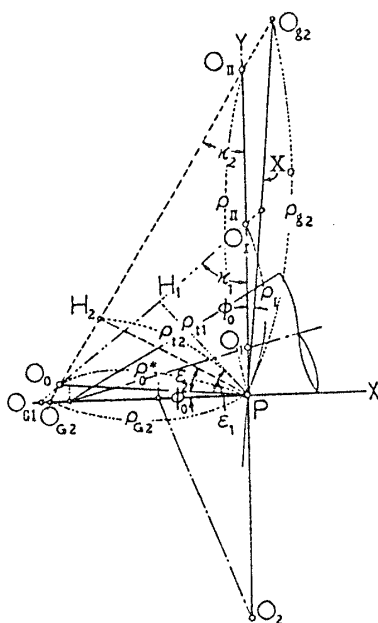


図 2 歯すじ直角断面図

$$1/\rho_{11} = \sin(\phi_0 + \varepsilon_2) / \rho_{t2} \quad (15)$$

一方において、 $\overline{O_{11}O_0}$ の延長とピッチ平面の交点を O_{G2} とすれば、 $\overline{O_{G2}P}$ はギヤピッチ面の歯すじ方向の測地的曲率半径 ρ_{G2} に等しい。よって、

$$\rho_{G2} = \rho_{11} \tan(\phi_0 + \varepsilon_2) \quad (16)$$

式(14)~(16)から、 ε_2 および ρ_{t2} を消去すれば、つぎの関係式が成り立つ。

$$\frac{1}{\rho_{G2}} = \frac{1}{\cos \phi_0} \left(\frac{1}{\rho_0^*} - \frac{\sin \phi_0}{\rho_{11}} \right) \quad (17)$$

回転式工具による仮想歯面は、平面上に構成されるため、 ρ_{G2} をもってギヤ歯すじの(ピッチ平面上の)曲率半径として扱う。

3. デュプレックス歯切り法

3.1 スプレッドブレード法⁽⁶⁾ 一般に、歯みぞの両側は同一のカッタで同時に歯切りされる。こう配歯をもつ円すい状の歯車を、この方法で仕上げる歯切り法はスプレッドブレード法と呼ばれている。図 3 は工具の構成する仮想歯を、ピッチ平面によって切断した場合を示す。この断面の形が、そのままギヤの歯すじに一致するように、ギヤ歯元角を与える方式がデュプレックス歯切り法である。ピッチ平面上の仮想歯面の圧力角を ϕ とし、歯すじ方向でピッチ平面とルート平面とがつくる角を δ_{11} とする。歯元角は δ_{11} であるから、

$$\tan \delta'_{11} = \tan \delta_{11} \cos \psi_2 \quad (18)$$

δ'_{11} によって生ずるねじれ角変化を $d\psi_{11}$ とすれば、十分に微小な歯形のもとでは、つぎの式が成り立つ。

$$\tan d\psi_{11} = \tan \delta'_{11} \tan \phi \quad (19)$$

よって、

$$d\psi_{11} = \tan \delta_{11} \tan \phi \cos \psi_2 \quad (20)$$

ここに、 ϕ は図 3 に示すがごとく ϕ_0 の影響を受けて非対称歯形となるから、圧力角 ϕ は駆動側を ϕ_{BD} 、被動側を ϕ_{BC} によって表す。

3.2 歯厚によるねじれ角の変化 カッタの代表する仮想歯は、十分微小な歯厚 T_p をもつとする。この仮想歯の中心線がピッチ平面上のねじれ角 ψ_2 をも

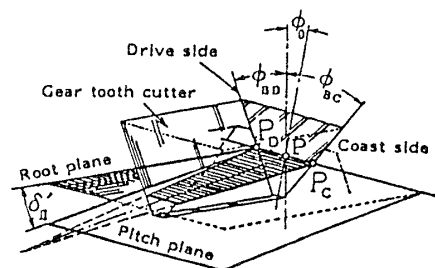


図 3 ピッチ平面上のカッタの断面形状

ち、歯すじの曲率半径は ρ_{C2} であるとする。いま、 $\delta_{11}=0$ の場合について考えれば、ピッチ平面とルート平面が一致する。ピッチ平面上の A_2 の位置では、考察点 P は歯の両側の点 P_D, P_C に分かれるため、実際の歯すじは P_D, P_C を通る。その曲率中心はともに O_{C2} に一致する。そこで歯厚による曲率半径の変化量を $d\rho$ で表せば、図4のごとき関係図が成り立つ。O をギヤの軸心とし、 $\overline{OO_{C2}}=S$ とすれば、 $\triangle OPO_{C2}$ において、つぎの式が成り立つ。

$$S^2 = A_2^2 + \rho_{C2}^2 - 2A_2\rho_{C2} \sin \psi_2 \dots\dots\dots (21)$$

S, A_2 を一定と考え、 ρ_{C2} が歯厚の相当分 $d\rho$ だけ変化するので、 P_D, P_C におけるねじれ角の変化を $d\psi_C$ とすると、つぎの式を得る。

$$d\psi_C = \frac{1}{\cos \psi_2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{\sin \psi_2}{\rho_{C2}} \right) d\rho \dots\dots\dots (22)$$

$d\rho = \pm T_p/2$ とすれば、ねじれ角は P_D 側で大ならば、 P_C 側では逆に小となる。

3.3 デュプレックス歯元角 ギヤの歯みぞを一度切りで仕上げるためには、ギヤの歯面のねじれ角を設計上のねじれ角 ψ_2 に等しくする必要がある。そのためには、式(20)の歯元角 δ_{11} によるねじれ角変化と、式(22)による歯厚の変化とを相殺しなければならない。すなわち、つぎの式が成り立つことである。

$$d\psi_{11} + d\psi_C = 0 \dots\dots\dots (23)$$

点 P の歯すじ直角モジュールを m_n とし、ギヤの転位係数を x とすれば、仮想ギヤの歯厚はギヤのみぞ幅に等しいことより

$$T_p = (\pi/2 + x(\tan \phi_{BD} - \tan \phi_{BC})) m_n \dots\dots (24)$$

一般に、ピニオンとギヤの転位係数は絶対値を等しくして、符号を変えて使用する。式(24)の仮想歯の歯厚 T_p は、ピニオン側の歯厚に等しい。駆動側の増分を $d\rho_D$ 、被動側の増分を $d\rho_C$ とし、

$$d\rho_C + d\rho_D = T_p \dots\dots\dots (25)$$

同様に $d\psi_{1D}$ および $d\psi_{1C}$ について考えれば、歯面の両側のねじれ角が ψ_2 であるためには、式(22)~(25)

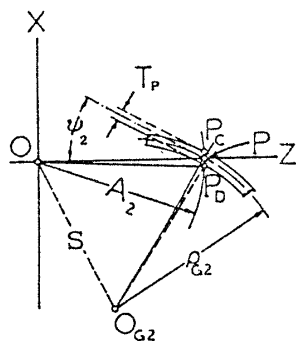


図4 歯厚とねじれ角の関係図

より、

$$\tan \delta_{11} = \frac{T_p \sec^2 \psi_2}{\tan \phi_{BD} - \tan \phi_{BC}} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{\sin \psi_2}{\rho_{C2}} \right) \dots\dots\dots (26)$$

以上の式によって、ギヤ側の歯元角が得られる。よって、ピニオンの歯切り法を自動車などの場合のように、別々の段取りで仕上げる場合には、ピニオン歯切り用の歯元角は標準の歯元角によることができる。しかし、ピニオンの歯切りもデュプレックス法による場合は、上述の歯元角の求め方を、そのままピニオンに応用すると過大になり、歯形干渉の心配が生ずる。これを避けるために、ピニオン、ギヤの歯元角の和をギヤ側の歯元角として計算する。これを $(\tan \delta_{11})_r$ とし、

$$(\tan \delta_{11})_r = \frac{\pi m_n \sec^2 \psi_2}{\tan \phi_{BD} - \tan \phi_{BC}} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{\sin \psi_2}{\rho_{C2}} \right) \dots\dots\dots (27)$$

式(27)が従来の考え方に近いものである。すなわち、式(27)で求めた角度をピニオン、ギヤの歯末の丈、歯元の丈によって案分し、その際生ずるねじれ角の誤差を、歯当たり修正で補う方式である。本報は式(26)を使用するので修正は必要としない。

4. ピッチ面の関係式

4.1 ピッチ円すいの式

ハイポイドギヤの歯車諸元を求めるためにピッチ円すいを決定する。考察点 P におけるピッチ円すいの円すい距離、ピッチ角、ねじれ角を組にして $(A_1, \gamma, \phi_1), (A_2, \Gamma, \psi_2)$ とおき、それぞれピニオン、ギヤのピッチ円すいの3要素と定める。点 P におけるピニオン、ギヤのピッチ円半径をそれぞれ R_1, R_2 で表せば、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= A_1 \sin \gamma \\ R_2 &= A_2 \sin \Gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

ピッチ円すいの成立条件には、つぎの関係式がある⁽⁴⁾。法線方向のピッチが等しいことから、ピニオン、ギヤの歯数を n, N とすれば、

$$R_1 \cos \phi_1/n = R_2 \cos \psi_2/N \dots\dots\dots (29)$$

軸角を Σ とすれば、

$$\cos \Sigma = -\sin \gamma \sin \Gamma + \cos \gamma \cos \Gamma \cos(\phi_1 - \psi_2) \dots\dots\dots (30)$$

オフセットを E とすれば、

$$E = (R_1 \cos \Gamma + R_2 \cos \gamma) \sin(\phi_1 - \psi_2) / \sin \Sigma \dots\dots\dots (31)$$

ギヤのピッチ径を D 、歯幅を F とすれば、考察点でのギヤピッチ円半径は

$$R_2 = (D - F \sin \Gamma) / 2 \dots\dots\dots (32)$$

$\nu_1 \sim \nu_4$ をつぎのごとく定めれば、 ϕ_0 および ρ_0^* は、つぎのように表される。

$$\nu_1 = \cos \gamma \tan \phi_1 / R_1 + \cos \Gamma \tan \phi_2 / R_2 \dots\dots (33)$$

$$\nu_2 = \sin \gamma \sec \phi_1 / R_1 - \sin \Gamma \sec \phi_2 / R_2 \dots\dots (34)$$

$$\nu_3 = \cos \gamma / R_1 + \cos \Gamma / R_2 \dots\dots\dots (35)$$

$$\nu_4 = \sin \Gamma \sin \phi_1 / R_2 - \sin \gamma \sin \phi_2 / R_1 \dots\dots (36)$$

$$\tan \phi_0 = -\nu_4 \sec(\phi_1 - \phi_2) / \nu_3 \dots\dots\dots (37)$$

$$\rho_0^* (-\nu_1 \sin \phi_0 + \nu_2 \cos \phi_0) = \tan \phi_1 - \tan \phi_2 \dots\dots\dots (38)$$

以上の式(29)～(38)の10個の式に対し、未知数は $R_1, \gamma, \phi_1, R_2, \Gamma, \phi_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \phi_0, \rho_0^*$ の12個である。連立方程式を解くため、2個の未知数をまず定める。例えば、ピニオンねじれ角 ϕ_1 か、ギヤねじれ角 ϕ_2 および ρ_0^* を仮定する。一般には

$$\phi_1 = \phi_{10} \text{ (定数値)} \dots\dots\dots (39)$$

$$\rho_0^* = r_c \dots\dots\dots (40)$$

として与える。そこで連立方程式は上記2式を加えて12の式とする。 ρ_0^* は近似値であり、 δ_{11} が決まれば新しい ρ_0^* の値を与えて再度計算し、正確にする。

一方、同一の歯車装置の中に、異なる歯数比の歯車を組み込む必要が生じる場合がある。このとき、ギヤの組立距離を一定とする設計法が考えられる。点Pよりピニオン、ギヤ両軸に下ろした垂線の足と、両軸の共通垂線の距離を X_p, X_g で表せば、つぎの式を得る⁽⁷⁾。

$$X_p = (R_1 \sec \gamma + R_2 \sec \Gamma)(\sin \gamma + \sin \Gamma \cos \Sigma) / \sin^2 \Sigma - R_1 \tan \gamma \dots\dots\dots (41)$$

$$X_g = (R_1 \sec \gamma + R_2 \sec \Gamma)(\sin \Gamma + \sin \gamma \cos \Sigma) / \sin^2 \Sigma - R_2 \tan \Gamma \dots\dots\dots (42)$$

実用上 X_p には多少の自由度があるが、 X_g はほぼ一定と考える。変数の数は同一とする。第1の場合を、式(29)～(39)までとし、第2の場合を式(29)～(38)および式(42)とすれば、それぞれ11個の連立方程式を得る。

4.2 方程式の解法 4.1節で得られた11個の連立方程式を解くために、まず、各未知数により各式を偏微分し、第零次近似値を与えて第一次修正値を求める。この操作を繰返し、得られた解が収束するまで計算を行う。本報では、下記の順序にしたがって計算を行った。

$$\left. \begin{aligned} \cot \Gamma &= (n/N + \cos \Sigma) / \sin \Sigma \\ R_2 &= (D - F \sin \Gamma) / 2 \\ \cot \gamma' &= (N/n + \cos \Sigma) / \sin \Sigma \\ \sin \varepsilon_0 &= E \sin \Sigma / (R_2 \cos \gamma') \\ \psi_2' &= \phi_{10} - \varepsilon_0 \\ R_1 &= (n/N) R_2 \cos \psi_2' / \cos \psi_{10} \\ \tan^2 \gamma &= \frac{1}{\tan^2 \Gamma} \left\{ 1 - \frac{E^2}{(R_1 \cos \Gamma + R_2 \cos \gamma')^2} \right\} \\ \sin \varepsilon_1 &= E \sin \Sigma / (R_1 \cos \Gamma + R_2 \cos \gamma) \\ \psi_2 &= \phi_{10} - \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

$$m_n = 2R_2 \cos \psi_2 / N \dots\dots\dots (44)$$

P点における歯末の丈 a_g とし、歯丈の低歯係数を k とすれば、有効歯丈は $2km_n$ である。よって

$$\left. \begin{aligned} a_g &= (k - x) m_n \\ \tan \delta_{11} &= (2km_n - a_g) / A_2 \\ \rho_0^* &= r_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

これらの式によって得られた数値を第零次近似値として各方程式に代入する。いま各変数の微小量を $dR_1, d\gamma, d\psi_1, dR_2, d\Gamma, d\psi_2, d\nu_1, d\nu_2, d\nu_3, d\nu_4, d\phi_0$ とする。式(29)～(42)を下記のごとく展開する。

$$\begin{aligned} B_1 &= (N/n) R_1 \cos \phi_1 - R_2 \cos \psi_2 \\ &= -dR_1 (N/n) \cos \phi_1 + d\psi_1 (N/n) R_1 \sin \phi_1 \\ &\quad + dR_2 \cos \psi_2 - d\psi_2 R_2 \sin \psi_2 \dots\dots\dots (46) \\ B_2 &= \cos \Sigma - (-\sin \gamma \sin \Gamma + \cos \gamma \cos \Gamma \cos \varepsilon') \\ &= -d\gamma (\cos \gamma \sin \Gamma + \sin \gamma \cos \Gamma \cos \varepsilon') \\ &\quad - (d\psi_1 - d\psi_2) \sin \varepsilon' \cos \gamma \cos \Gamma \\ &\quad - d\Gamma (\sin \gamma \cos \Gamma + \cos \gamma \sin \Gamma \cos \varepsilon') \end{aligned} \dots\dots\dots (47)$$

ここに、
 $\varepsilon' = \phi_1 - \psi_2 \dots\dots\dots (48)$

$$\begin{aligned} B_3 &= \nu_1 - \cos \gamma \tan \phi_1 / R_1 - \cos \Gamma \tan \phi_2 / R_2 \\ &= -dR_1 \cos \gamma \tan \phi_1 / R_1^2 - d\gamma \sin \gamma \tan \phi_1 / R_1 \\ &\quad + d\psi_1 \cos \gamma \sec^2 \phi_1 / R_1 - dR_2 \cos \Gamma \tan \phi_2 / R_2^2 \\ &\quad - d\Gamma \sin \Gamma \tan \phi_2 / R_2 + d\psi_2 \cos \Gamma \sec^2 \phi_2 / R_2 \\ &\quad - d\nu_1 \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_4 &= \nu_2 - \sin \gamma \sec \phi_1 / R_1 + \sin \Gamma \sec \phi_2 / R_2 \\ &= -dR_1 \frac{\sin \gamma}{R_1^2 \cos \phi_1} + d\gamma \frac{\cos \gamma}{R_1 \cos \phi_1} \\ &\quad + d\psi_1 \frac{\sin \gamma \sin \phi_1}{R_1 \cos^2 \phi_1} + dR_2 \frac{\sin \Gamma}{R_2^2 \cos \phi_2} \\ &\quad - d\Gamma \frac{\cos \Gamma}{R_2 \cos \phi_2} - d\psi_2 \frac{\sin \Gamma \sin \phi_2}{R_2 \cos^2 \phi_2} - d\nu_2 \end{aligned} \dots\dots\dots (50)$$

$$\begin{aligned} B_5 &= \nu_3 - \cos \gamma / R_1 - \cos \Gamma / R_2 \\ &= -dR_1 \cos \gamma / R_1^2 - d\gamma \sin \gamma / R_1 - dR_2 \cos \Gamma / R_2^2 \\ &\quad - d\Gamma \sin \Gamma / R_2 - d\nu_3 \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_6 &= \nu_4 + \sin \gamma \sin \psi_2 / R_1 - \sin \Gamma \sin \psi_1 / R_2 \\
 &= dR_1 \sin \gamma \sin \psi_2 / R_1^2 - d\gamma \cos \gamma \sin \psi_2 / R_1 \\
 &\quad + d\psi_1 \cos \psi_1 \sin \Gamma / R_2 - dR_2 \sin \Gamma \sin \psi_1 / R_2^2 \\
 &\quad + d\Gamma \cos \Gamma \sin \psi_1 / R_2 - d\psi_2 \cos \psi_2 \sin \gamma / R_1 \\
 &\quad - d\nu_4 \dots\dots\dots (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_7 &= -\nu_4 - \nu_3 \tan \phi_0 \cos \varepsilon' \\
 &= (-d\psi_1 + d\psi_2) \nu_3 \tan \phi_0 \sin \varepsilon' \\
 &\quad + d\nu_3 \tan \phi_0 \cos \varepsilon' + d\nu_4 \\
 &\quad + d\phi_0 \nu_3 \cos \varepsilon' \sec^2 \phi_0 \dots\dots\dots (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_8 &= \tan \psi_1 - \tan \psi_2 - \rho_0^* (-\nu_1 \sin \phi_0 + \nu_2 \cos \phi_0) \\
 &= -d\psi_1 \sec^2 \psi_1 + d\psi_2 \sec^2 \psi_2 - d\nu_1 \rho_0^* \sin \phi_0 \\
 &\quad + d\nu_2 \rho_0^* \cos \phi_0 - d\phi_0 \rho_0^* (\nu_1 \cos \phi_0 + \nu_2 \sin \phi_0) \\
 &\quad \dots\dots\dots (54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_9 &= E \sin \Sigma - \sin \varepsilon' (R_1 \cos \Gamma + R_2 \cos \gamma) \\
 &= dR_1 \sin \varepsilon' \cos \Gamma - d\gamma \sin \varepsilon' R_2 \sin \gamma \\
 &\quad + (d\psi_1 - d\psi_2) (R_1 \cos \Gamma + R_2 \cos \gamma) \cos \varepsilon' \\
 &\quad + dR_2 \cos \gamma \sin \varepsilon' - d\Gamma R_1 \sin \Gamma \sin \varepsilon' \dots (55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{10} &= R_2 - (D - F \sin \Gamma) / 2 \\
 &= -dR_2 - d\Gamma \cos \Gamma (F/2) \dots\dots\dots (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \psi_1 - \psi_0 \\
 &= -d\psi_1 \dots\dots\dots (57 \cdot a)
 \end{aligned}$$

式(39)の代わりに、式(42)を用いる場合は、同一歯車装置に歯数比の異なるハイポイドギヤを組み込める。

上記の場合には、 B_{11} は

$$\begin{aligned}
 l_1 &= R_1 \sec \gamma + R_2 \sec \Gamma \\
 l_2 &= \sin \Gamma + \sin \gamma \sin \Sigma
 \end{aligned}$$

とおいて、つぎのごとく変える。

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= X_g \sin^2 \Sigma + R_2 \tan \Gamma \sin^2 \Sigma - l_1 l_2 \\
 &= dR_1 l_2 \sec \gamma + d\gamma (R_1 l_2 \tan \gamma \sec \gamma \\
 &\quad + l_1 \cos \gamma \cos \Sigma) + dR_2 (l_2 \sec \Gamma \\
 &\quad - \tan \Gamma \sin^2 \Sigma) + d\Gamma (R_2 l_2 \sin \Gamma \sec^2 \Gamma \\
 &\quad + l_1 \cos \Gamma - R_2 \sin^2 \Sigma \sec^2 \Gamma) \dots\dots\dots (57 \cdot b)
 \end{aligned}$$

いま、 $i, j=1 \sim 11$ の整数とし、 $(B_i)=B_1 \sim B_{11}$ を列マトリックス B 、 $dR_1, d\gamma, \dots, d\phi_0$ を $(D_i)=D_1 \sim D_{11}$ として、列マトリックス D として表す。また、変数による偏微分係数を A_{ij} で表し、マトリックス A とすれば、連立方程式はつぎのごとく整理される。

$$\left. \begin{aligned}
 AD &= B \\
 D &= A^{-1}B
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

いま各変数ごとに、 $R_1=R_1+D_1, \gamma=\gamma+D_2, \dots, \phi_0=\phi_0+D_{11}$ のごとく修正し、 $(A_{ij}), (B_i)$ の式に代入し、 D を求める。一般に、数回の繰返しで収束する。

収束値を式(5)、(8)に代入し、 ρ_0^* を求める。 ρ_0^* の値で再びマトリックスを計算し、 ρ_0^* をまず収束させる。つぎに、この収束値を式(26)に代入して、デュプレ

ックス歯元角 δ_{11} を計算する。 δ_{11} を式(5)、(8)に代入して再び ρ_0^* を求め、これによって、式(58)の計算を実施する。かくて、 δ_{11}, ρ_0^* の最終収束値をもって解とする。

4.3 等高歯ハイポイドギヤの特徴 歯にこう配をつけなくて歯切りする方式が、等高歯であるから、上述の計算式で $\delta_{11}=0$ になればよい。そこでまず、 $\phi_0=0$ として考察する。式(17)に代入すれば、

$$\rho_{c2} = \rho_0^* \dots\dots\dots (59)$$

が成立する。式(37)に代入すれば、 $\nu_4=0$ となり、

$$R_1 \sin \psi_1 / \sin \gamma = R_2 \sin \psi_2 / \sin \Gamma \dots\dots\dots (60)$$

式(59)、(60)を式(38)に代入して、特に ρ_0^{**} で表せば、

$$\rho_0^{**} = \sin \psi_2 R_2 / \sin \Gamma \dots\dots\dots (61)$$

$$\tan \delta_{11} = 0 \dots\dots\dots (62)$$

つぎに、 $\phi_0 \neq 0$ として、式(17)に代入すれば、式(26)の右辺が零にならない。よって、等高歯ハイポイドギヤであるためには、 $\phi_0=0, \rho_0^*$ は式(61)の場合に限られる。こう配歯の歯すじ方向の限界法曲率半径は式(61)の半径を境にして、 ρ_0^* が特殊な限界法曲率半径 ρ_0^{**} より大であれば、式(26)によって δ_{11} は正、逆に小となれば負、すなわち、逆こう配歯ハイポイドギヤになる。

また、 ϕ_0 の符号については、等高歯であれば零であるので、 ρ_0^* が ρ_0^{**} の場合が変換点である。こう配歯の場合は、 $\delta_{11} > 0$ 、よって、式(26)から

$$1/A_2 \sin \psi_2 > 1/\rho_{c2} \dots\dots\dots (63)$$

ピニオンの場合には、これと全く同様にして ρ_{c1} を同じピッチ面に関する歯すじ方向の測地的曲率半径とすれば、ピニオン用歯元角 δ_{11} は負である。よって、

$$1/A_1 \sin \psi_1 < 1/\rho_{c1} \dots\dots\dots (64)$$

図2において $\rho_{c1} = \overline{OC_1P}$ であることから、

$$1/\rho_{c2} > 1/\rho_{c1} \dots\dots\dots (65)$$

式(63)~(65)を式(36)に代入すれば、 $\nu_4 > 0$ 、式(37)によって ϕ_0 は負である。逆こう配の場合は式(65)を除き、不等号の向きが逆転するため ϕ_0 は正となる。

5. 設計諸元の具体例

計算の具体例は、自動車用ハイポイドギヤの場合とし、こう配歯、等高歯、逆こう配歯について求めた。ギヤの歯切りは成形歯切り(formate)、ピニオンはfixed setting⁽⁶⁾歯切り法の場合を考察する。各諸元のうちギヤの転位係数を $x = -0.665$ とし、低歯係数としては、並歯に対し0.95倍の歯丈で計算する。また、ピニオンとギヤの頂げきは歯すじにそって一定とし、考察点における有効歯丈の0.150倍とする。ピニオン歯先円す

いは、ギヤ歯底円すいを軸関係位置を変えずにピニオン軸まわりに回転し、その内接円すいに頂げき分だけ平行にずらせた円すいをもってあてる。

表1はハイポイドギヤの主要諸元を示す。

表1にもとづいて、設計諸元の詳細を求めたものが表2である。その結果を図示したものが、図5の(a), (b), (c)である。図5(a)は一般の乗用車に使用されるグリーンソン式こう配歯の代表例であるが、精度を特に考慮した設計である。図5(b)は等高歯ハイポイ

ドギヤであるが、カッタ半径が小なるため、グリーンソン方式では生産向きではない。図5(b)および図5(c)は欧州形歯切り盤用に使われているが、設計方法は共通になることを示す。本計算例からもわかるように、等高歯を境にして、こう配歯では $\rho_0^* > \rho_0^{**}$ であり、 $\rho_0^* < \rho_0^{**}$ の場合は逆こう配になる。 ϕ_0 についても $\rho_0^* > \rho_0^{**}$ では負、 $\rho_0^* < \rho_0^{**}$ では正になることを、表2の計算結果は明りように示している。

6. 結 論

ハイポイドギヤの具体的な設計法を論じたものはこれまでほとんどみられない。そこで本報では、量産の中心になっているデュプレックス歯切り法について、まず、設計諸元の詳細を容易に、かつ精密に得る方式を求めた。そして基礎式の理論的考察および具体例の計算結果から、つぎの事項を明らかにした。

表1 ハイポイドギヤ主要諸元例

Combination	n/N		8/35
Pinion Offset (Bellow Center)	E	mm	30
Gear Pitch Diameter	D	mm	190
Gear Face Width	F	mm	28
Hand of Pinion			Left
Average Pressure Angle		deg	21.25
Driver			Pinion
Pinion Spiral Angle	ψ_0	deg	50

表2 設計諸元の詳細 (計算結果)

	TYPE-(a)		TYPE-(b)		TYPE-(c)		
	PINION	GEAR	PINION	GEAR	PINION	GEAR	
Pitch Diameter	mm	58.5037	190	65.2403	190	69.5585	190
Addendum	mm	8.0617	1.3896	6.6151	1.1682	5.7569	1.0375
Dedendum	mm	2.6256	9.0835	2.3865	7.8385	2.2532	7.1133
Whole depth	mm		10.4731		9.0067		8.1508
Outside Diameter	mm	74.1544	190.7105	77.1978	191.0536	79.2611	191.1703
Pitch Apex Beyond Crossing Point	mm	25.2544	-3.5779	-24.4339	16.4905	-39.1539	31.6317
Face Apex Beyond Crossing Point	mm	16.2889	-3.8420	-8.9129	17.7994	-19.7637	34.3744
Root Apex Beyond Crossing Point	mm	22.1477	-3.2900	-30.0103	7.7084	-44.4690	15.3611
Crown to Crossing Point	mm	90.9350	27.3555	90.4896	30.4622	90.4955	32.3925
Pitch Angle	deg	13.9083	75.1881	25.3391	63.1963	32.5747	55.6685
Face Angle	deg	19.0749	76.1478	25.3217	63.1963	29.2616	55.0653
Root Angle	deg	13.0013	69.7499	25.3391	63.1963	33.1517	59.0864
Spiral Angle	deg	50	29.4651	50	29.6009	50	29.3084
Mean Radius	mm	25.2215	81.4652	25.5089	82.5042	25.8725	83.4389
Limit Pressure Angle	deg		-6.4445		0		4.0499
Dedendum Angle	deg	-0.9596	5.4381	0	0	0.6031	-3.4178
Cutter Diameter	mm		190.5		91.3185		70

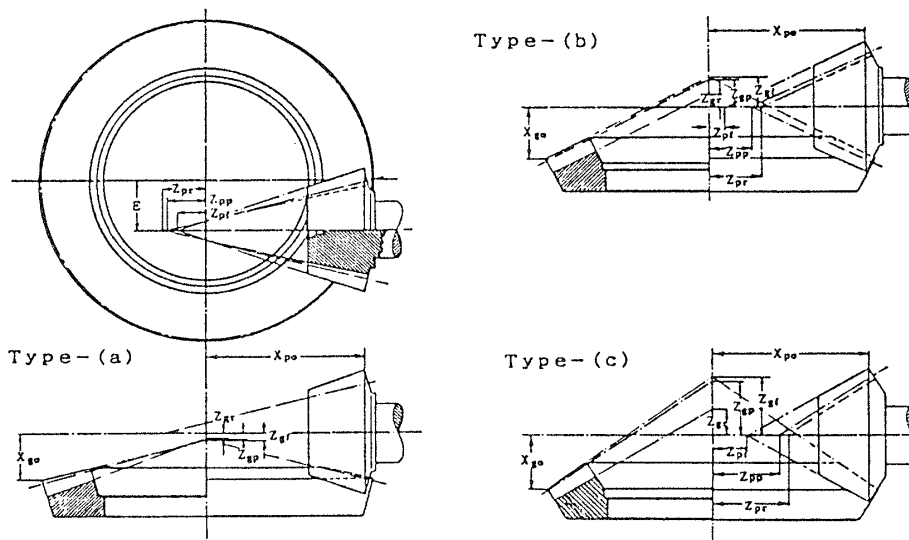


図5 3種類のハイポイドギヤ具体例

(1) ハイポイドギヤの歯すじ干渉を避けるためには、限界法曲率半径をもとにして歯付けしなければならない。

(2) 限界圧力角を境にして、その両側に駆動側、被動側を歯付けする。

(3) 特殊な限界法曲率半径 ρ_{*}^{*} があり、等高歯の場合には、その半径を与えるがごときカット諸元しなければならない。

(4) こう配歯は、特殊な限界法曲率より大なるカット半径を使用する場合で、こう配の程度は式(26)によって示す。

(5) 限界圧力角の値は、特殊な限界法曲率半径の場合が零で、その半径より大なるか、小なるかの与え

方によって、その符号は負から正に転ずる。

以上の方式によれば、精密歯切りに堪え得る高精度の設計諸元を与えることが可能となる。

文 献

- (1) 例えば、仙波、歯車(第7巻)、(昭36)、2533、日刊工業新聞社。
- (2) Wildhaber, E., *Am. Mech.* 90-2(1946), 131.
- (3) 酒井、機構学大要、(昭42)、106、養賢堂。
- (4) 高橋・伊藤、機論、49-443, C (昭58) 1246.
- (5) 高橋・伊藤、機論、50-456, C (昭59) 1449.
- (6) Gleason Works, SD 4053A-1971-C & T.
- (7) 高橋・伊藤、富山大学工学部紀要、33(昭47)、25.
- (8) 例えば、Gleason Works, HFT-16SD 3050A 52F 500HM.

討 論

〔質問〕 田村久司〔新潟大学工学部〕

(1) 歯形(面)と歯厚がともに微小であるという前提で Duplex 法を論じておられるが、実際の歯車では微小であるとする事はできないと思う。お考えを伺いたい。

(2) Gleason 社のいう Duplex 法とは、歯面のかみあいを考慮しつつ、付図1のように歯面 P, P' および A, A' を歯切りする方法であると理解していた。そうすると歯面 A, A' はたがいに1ピッチ位相のずれたカット刃面で歯切りされることになる。本法ではこのことが考慮されているか。

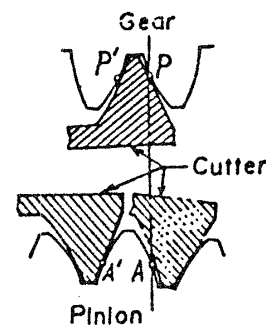
(3) 緒言で「設計諸元を精密にすると優れた歯当りの歯車を得ることができる」というように述べておられるが、表2に示されたような諸元を与えると直ちに良好な歯当たりの歯車になるのか。

〔回答〕 (1) 本論文は設計の基準寸法を明確にするために、ピッチ面の決定の場合と同様に、無限大の歯数、無限小の歯形を前提条件として解析を行った。有限の歯形をもつ実際の歯車でも、歯数が多い場合には、わずかな手直して歯当りは得られる。自動車のハイポイドギヤのように、歯数も少なく、精密な歯当りを必要とする場合は、設計法は本論文の方法によって行い、ギヤのデュプレックス歯切り後は、その歯形の両歯面を独立したもとして計算する。ピニオンは最適歯当りが得られるように、それぞれ異なるカットで、独立して歯切りするのである。

(2) デュプレックス法とは、“Duplex spread-blade method” のことで、この方法は、“Duplex taper”を得るためにグリーソン社が開発した設計法で

ある。この方法によれば、付図1の $\widehat{PP'}$ と $\widehat{AA'}$ の和は1ピッチとなり、平歯車の場合と全く同一の考え方ができる。ご質問の趣旨もその点にあると思うが、ご承知のごとく、曲がり歯傘歯車やハイポイドギヤの転位係数 x は、ピニオン側を正とすれば、ギヤ側は負とすることが常識化されている。本論文でもそのことは、式(24)のところで明記している。したがって、1ピッチであることは保証されている。

(3) ハイポイドギヤが開発されて、60有余年を経るが、いまだに実験歯切りの労苦が絶えない。グリーソン社はその点を容易化するために、TCA法を開発し、実用化させた。しかし、その方法は現場の技術者にとっては参考データにしかならず、不評であることは周知のとおりである。著者らは、これまでのCAEを応用した一連のハイポイドギヤの研究を通して、設計諸元の厳密化の必要性を痛感したのである。すなわち、実際のピッチ面におけるかみあい圧力角やねじれ角などの諸元が計算できないことである。そのため、歯当



付図1

たりパターンをあらかじめ予想することが不可能である。

そこで、本論文によって、CAEにおける膨大な計算の前提となる精密な諸元を求めたのである。しかし、設計だけを精密にすれば、すべてが解決するというほど技術は甘くないが、真に精密なものを得るためには、設計の段階からそれにふさわしい設計法があつてしかるべきであると考え、本論文の緒言は、以上のことをまとめたものである。

〔質問〕 渡辺 真・島地 重幸

〔東北大学工学部〕

デュプレックス歯切り法の関係性を、従来よりもいちだんと高い精度で明らかにされた点に敬意を表す。次の点をご教示いただきたい。

(1) 等高歯ハイポイドギヤで、 $\phi_0 \neq 0$ の場合に式(26)の右辺が零にならないとされているが、その論拠を、その前提条件をも含めてもう少し詳しく説明していただきたい。

(2) 式(17)の ρ_{11} あるいは(13)の ρ'_{11} はどのように定まるのか。 ρ_{11} を自由に与えることができるか。

〔回答〕 (1) Duplex spread-blade method 以外の歯切り法では、等高歯の場合でも、 $\phi_0 \neq 0$ が普通である。本論文は、デュプレックス歯切り法を前提条件としており、その条件の下で等高歯を考えた場合、 $\phi_0 \neq 0$ と仮定すると、式(17)から $\rho_{C2} \neq \rho_0^*$ となり、また、式(37)から $\nu_4 \neq 0$ となる。式(26)で等高歯条件 $\delta_{11} = 0$ とすると、次式が得られる。

$$\frac{1}{A_2} \frac{\sin \psi_2}{\cos \phi_0} \left(\frac{1}{\rho_0^*} - \frac{\sin \phi_0}{\rho_{11}} \right) = 0$$

この式と、式(37)、(38)、(13)、さらに式(11)、(12)の計6個の方程式を連立させた場合、解がなかったということである。

(2) 式(10)、(11)から ϕ_{k0} および ρ_{k0} が計算され、式(12)によって、 ρ_{11} が求められる。したがって、式

(13)から ρ_{11} は求められる。すなわち、 ρ_{11} はピッチ円すいの3要素 A_1, γ, ψ_1 および A_2, Γ, ψ_2 が決定されると計算されることになり、 ρ_{11} は自由に与えることはできない。歯形や歯車諸元がきまると、式(29)~(38)によって、ピッチ円すいの3要素が決定されるため、 ρ_{11} もきまってしまうということである。

〔質問〕 藤井 康治〔東北大学名誉教授〕

円板状カッタによるハイポイド歯車の歯切り法を明確にしようとする著者らの努力に敬意を表す。下記の点を質問したい。

カッタ半径 r_c はどのように、何を基準にして選ばれるのか。またいくらでも変更の余地があるとすればどのくらいの幅が許されるのか。

カッタの圧力角についても同じことを伺いたい。

〔回答〕 カッタ半径 r_c の選び方は、歯切り盤によってきまる。グリーンソン社はギヤ円すい距離を基準にして選び、それよりも少し小さめの標準カッタを使用する。欧州形の歯切り盤では、相当冠歯車のねじれ角が 30° の場合、ピッチ点における歯すじ曲率半径を基準にしてきめる。いずれの場合においても、カッタは重切削が可能であり、歯元角の大きさや歯当たりを考慮して決定すべきであると考え。

カッタ圧力角は、グリーンソン社の場合はギヤとピニオンで分かれる。両者をデュプレックス歯切り法で加工する場合は、共通の標準圧力角を使用する。しかし、ピニオンの歯形精度が、上記歯切り法では不十分な場合には、ピニオン歯形の両歯面をそれぞれ独立した段取り (Fixed setting method) で加工する。このときのピニオンカッタ圧力角は、 $1 \sim 2^\circ$ とびで準備された最適ブレード圧力角を使用する。その他の歯切り盤では、各メーカーの標準圧力角 (非対称を含む) を使用する。最適圧力角というものは、平歯車と同様に、ハイポイドギヤの場合も考えられない。