

往復機関の動力学的関係式*

高橋幸一*¹, 織田 勉*¹, 伊藤紀男*²
高橋幸敬*³, 山本洋典*⁴

Dynamic Relationships of Reciprocating Engines

Koichi TAKAHASHI, Tsutomu ODA, Norio ITO,
Yukitaka TAKAHASHI, and Hironori YAMAMOTO

Many vibration problems of combustion engines have been resolved supported by the progress of experimental measurement and computer-aided engineering systems. Dynamic theories of the piston-crank mechanisms still consist of the static equivalent mass and correcting crank torque methods. They have been called the approximate analysis because they are predicated on the constant angular velocity about the crank axis. This paper discusses the basic relationships of the reciprocating engine dynamics in order to verify these conventional methods. The results are that some of them are correct and another is not sufficient for analyzing vibration, on the angular acceleration of the crank shaft.

Key Words: Mechanical Dynamics, Forced Vibration, Reciprocating Vibration, Angular Acceleration, Correcting Torque, Dynamic Balancer

1. 緒 言

ピストンクランク機構を基本とする, 往復動内燃機関の振動問題は, 電子計算機などによる実験解析法⁽¹⁾の進展に伴い, かなり進歩向上している. その反面, 上記諸問題の起振源としての往復動機関に関する動力学は, 厳密解への試み⁽²⁾⁽³⁾もあったが, いまなお等価系方式ならびに級数展開方式などによって構成されている. ここに本論文は最近における多気筒化, ならびにバランス使用の動向について, その評価, 改善を図るため, 長年用いられてきた簡略法⁽⁴⁾の背景を考察する. そのため基本的に必要な機構学と力学によって, 起振力およびトルクなどを構成する動力学的関係式について論ずる.

2. ピストンクランク機構の動力学

2.1 機構学的考察 まず単気筒機関について考える. 図1はクランク軸の直角断面で, Oを回転中心

とするピストンクランク機構の関係図である. ピストンピンの中心を O_p とし, その運動方向を x 軸で表し, クランク軸を z 軸とする直角座標系 $O-xyz$ を定める. いま点Cをクランクピン中心とすれば, $\overline{CO_p}$ は接続棒を代表するので, その長さを L , クランク半径 \overline{OC} は r として表す. $\overline{OO_p}$ の長さを x , $\angle COO_p$ を θ , $\angle CO_pO$ を δ として表せば, 機構学的にはつぎの式が成り立つ. ただし上記の座標系を右手座標系とする. よって θ, δ の符号は反時計回り方向が正であり, x 軸すなわちシリンダ中心線に対する相対角度を表すものとする. 図1より明らかに

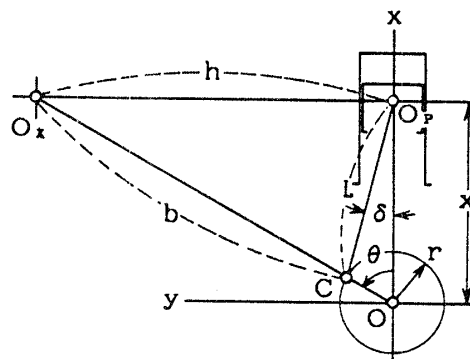


図1 ピストンクランク機構と瞬間中心

* 昭和63年11月11日 北陸信越支部北陸地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年4月11日.

¹ 正員, 福井工業大学 (〒910 福井市学園3-6-1).

² 正員, 富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190).

³ 正員, (〒230 横浜市鶴見区下末吉5-14-23).

⁴ 准員, 福井工業大学 (〒910 福井市学園3-6-1).

$$x = L \cos \delta + r \cos \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

つぎに $\lambda = r/L$ とすれば、 θ と δ との間には、つぎのごとき二つの関係式が成り立つ。

$$\sin \delta = -\lambda \sin \theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} \quad \dots\dots\dots (3)$$

そこで、クランクは正の方向に ω なる角速度で回転するものと考え、接続棒が x 軸に対する角速度を $\dot{\delta}$ 、角加速度を $\ddot{\delta}$ で表し、クランク軸の角加速度を $\dot{\theta}$ とすれば、式(2)より

$$\dot{\delta} = -\lambda \omega \cos \theta / \cos \delta \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\ddot{\delta} = \lambda(1 - \lambda^2) \omega^2 \sin \theta / \cos^3 \delta - \lambda \dot{\theta} \cos \theta / \cos \delta \quad \dots\dots\dots (5)$$

ピストンの速度を \dot{x} 、加速度を \ddot{x} によって表せば、式(1)より

$$\dot{x} = -r \omega \sin(\theta - \delta) / \cos \delta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\ddot{x} = -r \dot{\theta} \sin(\theta - \delta) / \cos \delta - r \omega^2 F(\theta) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$F(\theta) = \cos \theta + \lambda \cos 2\theta / \cos \delta + \lambda^3 \sin^2 2\theta / (4 \cos^3 \delta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(4)~(8)については、座標系が移動または回転する場合であっても、原点であるクランク軸ならびにシリンダ中心線 (x 軸) に関する、上記の相対的な関係はそのまま成立する。すなわち式(5)は接続棒とシリンダ中心線との相対角加速度を表し、式(7)はピストンとシリンダブロックとの相対加速度の大きさを表す。

一方において点 O_p における x 軸の垂線と \overline{OC} との交点 O_x は、 x 軸に対する接続棒の瞬間中心である。そこで $\overline{O_x O_p} = h$ 、 $\overline{O_x C} = b$ とすれば、 $\angle O_x O_p C$ の関係から、

$$h/b = \sin(\theta - \delta) / \cos \delta \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)は、式(6)とともにピストン速度とクランクピンの円周速度との比を表す。ピストンは x 軸上を往復運動するので、速度 \dot{x} 、加速度 \ddot{x} の方向を示すベクトルも x 軸上にある。しかし機構学的には、ピストンピンは、瞬間中心 O_x を中心として運動する接続棒の小端部を代表する点である。またクランクピンの中心 C は接続棒の大端部を表す点である。よって、点 O_p, C はそれぞれの半径を h および b とし、瞬間中心 O_x を共通とする円運動によって表される。

2・2 接続棒の動力学的挙動 ピストンの質量を m_p (ピンを含む) とし、接続棒の質量を m_r とする。また接続棒の重心 G が $\overline{O_p C}$ 上にあり、その位置を O_p からの距離 L_p にて表せば、接続棒は重心の運動として表される。よって接続棒は上記平面上における剛体の運動になるから、重心 G の x - y 平面上の並進運動

と、同重心まわりの回転運動によって表すことができる。図2は上記重心 G の運動を表す。重心の座標を x_G, y_G とし、 $c_p = L_p/L$ とすれば、図2の関係からつぎのごとく求められる。

$$x_G = r \cos \theta + (L - L_p) \cos \delta = c_p r \cos \theta + (1 - c_p) x \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$y_G = c_p r \sin \theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

重心の並進運動は $\dot{x}_G, \ddot{x}_G, \dot{y}_G, \ddot{y}_G$ を、それぞれ x, y 軸方向の速度および加速度成分とすれば、つぎの式によって表される。

$$\dot{x}_G = -c_p r \omega \sin \theta + (1 - c_p) \dot{x} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\dot{y}_G = c_p r \omega \cos \theta \quad \dots\dots\dots (13)$$

加速度成分は

$$\ddot{x}_G = -c_p r (\ddot{\theta} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) + (1 - c_p) \ddot{x} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\ddot{y}_G = c_p r (\ddot{\theta} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \quad \dots\dots\dots (15)$$

以上の運動は並進運動であるが、重心 G まわりの慣性モーメントを I_r とし、回転半径を k とすれば、

$$I_r = m_r k^2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

が成り立つ。よって $I_r \dot{\delta}$ は接続棒重心 G まわりのモーメントを表す。また上記接続棒の並進運動のうち、式(14)の右辺第2項は避け得ないが、 y 軸方向の加速度は式(15)であきらかのように、一次の周期運動であるから、おもりによって消滅させることができる。そこで図2のごとく、クランクピンの反対側の点を Q とし、質量 $c_p m_r$ のおもりをつける。 Q 点の座標を x_Q, y_Q とすれば、つぎの式で示される。

$$x_Q = r \cos(\theta + \pi) = -r \cos \theta \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$y_Q = r \sin(\theta + \pi) = -r \sin \theta \quad \dots\dots\dots (18)$$

Q 点の加速度を求めれば、あきらかに

$$\ddot{x}_Q = r (\ddot{\theta} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \quad \dots\dots\dots (19)$$

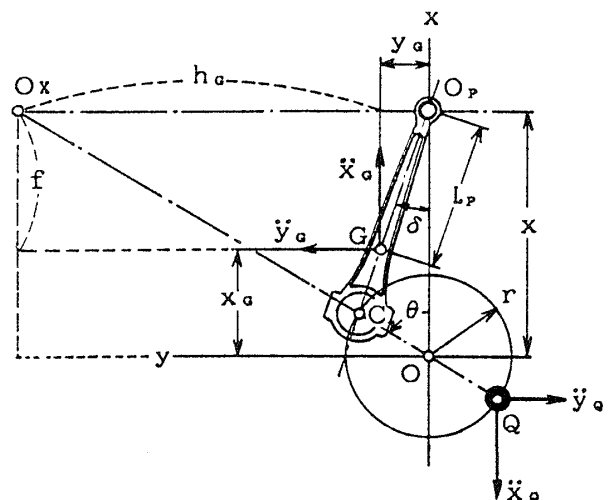


図2 接続棒まわりの運動とおもり

$$\ddot{y}_Q = r(-\ddot{\theta} \cos \theta + \omega^2 \sin \theta) \dots (20)$$

よって、ピストンクランク機構における並進運動のうち、 x 軸方向の力の総和を $F_x(\theta)$ 、 y 軸方向の総和を $F_y(\theta)$ とすれば、つぎの式が成り立つ。

$$F_x(\theta) = m_P \ddot{x} + m_r \ddot{x}_C + c_P m_r \ddot{x}_Q \\ = m_{rec} \ddot{x} \dots (21)$$

ここに

$$m_{rec} = m_P + (1 - c_P) m_r \dots (22)$$

$$F_y(\theta) = 0 \dots (23)$$

ここに、おもり Q により y 軸方向の起振力が消えるため、ヨーイングモーメントも存在しない。しかし z 軸まわりのいわゆるローリングモーメントが追加される。クランクピンおよびクランク腕の質量は、従来のごとき方法によって、カウンタおもりをつける。これを設置せずに振動を論ずることは、問題を複雑にするだけで意味がない。万一必要が生ずれば、その時点で論ずることとする。

2・3 往復慣性力 2・2 節の式(21)によってピストンクランク系の並進運動について考えれば、おもり Q をカウンタ質量とすることにより、 x 軸方向に質量 m_{rec} のおもりが、変位 x に対し式(7)の加速度をもって往復運動をすることになる。式(7)は ω 、 $\dot{\theta}$ を任意に与え、 \ddot{x} 、 θ の一方をきめれば、他の一方が得られることを示す。いま剛節をもって成り立つピストンクランク系を考察すれば、 O - xyz 座標系自身の運動にかかわらず、機構学的な関係式は成り立つ。すなわち ω 、 θ 、 $\dot{\theta}$ 、 \ddot{x} などの変数は、 O - xyz を動座標系と考える場合でも、それぞれ原点および x 、 y 軸に対し相対的な関係値を示すものとして扱うことにする。そこで m_{rec} に対し、 m_{rec} を除く機関およびその付属品全体の質量を M_E で表せば、図3のごとき基本関係が成り立つ。クランク軸上の原点 O が x 軸方向に \ddot{x}_E なる加速度で運動する場合、 m_{rec} の質量をもつピストン系の加速度は \ddot{x}_P で表される。相対加速度が \ddot{x} であるから、支持ばねのたわみを x_E とすれば、

$$\ddot{x} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_E \dots (24)$$

x 軸方向の機関支持ばね定数を図3のごとく k_E とすれば、つぎの運動の式が成立しなければならない。

$$M_E \ddot{x}_E + k_E x_E + m_{rec} \ddot{x}_P = 0 \dots (25)$$

上記の式に式(24)の関係を代入すれば、

$$(M_E + m_{rec}) \ddot{x}_E = -k_E x_E - m_{rec} \ddot{x} \dots (26)$$

ここに、 \ddot{x} はピストン(接続棒を含む)とシリンダブロックとの相対加速度であるが、式(7)によって周期性をもつ。そこで ω および $\dot{\theta}$ を任意に与えれば、式(26)は $m_{rec} \ddot{x}$ を起振力とする典型的な強制振動の式を表す。その式の一般解はあきらかに、自由振動と強制振

動とが共存する式であるから、 k_E の如何にかかわらず強制振動のパターンはそのまま残る。 k_E と M_E とは機関の振幅に影響するだけである。すなわち \ddot{x} はあきらかに周期性を有する加速度であるから、機関全体は x 軸方向に振動する。これを避けることは困難なため、多気筒化と、バランスなどによって可能な限り、上記の振動を削減する必要がある。

3. クランク軸まわりのトルク変動

3・1 ピストン運動によるトルク ピストンには、ガス爆発の圧力 $p(\theta/2)$ にシリンダ断面積を乗じて得る力 $F_g(\theta/2)$ が発生する。これに対し慣性力としては、 ω なる回転速度に対し x 軸方向に $-F_x(\theta)$ がある。上記の二つの力は、ピストン自身が瞬間中心 O_x まわりの回転運動であるから、同中心まわりのトルクとして $h\{-F_g(\theta/2) - m_P \ddot{x}\}$ を生ずる。上記のトルクはクランクピン C を通じて z 軸に作用する。なおピストンには回転運動がないのでピストンピンまわりの慣性モーメントは考えなくてよい。一方機構学的には、 x 軸と接続棒の瞬間中心は O_x であるが、クランク腕とクランク軸、およびクランク腕と接続棒との瞬間中心は、それぞれ O および C であり、上記の3中心は一直線上にある。よってピストンに関する O_x まわりのトルクは、 z 軸まわりのトルク T_P としてつぎのごとく計算される。

$$T_P = -r(h/b)\{-F_g(\theta/2) - m_P \ddot{x}\} \\ = r\{\sin(\theta - \delta)/\cos \delta\}\{F_g(\theta/2) + m_P \ddot{x}\} \dots (27)$$

ここに、 $F_g(\theta/2)$ の符号は機関の指圧線図によって求められる圧力 $p(\theta/2)$ の符号と同一とする。

3・2 接続棒による慣性トルク 接続棒は、慣性モーメントを有する剛体である。その運動は瞬間中心 O_x を中心とする接続棒の円運動である。上記運動は、慣性トルクとして、クランク軸に伝達される。接続棒による O_x まわりのトルクとしては、図2よりまず重

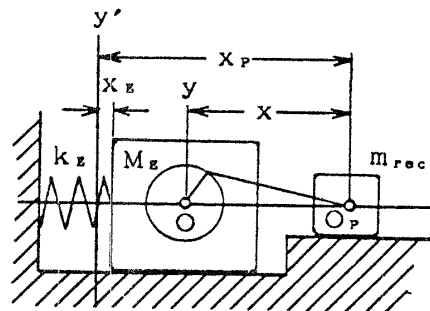


図3 x 軸方向の強制振動

心Gの並進運動によるモーメントがある。すなわち、 $m_r(h_c\ddot{x}_c - f\dot{y}_c)$ である。ここに

$$h_c = h - y_c \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$f = x - x_c \quad \dots\dots\dots (29)$$

さらに重心Gまわりのモーメントとして $I_r \cdot \ddot{\delta}$ が生ずる。上記二つのモーメントと瞬間中心 O_x に関する連接棒の慣性トルクとの代数和が零である。3・1節の瞬間中心に関する機構学的な関係から、 z 軸まわりの慣性トルク T_r として、連接棒の慣性トルクを換算すれば、つぎの式を得る。

$$T_r = -(r/b)(h_c m_r \ddot{x}_c - f m_r \dot{y}_c + m_r k^2 \ddot{\delta}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

上記の式は連接棒だけの運動によって、クランク軸まわりに生ずる慣性トルクであり、ピストンによる慣性を含まない。

3・3 クランク軸トルク クランク軸まわりには、クランク腕およびクランクピンがあるが原則としては、ふれまわりの生じないように、専用のカウンタおもりが設置される。しかしすでに述べたごとく、連接棒の運動のうち、 y 軸方向の並進運動を消滅させるため、図2のQ点におもりをつけ、式(19)、(20)の加速度が生じる。このため z 軸まわりには、下記の慣性トルク T_Q が追加される。式(17)、(18)より

$$T_Q = -(y_Q \ddot{x}_Q - x_Q \dot{y}_Q) c_P m_r = r^2 \ddot{\theta} c_P m_r \quad \dots\dots\dots (31)$$

しかし、おもりのQはクランク軸にカウンタおもりと設置するゆえ、同軸自身の慣性モーメントとして取扱う。よってピストンおよび連接棒の運動は、中心Oまわりにつぎのトルク T_z を生ずる。

$$T_z = T_P - T_r \quad \dots\dots\dots (32)$$

上式に式(7)を代入して整理する。そのため、つぎのごとく定数 a, ν および関数 $G(\theta)$ を定義する。

$$a^2 = k^2/L^2 - c_P(1 - c_P) \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$\nu = (1 - \lambda^2)/2 \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$G(\theta) = \sin(\theta - \delta)/\cos \delta \quad \dots\dots\dots (35)$$

よって、 z 軸まわりの駆動トルクとしての T_z は、つぎのごとく整理される。

$$\begin{aligned} T_z = & rG(\theta)F_g(\theta/2) \\ & - r^2\omega^2\{m_{rec}G(\theta)F(\theta) \\ & - m_r a^2 \nu \sin 2\theta/\cos^4 \delta\} \\ & - r^2 \ddot{\theta}\{m_{rec}G^2(\theta) + c_P m_r \\ & + m_r a^2 \cos^2 \theta/\cos^2 \delta\} \quad \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

つぎにトルク伝達システムについて考察する。機関のアイドリング状態ではクランク軸、はずみ車系の慣性モーメントを I_r とし、動力伝達の場合は、同系列の慣性モーメントを損失分も含めて、相当慣性モーメン

ト $I_{zw}(\omega)$ として換算する。ただし、アイドリング時の場合は $I_{zw}=0$ として扱うことにする。

一方シリンダブロックおよび付属品を含めて、機関系全体のクランク軸まわりの慣性モーメントを I_E とする(ただし I_E には I_f は含まない)。 I_f 系および I_E 系の角加速度をそれぞれ $\ddot{\theta}_d$ および $\ddot{\psi}_E$ とすれば、 $\ddot{\theta}$ は相対角加速度であるゆえ、つぎの式が機構学的に成り立つ。

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_d - \ddot{\psi}_E \quad \dots\dots\dots (37)$$

機関支持部の z 軸まわりのばね定数を k_T とし、 ψ_E を仮想の静止空間に対する同軸まわりのねじれ角とすれば、つぎの運動の式が成り立つ。

$$I_E \ddot{\psi}_E + k_T \psi_E + T_z = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

一方 T_z はクランク軸とシリンダブロックとの間に生ずる駆動トルクである。よって

$$T_z = (I_{zw} + I_f) \ddot{\theta}_d \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\theta = \theta_d - \psi_E \quad \dots\dots\dots (40)$$

式(36)は $p(\theta/2)$ と $\theta, \omega, \ddot{\theta}$ を含む式である。すなわち $p(\theta/2)$ を与えれば、式(36)~(40)の五つの方程式から $\theta, \theta_d, \psi_E, \ddot{\psi}_E, \omega, \ddot{\theta}, \ddot{\theta}_d$ などの関係がわかる。たとえば $\ddot{\theta}$ を実験などから、測定値がわかるものと考えれば、 $p(\theta/2)$ の如何にかかわらず、慣性トルクに基づくねじり振動を考察することができる。上記のごとき見地に立てば、式(38)は式(36)の T_z による強制ねじり振動を表す。すなわち、式(36)右辺の第1、第2、第3の項に関する係数は、それぞれ独自の周期性をもつゆえ、 k_T による自由振動とともに残ることになる。

4. 等価系方式との比較

4・1 x 軸方向の慣性力 従来の等価系方式による x 軸方向の慣性力を F_x とすれば、つぎのごとく表される。

$$F_x = -m_{rec} \ddot{x} + m_{rot} \omega^2 r \cos \theta \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここに m_{rot} は連接棒の大端の等価質量とクランクピンとクランク腕の等価質量との和を示す。 m_{rot} はクランクシャフトのカウンタ質量によって消滅できるゆえ、式(41)の第1項だけが比較の対象になる。等価系方式は $\ddot{\theta}=0$ であるから、つぎの慣性力の式となる。

$$F_x(\theta) = m_{rec} r \omega^2 F(\theta) \quad \dots\dots\dots (42)$$

式(26)に代入すれば

$$\begin{aligned} (M_E + m_{rec}) \ddot{x}_E \\ = -k_E x_E + m_{rec} r \omega^2 F(\theta) \quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

本論文は $\ddot{\theta} \neq 0$ であるから、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (M_E + m_{rec}) \ddot{x}_E \\ = -k_E x_E \\ + m_{rec} r \{\ddot{\theta} G(\theta) + \omega^2 F(\theta)\} \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

式(43), (44)は、いずれも強制振動の式であり、 $F(\theta)$, $G(\theta)$ は $\theta=\omega t$ とおけば、 $\sin n\omega t, \cos n\omega t$ の n 次の成分をもつ無限級数に展開される。よって、 k_E による自由振動と、 $\sin n\omega t, \cos n\omega t$ の成分をもつ強制振動(振幅は k_E によって変わる)が、そのまま残ることがわかる。

図4はピストンクランク系の一例を示す。図4(a)の曲線aは単気筒の起振力パターンであり、 $-F(\theta)$ を図表化したものである。図4(b)のb, cは一次、二次の振動を消滅させるためのバランサ⁽³⁾と、同配置関係図を示す。図4(a)の曲線bは単気筒起振力の一次成分、曲線cは二次成分であり、それぞれをバランサで消滅すれば曲線dが残ることがわかる。なお消滅後の振動パターン(曲線d)は100倍して描いたものである。単気筒でもかなり振動がなくなっている。

図5は参考のために各直列気筒の場合の慣性力パターンを示すものである。#1の曲線は単気筒、#3~#6は各気筒数の合成パターンを示す。ただし、本論文の具体例では同一のピストン、連接棒をそのまま使用し、その数だけを増加した場合である。

つぎに $\ddot{\theta} \neq 0$ のいわゆる急角加速時の場合を考察すれば、式(44)の $m_{rec} r \ddot{\theta} G(\theta)$ の項が強制振動の形で起振力になる。 $\ddot{\theta}$ はアクセルペダルで任意に増加できるが、ある ω と $\ddot{\theta}$ の場合について、 $G(\theta)$ のパターンを求めれば、図6を得る。

$G(\theta)$ はつぎの形に展開される。

$$G(\theta) = \sin \theta + (\lambda/2)(1 + \lambda^2/4 + \dots) \sin 2\theta - (\lambda^3/16)(1 + 3\lambda^2/4 + \dots) \sin 4\theta + \dots \dots \dots (45)$$

よって式(44)は、 $F(\theta)$ と $G(\theta)$ の振動パターンが共存する形をとる。一方の $F(\theta)$ は $\cos n\theta$, $G(\theta)$ は $\sin n\theta$ で、位相差は $\pi/2$ である。図6は各気筒数の $G(\theta)$ の起振力パターンを示す。これらを x 軸方向の機関振動パターンとして扱えることは、 $F(\theta)$ の場合と同様である。4気筒の加速時における起振力が、他の場合に比べて大きいことは興味深いことである。

4.2 修正トルクと厳密解 従来の方式はクランクの回転が、瞬間的に等速であることを前提として修正トルクの式を使用する。すなわちクランク軸のトルクの総和を T'_z とすると、つぎの式で表される。

$$T'_z = -F_g(\theta/2) \tan \delta x - m_{rec} \ddot{x}' \tan \delta x + m r a^2 \ddot{\delta}' r L \cos \theta / \cos \delta \dots \dots \dots (46)$$

ここに

$$\ddot{x}' = -r \omega^2 F(\theta) \dots \dots \dots (47)$$

$$\ddot{\delta}' = \omega^2 \lambda (1 - \lambda^2) \sin \theta / \cos^3 \delta \dots \dots \dots (48)$$

$F_g(\theta/2)$ はガス圧によりピストンに作用する力であり、第3項は、いわゆる修正トルク T'_z である。また連接棒の慣性モーメントと等価系の慣性モーメントとの差 I'_z とすれば、本論文の記号ではつぎの形で表すことができる。

$$I'_z = m r a^2 L^2 \dots \dots \dots (49)$$

式(46)は本論文の式(36)において、 $\ddot{\theta} = 0$ の場合と完全に一致する。よって従来の修正トルクは、 $\ddot{\theta} = 0$ である限り厳密解であることがわかる。しかし、 $\ddot{\theta}$ が零であることは、フライホイールとシリンダブロック系の z 軸まわりの慣性モーメントが無限大の場合に限るため、実際的でない。

そこで式(46)を利用して、 $\ddot{\theta} \neq 0$ の場合、すなわち \ddot{x} の式としては式(7)、 $\ddot{\delta}$ の式(5)を式(46)に代入すれば、つぎのトルク T'_z の式が得られる。

$$T'_z = r G(\theta) F_g(\theta/2) - r^2 \omega^2 \{ m_{rec} G(\theta) F(\theta) \}$$

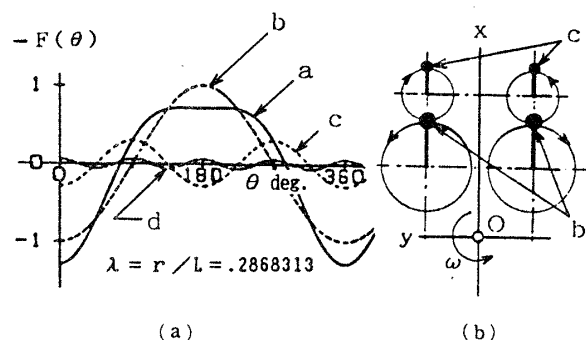


図4 単気筒起振力パターンとバランサ

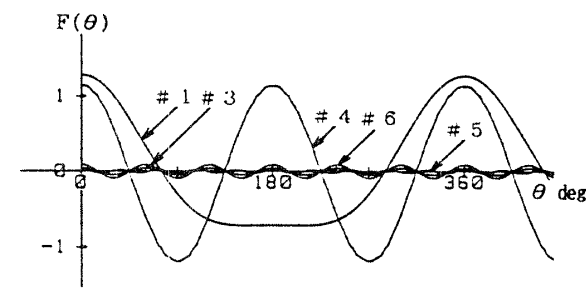


図5 直列多気筒の合成起振力パターン

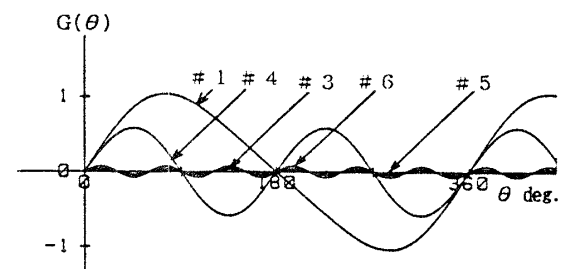


図6 急加速の基本起振力パターン

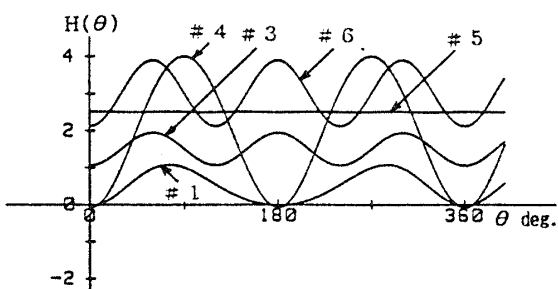


図7 急加速のトルク変動パターン $H(\theta)$

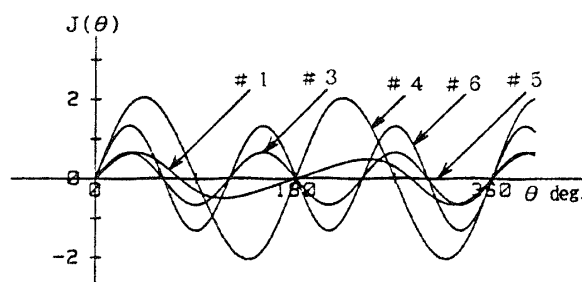


図8 等価系のトルク変動パターン $J(\theta)$

$$-m_r a^2 \nu \sin 2\theta / \cos^4 \delta - r^2 \ddot{\theta} \{m_{rec} G^2(\theta) + m_r a^2 \cos^2 \theta / \cos^2 \delta\} \dots \dots \dots (50)$$

式(50)は、従来の式をそのままの形で拡張して得られた式である。これを式(36)と比較すると、慣性トルクとして、第3項の中に $r^2 \ddot{\theta} c_{pmr}$ の項が脱落していることがわかる。ただし、式(50)の第3項 $r^2 \ddot{\theta}$ の係数部分は明らかに周期的なものである。そこで、これをつぎのごとき無次元の係数 $H(\theta)$ で表せば、加速時におけるトルクの周期性パターンを表すもの、として利用できる。

$$H(\theta) = G^2(\theta) + (m_r / m_{rec}) a^2 \cos^2 \theta / \cos^2 \delta \dots \dots \dots (51)$$

また $r^2 \omega^2 m_{rec}$ の係数を $J(\theta)$ とおけば

$$J(\theta) = F(\theta) G(\theta) - (m_r / m_{rec}) a^2 \nu \sin 2\theta / \cos^4 \delta \dots \dots \dots (52)$$

式(52)は角速度による従来の起振慣性トルクを無次元の周期性パターンとして表す。起振力の場合と同様に、上記の両係数は機関支持部の z 軸まわりのばね定数を通じて、動力伝達系に強制振動を与える起振トルクの変動部を表す。

図7は $H(\theta)$ の変動パターンであり、直列多気筒の場合を示す。図8は従来の方式による変動パターンであり、図7、8中の番号はそれぞれ直列シリンダ数を表すものとする。ピストン、コンロッド、クランクは同一のものを使用し、排気量は気筒数に応じて増大するが、周期性変動は気筒数に応じて減少することがわかる。4シリンダの変動が、ここでも大きく表れることが特長である。

5. 結 論

ピストンクランク機構の起振力については、従来簡

略法が使用され、クランク軸トルクは修正トルクによって補われてきた。しかしその背景にはクランク軸の等速回転があるため、急加速時の振動を論ずることに疑問が残る。本論文は、等価系によらずに動力学的関係式を導入し、従来の等価系による方式の理論的な位置づけをあきらかにした。さらに直列多気筒を具体例としてあげ、本論文と従来の方式との相違点について論じたものである。その結果

- (1) 等速回転を前提とする場合、従来の等価系方式は、修正トルクを含めて本論文の方法に一致する。
- (2) 急角加速度を考慮する場合の起振力、および起振トルクの算出は本論文の方式によるべきである。それらは、ガス圧による力 F_g 、クランク軸角速度 ω 、ならびに角加速度 $\ddot{\theta}$ によって生ずる慣性力にて構成され、重ね合わせであることを示した。
- (3) 起振力、軸トルクの周期性変動分は無減衰強制振動の運動方程式を構成する。よって前項(2)の起振力などのパターンは、機関および伝達系の振動パターンに類似して生ずることをあきらかにした。
- (4) 直列多気筒機関を具体例とし、ピッチング振動を除外して考察すれば、4シリンダのアンバランスが、加速、等速を問わずに目立つ。その他の場合は気筒数の増大とともに向上することを確認した。

最後に本研究に当たり、資料その他で多大のご支援を賜った方々に対して、心から感謝の意を捧げたい。

文 献

- (1) 窪塚・ほか3名, 自動車技術会論文集, 23 (昭56), 42.
- (2) 今市・ほか2名, 機論, 41-348 (昭50), 2333.
- (3) 米沢・苅田, 機論, 50-449, C (昭59), 234.
- (4) 例えば, 日本機械学会, 機械工学便覧, A 3-142 (昭61).
- (5) 木下・ほか2名, 自動車技術, 30-9 (昭51), 711.

討 論

〔質問〕 川 副 嘉 彦 (埼玉工業大学)

角速度の変動まで考慮に入れて往復機関の動力学を展開されたことに敬意を表すが、わかりにくい点があるのでご教示願いたい。

(1) 結論の(2)とも関連するが、従来の等価方式との相違点がわかりにくい。

(i) 4・1節の慣性力について $F(\theta)$ と $G(\theta)$ (図5と図6)のみ考えておられるが、 $\omega^2 F(\theta)$ と $\ddot{\theta} G(\theta)$ を比較すべきではないのか、 ω^2 と $\ddot{\theta}$ に現実的な数値をあてはめた場合、 $\ddot{\theta} G(\theta)$ は $\omega^2 F(\theta)$ に対して非常に小さくなるように思えるがどうか。

(ii) 4・2節のトルク変動についても $\ddot{\theta} H(\theta)$ と $\omega^2 J(\theta)$ の現実的な数値のオーダーはどの程度になるのか。

(iii) 加速時においても結局は、従来の式(46)に式(7)の α と式(5)の δ を代入した式(50)が適用できるということであろうか。

(2) 結論(3)の記述における「無減衰」および「機関および伝達系の振動パターンに類似して生ずる」とはどういう意味か。

(3) 結論の(4)は、従来の理論からでも導かれることのように思えるがどうか。

(4) 角速度の変動まで考慮に入れる場合、機構各部の摩擦力など複雑な問題を考慮する必要が生じるように思うが、ご見解をお示し願いたい。

(5) 緒言にお書きの多気筒化ならびにバランス使用の評価・改善に貴論文の成果を応用する場合、どのような点が従来の評価と大きく異なることになるのでしょうか。ご教示願えたらありがたい。

〔回答〕 (1) 従来の等価系方式は、本論文の角加速度 $\ddot{\theta}$ の項を省略し、 ω^2 の項の周期的変動係数だけに限って、論じている。

(i) ご質問の内容は、 $\ddot{\theta} G(\theta)$ が実際の機関振動に与える影響の程度に関する問題と思う。急加速時以外

の場合にご指摘のとおりである。しかしスポーツカーやレーシングカーでは、 $\ddot{\theta}$ の平均値が ω^2 の20%を超える場合があるため、低速動加速時では無視できないと考える。

(ii) トルク変動については、変動の幅が $F(\theta)$ などに比べて約2倍になる。しかし $\ddot{\theta}$ の項の影響度は、 ω^2 の項の場合に比べ、前質問と同様20%以下と考える。

(iii) 急加速度の変動部分だけについて考えれば、ご指摘のとおりであり、式(50)が適用できる。等価系方式は、その点に関しては、厳密解に近い近似方式であることがわかった。

(2) 「無減衰」とは「減衰のない場合の」という意味である。「機関および…に生ずる」とは、「実際の振動系には摩擦やダンパなどの影響もあり、強制振動の振幅や振動パターンも若干変化するが、類似した振動形で生ずる」という内容である。

(3) 結論の(4)は、等価系の式を拡張した式(50)のごとく考えれば、ご指摘のとおりである。しかし、必要十分の条件であるかどうかの証明が問題であると思う。

(4) 角速度については、従来の方式でも、連接棒などでは変動する。実際の機関は、特にアイドル時時には瞬時にして高回転に達する。摩擦力の有無にかかわらず、大きな $\ddot{\theta}$ が低速回転時に生ずれば、 $\ddot{\theta}$ の項は ω^2 の項と対等に扱うべきであると考え。摩擦力などの複雑な問題は、強制振動の振幅や振動の形に影響するが、強制振動を消滅することはない。

(5) 具体例によってお答えしたい。例えば直列4気筒のごとく、バランスによって ω^2 の項の係数は微小変動となるが、 $\ddot{\theta}$ の項の周期的変動には無関係である。一方、直列6気筒の場合は、図5、6に示すごとく、 $\ddot{\theta}$ 、 ω^2 の各係数とも微小になるため理想に近い。