The Japan Society of Mechanical Engineers

日本機械学会論文集(A編)
57巻533号(1991-1)

論文 No. 90-0206 B

転がり接触を受ける半無限体表面の近接き裂間の相互干渉*

五嶋孝仁*1, 宮尾嘉寿*1, 神島裕児*2

Mutual Interference of Two Surface Cracks in a Semi-Infinite Body Due to a Rolling Contact

Takahito GOSHIMA, Kaju MIYAO and Yuuji KAMISHIMA

This paper deals with the two-dimensional contact problem of a rolling rigid cylinder on an elastic half-space containing two surface breaking cracks located close to each other. The problem is solved using complex-variable techniques and is reduced to a pair of singular integral equations which are solved numerically. Numerical results of stress intensity factors are obtained for the case of two parallel cracks. The interference effects on the stress intensity factors with the distance between two cracks, and the effects of frictional coefficient and the ratio of the cracks on the results, are considered.

Key Words: Elasticity, Rolling Contact, Surface Crack, Stress Intensity Factor, Interference, Elastic Half-Space

1. 緒　　言

歯車や転がり軸受など工業上数多く見られる転がり接触では，転がり疲れにより初期表面き裂が成長してピッチングなどの損傷を引き起こすことが多い．このため転がり疲れき裂に関して，Way[(1)]の実験以来多くの実験的研究が報告されている[(2)~(6)]．また転がり疲れき裂に関する理論的研究に関して，Keerら[(7)]によるヘルツ分布圧力の転がり接触を受ける半無限体の表面き裂の成長に関する解析以来，これまでにいくつかの報告がなされている．例えば，Bryantら[(8)]はKeerのモデルにおけるヘルツ分布接触圧をローラの変位で置き換えKeerモデルの妥当性を検証している．またBower[(9)]はき裂内部の静水圧も考慮した場合について，Goshimaら[(10)]は転がり接触面に熱発生を伴う場合について，いずれもき裂面の摩擦を考慮してKeerモデルを拡張した解析を行っている．さらに，Murakamiら[(11)]やKanetaら[(12)(13)]は三次元き裂にまで拡張した転がり接触問題を解析している．これらの解析はいずれも単一き裂の場合を取扱っているが，実際には複数のき裂が生じている場合が多く，さらに内部欠陥や介在物などを有する場合も多い．このためMillerら[(14)]はKeerモデルに内部欠陥(介在物)を重ね合わせたモデルについて解析し，き裂と内部欠陥(介在物)の相互作用を明らかにしている．しかし転がり接触下における複数き裂間の相互干渉を取扱った報告は見当たらないようである．

そこで本研究では簡単な場合として，表面に一対のき裂を有する半無限弾性体が剛体ローラによる転がり接触を受けたときの応力拡大係数を解析した．一例として両き裂が平行の場合について，き裂間距離や摩擦係数ならびにき裂長さの比などが応力拡大係数およびその相互干渉に及ぼす影響を数値的に検討した．

2. 座標系と境界条件

図1に示すように表面に長さ $\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$ の一対のき裂を有する半無限弾性体表面が半径 $\tilde{R}$ のローラによって幅 $2c$ の領域で転がり接触を受けている．解析にあたってはき裂に固定した座標系 $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\zeta}_1)$, $(\tilde{\xi}_2, \tilde{\zeta}_2)$ およびローラとともに移動する座標系 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ を採用する．さらに以下の解析では次の無次元変数を用い，またき裂1および2に関する記号を添字 $k=1$ および $k=2$ で表す．

* 原稿受付　平成2年3月5日.
*1 正員，富山大学工学部(〒930 富山市五福3190).
*2 学生員，富山大学大学院.

NII-Electronic Library Service

The Japan Society of Mechanical Engineers

$(x, y)=(\tilde{x}/c,\ \tilde{y}/c)$, $(\xi_k,\ \zeta_k)=(\tilde{\xi}_k/c,\ \tilde{\zeta}_k/c)$

$x_k=\tilde{x}_k/c$, $x_k^*=\tilde{x}_k^*/c$, $x_0=\tilde{x}_0/c$, $y_0=\tilde{y}_0/c$

$d=\tilde{d}/c$, $R=\tilde{R}/c$, $l_k=\tilde{l}_k/c$

ここで $\tilde{x}_0$ および $\tilde{y}_0$ はローラの剛体変化の水平および垂直成分を表す．

剛体ローラは一般にすべり摩擦を伴う転がり接触をしているものとすれば，半無限体表面における境界条件は次式のように与えられる．

$$\sigma_{xy}+f\sigma_{yy}=0,\ |x|<1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\sigma_{yy}+i\sigma_{xy}=0,\ |x|>1 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$U'_{yy}/c=(x-x_0)^2/(2R)+y_0,\ |x|<1 \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで $\sigma_{pq}(p, q=x, y)$ は応力成分，U_{yy} は垂直方向変位，f は摩擦係数またはトラクション係数を表し，$i^2=-1$ である．

またき裂面においては摩擦がないものと仮定すれば，き裂1および2の表面における境界条件は次式となる．

$$(\sigma_{\xi_k\zeta_k})_{\zeta_k=0}=0,\ 0<\xi_k<l_k \quad (k=1,2)\cdots\cdots(4)$$

$$(\sigma_{\zeta_k\zeta_k})_{\zeta_k=0}=0,\ \xi_k\in\xi_k^{op} \quad (k=1, 2)\cdots\cdots(5)$$

ここで ξ_k^{op} は各き裂の開口している領域を表す．

また無限遠においては次式が成り立つ．

$$(\sigma_{pq})_{y\to-\infty}=0,\quad (p, q=x, y) \quad\cdots\cdots(6)$$

3. 応力解析

一般に応力および変位は Muskhelishvili の複素応力関数 $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ を用いて次のように表示できる[15]．

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xx}=2\{\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\} \quad\cdots\cdots(7)$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}-2i\sigma_{xy}=2\{\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\} \quad\cdots\cdots(8)$$

$$2G_0(U'_{xx}/c+iU'_{yy}/c)=\kappa\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)} \quad\cdots\cdots(9)$$

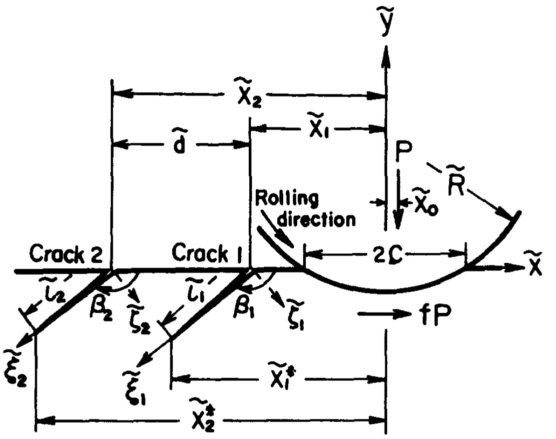

図1　座標系

ここで $\kappa=3-4\nu$（平面ひずみ），$\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$（平面応力），ν はポアソン比，G_0 は横弾性係数であり，$'$ は $z(=x+yi)$ に関する微分を表す．

最初にき裂のない半無限体の転がり接触問題を考える．境界条件式(1)-(3)および(6)を満足する解は，Muskhelishvili の方法[15]により Hilbert 問題の解に帰着され，次式の複素応力関数が得られる[8]．

$$\Phi_1(z)=2iG_0(1+if)\times\{z-2\gamma-X(z)\}/\{R(\kappa+1)\} \quad\cdots\cdots(10)$$

ここで

$$X(z)=(z+1)^{0.5-\gamma}(z-1)^{0.5+\gamma}$$

$$\gamma=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{(\kappa-1)f}{\kappa+1}$$

このとき，き裂のない半無限体の応力および変位は次式で与えられる[15]．

$$(\sigma_{yy}-i\sigma_{xy})_{\Phi_1}=\Phi_1(z)-\Phi_1(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi_1'(z)} \quad\cdots\cdots(11)$$

$$2G_0(U'_{xx}/c+iU'_{yy}/c)_{\Phi_1}=\kappa\Phi_1(z)+\Phi_1(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi_1'(z)} \quad\cdots\cdots(12)$$

一方き裂による応力場を求めるために，き裂1および2上の任意の点 $z=z_{0k}(z_{0k}=x_k+n_ke^{-i\beta_k},\ k=1, 2)$ に次式で定義される転位を考える．

$$\alpha_k=\frac{G_0\{[U_{\xi_k\xi_k}]+i[U_{\zeta_k\zeta_k}]\}e^{-i\beta_k}}{i\pi c(\kappa+1)} \quad (k=1, 2)\cdots\cdots(13)$$

ここで $\{[U_{\xi_k\xi_k}]+i[U_{\zeta_k\zeta_k}]\}$ は変位の不連続量を表す．このとき二つの独立した転位 α_k による応力場を決定するための応力関数は次式で与えられる[16]．

$$\Phi_2(z)=\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\alpha_k}{z-z_{0k}}\right\},\quad (k=1, 2) \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\Psi_2(z)=\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\bar{\alpha}_k}{z-z_{0k}}+\frac{\alpha_k\bar{z}_{0k}}{(z-z_{0k})^2}\right\} \quad (k=1, 2)\cdots\cdots(15)$$

このときの応力および変位の表示式は式(7)-(9)で与えられる．また Φ_2, Ψ_2 によって半無限体表面に生じた転位による応力を打ち消して表面自由とするための応力関数として次の Φ_3 を追加する[15]．

$$\Phi_3(z)=\begin{cases}-\bar{\Phi}_2(z)-z\bar{\Phi}_2'(z)-\bar{\Psi}_2(z), & \mathrm{Im}\,(z)<0\\ \Phi_2(z), \mathrm{Im}\,(z)>0\end{cases} \quad (k=1, 2)\cdots\cdots(16)$$

このときの応力および変位は式(11)，(12)と同じ表示式で与えられる．以上のようにして，3種類の応力関数 Φ_2, Ψ_2, Φ_3 を用いて転位 α_k による表面自由の半無限体の応力を求めることができる．しかしながら，Φ_2, Ψ_2, Φ_3 によって半無限体表面には式(9)および式

NII-Electronic Library Service

The Japan Society of Mechanical Engineers

(12)で表される垂直方向変位を生じ，Φ_1 を重ね合わせたとき式(3)の境界条件が満足されなくなる．そこでローラの接触領域($|x|<1$)でこれらの転位によって生じた表面変位を消去するために，さらに応力関数 Φ_4 を導入する．ところで Φ_4 は Φ_1 を求めたときと同様な手法で求めることができる．すなわち式(3)の右辺を転位によって生じた表面変位に負号を付けたもので置き換え，式(1)-(3)および(6)を満足する解を求めれば，Hilbert 問題の解として次の応力関数が得られる[8]．

$$\Phi_4(z)=-(1+if)/2\sum_{k=1}^{2}[(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)\{F(z;\ z_{0k})-F(z;\ \bar{z}_{0k})\}$$
$$-(z_{0k}-\bar{z}_{0k})\{\bar{\alpha}_k G(z;\ \bar{z}_{0k})+\alpha_k G(z;\ z_{0k})\}+(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)\{1/X(z_{0k})-1/X(\bar{z}_{0k})\}$$
$$+(z_{0k}-\bar{z}_{0k})\{\bar{\alpha}_k X'(\bar{z}_{0k})/X^2(\bar{z}_{0k})+\alpha_k X'(z_{0k})/X^2(z_{0k})\}] \quad \cdots(17)$$

ここで

$$F(z;\ z_0)=\{1-X(z)/X(z_0)\}/(z-z_0),\quad G(z;\ z_0)=\{F(z;\ z_0)+X(z)X'(z_0)/X^2(z_0)\}/(z-z_0) \quad \cdots(18)$$

以上の応力関数 Φ_j $(j=2,3,4)$ および Ψ_2 を式(7)，(8)または式(11)に代入すれば，2個の転位 α_k を有する半無限体の応力場が求まる．そこでき裂による応力場はこれらの転位をそれぞれのき裂に沿って連続分布させる（η_k について積分する）ことによって得られ，これに Φ_1 による解も重ね合わせれば，境界条件式(1)，(2)，(3)および(6)を満足する応力解を得ることができる．そこで，残りのき裂面の境界条件式を満足させるために，求まった応力解をそれぞれのき裂に沿った座標系(ξ_k, ζ_k; $k=1,2$) に座標変換して式(4)，(5)に代入すれば，α_k に関する次の連立特異積分方程式が得られる．

$$2e^{i\beta_k}\int_0^{l_k}\frac{\alpha_k(\eta_k)}{\xi_k-\eta_k}d\eta_k+\sum_{j=1}^{2}\int_0^{l_j}\{\alpha_j(\eta_j)K_{1k}(\xi_k,\ \eta_j)+\overline{\alpha_j(\eta_j)}K_{2k}(\xi_k,\ \eta_j)\}d\eta_j$$
$$=-\{(\sigma_{\zeta_k\zeta_k}-i\sigma_{\xi_k\zeta_k})\phi_1\}_{\zeta_k=0},\quad k=1,2 \quad \cdots(19)$$

ここで

$$K_{1k}(\xi_k,\ \eta_j)=\sum_{r=3}^{4}[\hat{\Phi}_r(z_k;\ z_{0j})+(1-e^{2i\beta_k})\overline{\Phi_r^*(z_k;\ z_{0j})}-e^{2i\beta_k}\hat{\Phi}_r(\bar{z}_k;\ z_{0j})$$
$$+e^{2i\beta_k}(z_k-\bar{z}_k)\overline{\Phi_r^{*\prime}(z_k;\ z_{0j})}]+(1-\delta_{kj})L_{1k}(\xi_k,\ \eta_j),\quad k,j=1,2 \quad \cdots(20)$$

$$K_{2k}(\xi_k,\ \eta_j)=\sum_{r=3}^{4}[\Phi_r^*(z_k;\ z_{0j})+(1-e^{2i\beta_k})\overline{\hat{\Phi}_r(z_k;\ z_{0j})}-e^{2i\beta_k}\Phi_r^*(\bar{z}_k;\ z_{0j})$$
$$+e^{2i\beta_k}(z_k-\bar{z}_k)\overline{\hat{\Phi}_r'(z_k;\ z_{0j})}]+(1-\delta_{kj})L_{2k}(\xi_k,\ \eta_j),\quad k,j=1,2 \quad \cdots(21)$$

$$L_{1k}(\xi_k,\ \eta_j)=\Phi_2^*(z_k;\ z_{0j})+\overline{\Phi_2^*(z_k;\ z_{0j})}e^{2i\beta_k},\quad k,j=1,2 \quad \cdots(22)$$

$$L_{2k}(\xi_k,\ \eta_j)=\overline{\Phi_2^*(z_k;\ z_{0j})}+\{z_k\overline{\Phi_2^{*\prime}(z_k-z_{0j})}+\overline{\Psi_2^*(z_k;\ z_{0j})}\}e^{2i\beta_k},\quad k,j=1,2 \quad \cdots(23)$$

$$\hat{\Phi}_4(z;\ z_0)=-(1+if)/2\{F(z;\ z_0)-F(z;\ \bar{z}_0)-(z_0-\bar{z}_0)G(z;\ z_0)+1/X(z_0)$$
$$-1/X(\bar{z}_0)+(z_0-\bar{z}_0)X'(z_0)/X^2(z_0)\} \quad \cdots(24)$$

$$\Phi_4^*(z;\ z_0)=-(1+if)/2\{F(z;\ z_0)-F(z;\ \bar{z}_0)-(z_0-\bar{z}_0)G(z;\ \bar{z}_0)+1/X(z_0)$$
$$-1/X(\bar{z}_0)+(z_0-\bar{z}_0)X'(\bar{z}_0)/X^2(\bar{z}_0)\} \quad \cdots(25)$$

$$\hat{\Phi}_3(z;\ z_0)=\begin{cases}-1/(z-\bar{z}_0), & \mathrm{Im}(z)<0\\ 1/(z-z_0), & \mathrm{Im}(z)>0\end{cases} \quad \cdots(26)$$

$$\Phi_3^*(z;\ z_0)=\begin{cases}-(z_0-\bar{z}_0)/(z-z_0)^2, & \mathrm{Im}(z)<0\\ 0 & \mathrm{Im}(z)>0\end{cases} \quad \cdots(27)$$

$$\Phi_2^*(z;\ z_0)=1/(z-z_0) \quad \cdots(28)$$

$$\Psi_2^*(z;\ z_0)=\bar{z}_0/(z-z_0)^2 \quad \cdots(29)$$

$$\delta_{kj}=\begin{cases}1, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases},\quad z_k=x_k+\xi_k e^{-i\beta_k}$$

NII-Electronic Library Service

The Japan Society of Mechanical Engineers

3. 数 値 計 算

式(19)をGerasoulis[17]の方法により数値的に解く.

$$\alpha_k(\eta_k)=\frac{G_0\hat{a}_k(\hat{\eta}_k)e^{-i\beta_k}}{R(1-\hat{\eta}_k^2)^{1/2}}$$

$$\hat{\eta}_k=2\eta_k c/l_k-1,\ (k=1,2)\ \cdots\cdots\cdots(30)$$

上式のように書き,積分区間 $-1\leq\hat{\eta}_k\leq 1$ を $2N_k$ 等分して節点 $\hat{\eta}_{k,n}$ $(n=1\sim 2N_k+1)$ を決め,3節点ごとにLagrangeの補間を適用し,選点を $\hat{\xi}_{k,m}=\hat{\eta}_{k,m}+1/2N_k$ $(m=1\sim 2N_k)$ のように選ぶ.また,半無限体表面とき裂が交わる点 $(\hat{\eta}_{k,1}=-1)$ での $\alpha_k(\eta_k)$ の特異性は1/2以下であることを考慮して $\hat{a}_k(-1)=0$ と仮定すれば,$\hat{a}_k(\hat{\eta}_{k,n})$ に関する $2(N_1+N_2)$ 元の連立一次方程式が得られる.実際の数値計算においては,最初に各き裂全領域が開口 $(\xi_k^{op}: 0<\xi_k<l_k)$ していると仮定して連立方程式を解き,式(13)より得られるき裂開口変位 $U_{\xi_k\xi_k}<0$ の領域で $\mathrm{Re}\{\hat{a}_k(\hat{\eta}_{k,n})\}=0$ と置き再び連立方程式を解く.このような計算過程をき裂開口変位 $U_{\xi_k\xi_k}<0$ の領域がなくなるまで繰返し,式(5)の ξ_k^{op} の領域を各ステップ x_k ごとに決定していく.本数値計算ではどの場合でも3回以下の繰返し計算で十分収束した.また選点数は $N_k=10$ で十分な精度が得られた.このようにして数値計算された連立方程式の解 $\hat{a}_k(\hat{\eta}_{k,n})$ を用いてき裂先端 $(n=2N_k+1)$ における応力拡大係数は次式で与えれる.

$$\frac{R}{G_0\sqrt{c}}\{K_{\mathrm{I}}-iK_{\mathrm{II}}\}=\pi\sqrt{2l_k}\,\hat{a}_k(1),\ k=1,2 \quad\cdots\cdots\cdots(31)$$

一例として $\beta_k=150°$ で両き裂が平行の場合について応力拡大係数の相互干渉を数値的に調べる.まず転がり接触現象を支配する最も重要なパラメータである摩擦係数(またはトラクション係数) f の影響を考える.簡単のため $l_1=l_2=0.1$ の場合について計算した.図2は $f=0.1, 0.7$ の2通りの場合について,ローラの移動に伴うそれぞれのき裂のモードIの応力拡大係数の変動を表す.とくにき裂間距離が $d=1.0, 0.1, 0.05$ の3通りに変化した場合を示す.いずれの場合も f が大きいほど接触トラクションが大きくなるので K_{I} の値も大きくなり,き裂が接触領域に入る直前で K_{I} は急激に最大値を示しローラがき裂の上にさしかかった後はき裂が閉じるので $K_{\mathrm{I}}=0$ となっている.また $f=0.1$

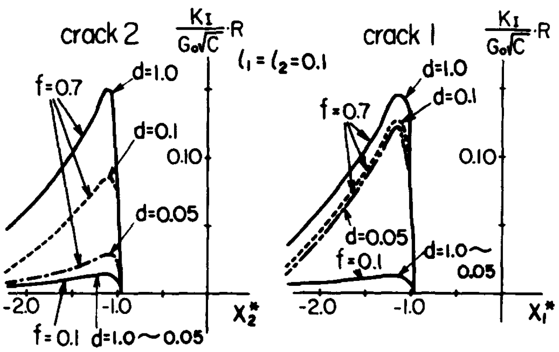

図 2 応力拡大係数 K_{I} に及ぼす摩擦係数の影響

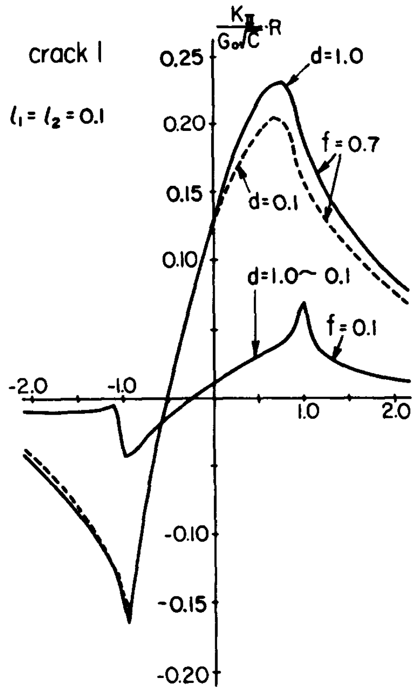

図 3 き裂1の応力拡大係数 K_{II} に及ぼす摩擦係数の影響

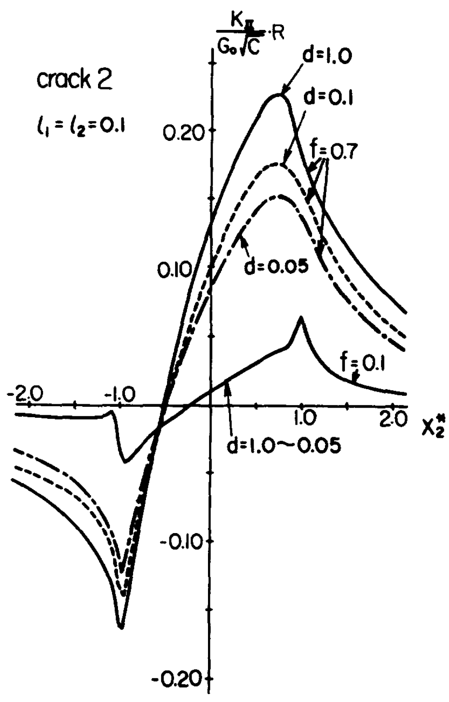

図 4 き裂2の応力拡大係数 K_{II} に及ぼす摩擦係数の影響

NII-Electronic Library Service

The Japan Society of Mechanical Engineers

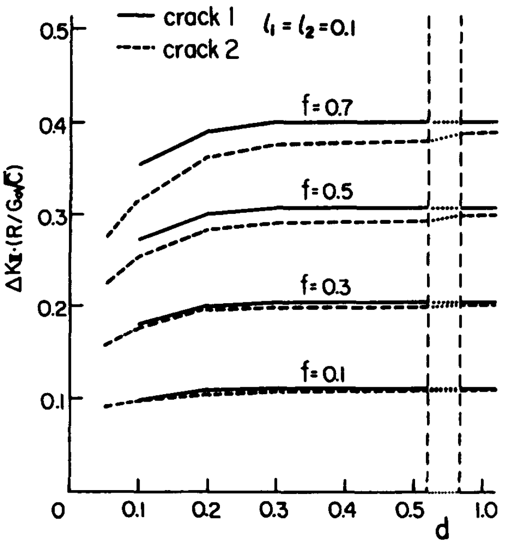

図 5 ΔK_{II} の相互干渉に及ぼす摩擦係数の影響

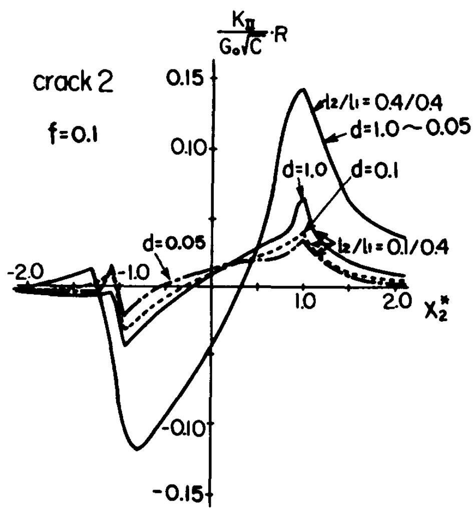

図 6 き裂 2 の応力拡大係数 K_{II} に及ぼすき裂長比の影響

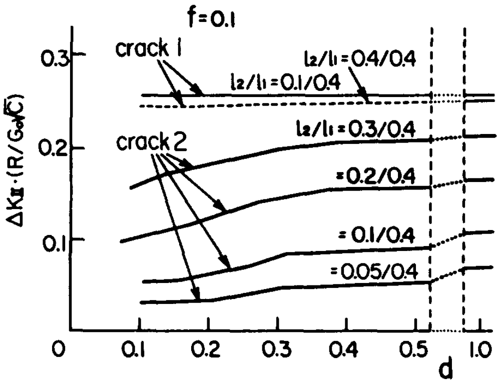

図 7 ΔK_{II} の相互干渉に及ぼすき裂長比の影響

の場合には本数値例の範囲でき裂間距離による影響は見られないが，$f=0.7$ の場合には両き裂が近づくに従って K_I の値は相互干渉により小さくなっており，き裂 1 よりもき裂 2 のほうがこの干渉効果はかなり大きくなっている．これはき裂 2 に先行して接触領域に入るき裂 1 が接触域でトラクション効果を減少させるためと考えられる．さらに図 3 および図 4 にはこのときの両き裂のモード II の応力拡大係数の変動を示す．いずれの場合にも f が大きくなるほど K_{II} の値も大きくなっており，き裂が接触領域に入った直後または接触領域から抜け出るあたりで K_{II} は最大 $(K_{II})_{max}$ または最小 $(K_{II})_{min}$ を示している．K_I と同様に $f=0.1$ の場合にはき裂間距離による影響は見られないが，$f=0.7$ の場合には両き裂が近づくに従って K_{II} の値は相互干渉により小さくなっており，き裂 1 よりもき裂 2 のほうがこの干渉効果はいくぶん大きくなっている．ところで，転がり疲れを論ずるときには 1 サイクルごとの応力拡大係数変動幅 $\Delta K_{II}=(K_{II})_{max}-(K_{II})_{min}$ が重要なパラメータとなる[18][19]．そこで図 5 には f が 4 通りに変化した場合の ΔK_{II} のき裂間距離による干渉効果を示す．d が小さくなるに従って ΔK_{II} の値は相互干渉により小さくなっていくが，とくに $d=0.3$〜0.2 以下では干渉効果が著しくなっている．またき裂 1 の ΔK_{II} の値は f の増加とともにき裂 2 より大くなり，両き裂の ΔK_{II} に及ぼす干渉効果も f の増加とともに著しくなっている．

さらに図 6 および図 7 には $f=0.1$ の場合について，き裂 1 の長さは一定 $(l_1=0.4)$ としてき裂 2 の長さを短くした場合のき裂 2 の応力拡大係数 K_{II} の変動および両き裂の ΔK_{II} に及ぼすき裂間距離による干渉効果を示す．図 6 よりき裂が長いほど K_{II} の値は大きい．またき裂長が同じ場合にはき裂間距離による影響は見られないが，き裂 2 が短くなり $l_2=0.1$ の場合には両き裂が近づくに従ってき裂 2 の K_{II} の値は相互干渉により小さくなっている．図 7 よりき裂 2 が短くなってもき裂 1 の ΔK_{II} に及ぼす干渉効果は見られないが，短いき裂 2 は長いき裂 1 の影響を大きく受け，き裂間距離が小さくなるほど ΔK_{II} の値は減少している．またここで l_2 の大きさ (0.3〜0.05) が干渉効果の程度に及ぼす影響はあまり見受けられない．

4. 結　　言

一対の表面き裂を有する半無限体表面が，剛体ローラによってき裂 1，2 の順に転がり接触を受けたとき両き裂の応力拡大係数を解析し，両き裂が平行でローラ移動方向に半無限体表面から 30° 傾いている場合について，摩擦係数やき裂長比が応力拡大係数に及ぼす影響を数値的に明らかにし，次の結論を得た．

（1） 両き裂長さが同じ場合，摩擦係数が比較的大

NII-Electronic Library Service

The Japan Society of Mechanical Engineers

きいときには両き裂が近づくに従い応力拡大係数とその変動幅は干渉効果により小さくなり近接き裂間で著しい相互干渉が見られるが，摩擦係数が小さくなると，この干渉効果は極端に小さくなる．

（2） 両き裂長さが同じ場合，両き裂間距離によるこの干渉効果はき裂1よりもき裂2で大きく表れ，この傾向はとくにモード1の応力拡大係数で著しい．

（3） 摩擦係数が一定の場合，き裂1に比べき裂2を短くしたとき，き裂2のモードIIの応力拡大係数とその変動幅は両き裂が近づくに従い相互干渉により小さくなるが，その干渉効果は本数値例範囲でのき裂長さによってあまり明確な影響を受けていない．

最後に，本研究を遂行するにあたりご指導いただいた，Northwestern 大学の L. M. Keer 教授に深く感謝する．

文　献

（1） Way, S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **2** (1935), A49.
（2） Martin, J. A and Eberhardt, A. D., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **89** (1967), 932.
（3） Foord, C. A., Hingley, C. G. and Cameron, A., *Trans. ASME, J. Lub. Technol.*, **91** (1969), 282.
（4） Fujita, K. and Yoshida, A., *Wear*, **43** (1977), 315.
（5） Fleming, J. R. and Suh, N. P., *Wear*, **44** (1977), 57.
（6） Nakajima, A., Ichimaru, K., Hirano, F. and Nishimura, M., *JSLE Int.*, **4** (1983), 94.
（7） Keer, L. M. and Bryant, M. D., *Trans. ASME, J. Lub. Technol.*, **105** (1983), 198.
（8） Bryant, M. D., Miller, G. R. and Keer, L. M., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **37** (1984), 467.
（9） Bower, A. F., *Cambridge University Technical Report*, CUED/C-Mech/TR. 40 (1987), 1.
（10） Goshima, T. and Keer, L. M., *ASME/STLE Tribology Conf.*, Florida, USA, (1989-10), *Trans. ASME J. of Tribology*, 112 (1990), 382.
（11） Murakami, Y., Kaneta, M. and Yatsuzuka, H., *ASLE Trans.*, **28** (1985), 60.
（12） Kaneta, M. Murakami, Y. and Yatsuzuka, H., 文献(11)の 407 ページ.
（13） Kaneta, M, Murakami, Y. and Yatsuzuka, H., *Tribology Int.*, **20** (1987), 210.
（14） Miller, G. R., Keer, L. M. and Cheng, H. S., *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, **397** (1985), 197.
（15） Muskhelishvili, *Some Basic Problems in the Mathematical Theory of Elasticity*, (1954) 4th ed., Noordhoff.
（16） Dundurs, J., *Mathematical Theory of Dislocations*, (1975), 70, ASME Pub.
（17） Gerasoulis, A., *Compt. Math. Applics.*, 8 (1982), 15.
（18） Paris, P. and Erdogan, F., *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, **85** (1963), 528.
（19） Suh, N. P., 文献(5)の 1 ページ.

NII-Electronic Library Service