

## 回転移動熱源による有孔円板の非定常熱応力\*

五嶋孝仁<sup>\*1</sup>, 宮尾嘉寿<sup>\*1</sup>Transient Thermal Stresses in  
a Circular Disk with a Hole due to a Rotating Heat Source

Takahito GOSHIMA and Kaju MIYAO

A solution is given for the transient thermal stresses in a circular disk with a circular hole due to a moving heat source. The heat source suddenly generates at a starting point and rotates around about the circular hole at a constant angular velocity. The transient temperature distribution is obtained by making use of Green's function and Laplace transformation. The associated transient thermal stresses are analyzed by using the thermoelastic potential and Neuber-Papkovich stress functions. Numerical calculations are carried out for the case of thermally insulated disks. The effects of angular velocity and hole size on the thermal stress distributions are considered.

**Key Words:** Elasticity Thermal Stress, Stress Concentration, Circular Hole, Circular Disk, Moving Heat Source

## 1. 緒 言

機械や構造物の部材として用いられる板には、ボルト穴や軸穴等のように円孔を有するものが多い。このような円孔の近傍が特に非定常に局部加熱されたとき、非加熱部にある円孔面および外周面に生ずる引張りの熱応力が応力集中やき裂の発生要因となり破損の原因となることが多い。このため円孔の近傍が点熱源や面熱源によって加熱される円孔板の非定常熱応力についてはかなりの報告がある<sup>(1)~(3)</sup>。しかし実際の機械には回転運動が多く見られそれに伴い回転移動する熱源によって非定常に加熱される場合も多い。このため Kim<sup>(4)</sup>は回転点熱源、竹内ら<sup>(5)</sup>は回転線熱源による円板の非定常熱応力についてそれぞれ解析し、著者ら<sup>(6)(7)</sup>は回転面熱源による円板や厚板の非定常熱応力について、また Misra ら<sup>(8)</sup>は回転点熱源による直交異方性円板の非定常熱応力について報告している。しかしこれらの報告はいずれも穴のない板を対象としている。円孔を有する板が回転移動熱源によって加熱される場合の非定常熱応力については、わずかに著者ら<sup>(9)</sup>の無限板に関する報告があるので、より実際的な有

限な円孔円板に関する報告は見当たらないようである。

そこで本研究ではディスクブレーキ制動時のディスク車軸穴近傍での応力集中などに関連し、時間とともにステップ状に変化する（偏心した円形領域の）軸対称熱源が円孔の周りを一定角速度で回転移動するとき、この円孔円板に生ずる非定常熱応力を解析した。ここでは簡単のため円板は薄く両平面よりの熱放散が無視できる平面熱応力問題として解析し、さらに温度の変動範囲が大きくない場合を対象として材料定数は温度によらず一定と仮定し、また熱弾性の基礎式における慣性項や連成項も無視できるものと仮定した。得られた解析結果に基づき、円孔および外周面が断熱され一様分布の円形領域熱源が種々の角速度で回転移動する場合について、熱応力分布とその変動を数値的に明らかにし、角速度や円孔の大きさが円孔面の応力集中および外周面の応力分布などに及ぼす影響を検討した。

## 2. 座標系と加熱条件

図1のように外半径  $r_1$ 、円孔半径  $r_0$  の単位厚さの円板に時間とともにステップ状に変化する  $O_2$ を中心とした軸対称熱源  $Q(r')$  が、 $O_1$  点を出発点として一

\* 原稿受付 平成2年4月23日。

\*\* 正員、富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190)。



$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(\xi)}{\xi^n + n^2 \omega^2} (J_n(\rho \xi) \{G_n^c(\tau) \cos(n\theta) + G_n^s(\tau) \sin(n\theta)\} + \frac{2\delta_0^n \xi^3}{1-\rho_0^2} g(\xi) F_0(\tau)) \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k Z_n(\rho x_k)}{f'_n(x_k)} \{F_k^c(\tau) \cos(n\theta) + F_k^s(\tau) \sin(n\theta)\})] d\xi \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

ここで

$$F_k^x(\tau) = \frac{1}{x_k^4 + n^2\omega^2} ((\xi^2 x_k^2 - n^2\omega^2) \cos(n\omega\tau) + (\xi^2 + x_k^2)n\omega \sin(n\omega\tau) \\ + (n^2\omega^2 - \xi^2 x_k^2)e^{2x_k^2\tau}) - \xi^2(e^{-x_k^2\tau} - e^{-\xi^2\tau}) / (\xi^2 - x_k^2) \dots \quad (13)$$

$$F_k^s = \frac{1}{x_k^4 + n^2\omega^2} \left[ \left( \xi^2 x_k^2 - n^2 \omega^2 \right) \sin(n\omega\tau) - (\xi^2 + x_k^2) n\omega \cos(n\omega\tau) \right. \\ \left. + \left( \xi^2 + x_k^2 \right) n\omega e^{-x_k^2 \tau} \right] + n\omega (e^{-x_k^2 \tau} - e^{-\xi^2 \tau}) / (\xi^2 - x_k^2) \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

$$Z_n(\rho x_k) = \{(n/\rho_0 - B_i)J_n(\rho_0\xi) - \xi J_{n+1}(\rho_0\xi)\}\{(n + B_o)C_n(x_k, \rho x_k) - x_k D_n(x_k, \rho x_k)\} \\ - \{(n + B_o)J_n(\xi) - \xi J_{n+1}(\xi)\}\{(n/\rho_0 - B_i)C_n(\rho_0 x_k, \rho x_k) - x_k D_n(\rho_0 x_k, \rho x_k)\}, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$f_n(x) = x^2 \{ J_{n+1}(\rho_0 x) Y_{n+1}(x) - J_{n+1}(x) Y_{n+1}(\rho_0 x) \} + x \{ (n+B_o) D_n(\rho_0 x, x) \\ - (n/\rho_0 - B_i) D_n(x, \rho_0 x) \} - (n+B_o)(n/\rho_0 - B_i) C_n(\rho_0 x, x), \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

$$C_n(\gamma x, \delta x) = Y_n(\gamma x) J_n(\delta x) - J_n(\gamma x) Y_n(\delta x), \quad D_n(\gamma x, \delta x) = Y_{n+1}(\gamma x) J_n(\delta x) - J_{n+1}(\gamma x) Y_n(\delta x)$$

$$G_0(\tau) = (1 - e^{-\xi^2 \tau}) / \xi^2, \quad F_0(\tau) = \tau - G_0(\tau), \quad g(\xi) = J_1(\xi) - \rho_0 J_1(\rho_0 \xi)$$

$$F_k(\tau) = \{(1 - e^{-x_k^2 \tau})/x_k^2 + (e^{-\xi^2 \tau} - e^{-x_k^2 \tau})/(\xi^2 - x_k^2)\}/\xi^2$$

#### 4. 応 力

平面応力非軸対称状態の熱弾性基礎式の解は、熱弾性変位ポテンシャル  $\mathcal{Q}$  と Neuber-Papkovich の応力関数  $\phi_i$  ( $i=0, 1, 2$ ) を用いて、次式のように与えられる。

$$\frac{u}{r_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} + (1+\nu)\rho \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \cos \theta + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \sin \theta \right\} - (3-\nu)(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) \quad \dots \dots \dots (17)$$

ここで  $u$ ,  $v$  はそれぞれ  $r$ ,  $\theta$  方向変位,  $\nu$  は材料のポアソン比を表し,  $\Omega$  と  $\phi_i$  は次式を満足する解である。

ここで  $\alpha$  は材料の線膨張係数を表す。

また円孔円板には外力が働いていないものとすれば、力学的境界条件は次式で与えられる。

式(19)に式(12)を代入すればポアソンの方程式となり、 $\Omega$ は温度に対応した形で容易に求まる。また式(20)を満足する応力関数として次のような調和関数を選ぶ。

$$\Phi_i = C_{0i} + D_{0i} \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_{ni}^c \rho^n + D_{ni}^c \rho^{-n}) \cos(n\theta) + (C_{ni}^s \rho^n + D_{ni}^s \rho^{-n}) \sin(n\theta)], \quad (i=0, 1, 2) \quad \dots \quad (22)$$

ここで  $C_{ni}^{cs}, D_{ni}^{cs}, C_{0i}, D_{0i}$  は未定定数である。この  $\phi_i$  および  $\Omega$  を式(17), (18)に代入し、さらにデュアメル・ノイマン則に代入すれば、応力成分が次式のようく表される。

$$\{\Xi\} = \frac{Ea\tau^2}{K} \int_0^\infty \xi \tilde{Q}(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta i_n^2 J_n(\zeta \xi)}{\xi^4 + n^2 \Omega^2} [\{\Xi_a\} \cos(n\theta) + \{\Xi_b\} \sin(n\theta)] d\xi \quad \dots \quad (23)$$

二二六

$$\{\Xi\} = \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}\}, \quad \{\Xi_a\} = \{\sigma_r^a, \sigma_\theta^a, -\sigma_{r\theta}^a\}, \quad \{\Xi_b\} = \{\sigma_r^b, \sigma_\theta^b, \sigma_{r\theta}^b\} \quad \dots \quad (24)$$

$$U_n(\rho) = \frac{n(1-n)}{\rho^2} J_n(\rho\xi) - \frac{\xi}{\rho} J_{n+1}(\rho\xi), \quad V_n(\rho) = \frac{n(1-n)}{\rho^2} Z_n(\rho x_k) - \frac{x_k}{\rho} Z_{n+1}(\rho x_k)$$

$$U_n^0(\rho) = \left\{ \frac{n(n-1)}{\rho^2} - \xi^2 \right\} J_n(\rho\xi) + \frac{\xi}{\rho} J_{n+1}(\rho\xi), \quad V_n^0(\rho) = \left\{ \frac{n(n-1)}{\rho^2} - \xi^2 \right\} Z_n(\rho x_k) + \frac{x_k}{\rho} Z_{n+1}(\rho x_k)$$

$$U_n^{r\theta}(\rho) = \frac{n(n-1)}{\rho^2} J_n(\rho\xi) - \frac{\xi}{\rho} J_{n+1}(\rho\xi), \quad V_n^{r\theta}(\rho) = \frac{n(n-1)}{\rho^2} Z_n(\rho x_k) - \frac{x_k}{\rho} Z_{n+1}(\rho x_k)$$

$$\Pi_n^r = (n+1)(n-2)(1+\nu), \quad \Pi_n^\theta = -(n+1)(n+2)(1+\nu), \quad \Pi_n^{r\theta} = -(n+1)(1+\nu), \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\Gamma_n^r = (n-1)(n+2)(1+\nu), \quad \Gamma_n^\theta = -(n-1)(n-2)(1+\nu), \quad \Gamma_n^{r\theta} = -n(n-1)(1+\nu), \quad (n \geq 2); \quad \Gamma_0^r = 0$$

$$\Gamma_r^j = \begin{cases} -(3+\nu), & j=r \\ 1-\nu, & j=\theta, r\theta \end{cases}, \quad \Delta_n^j = \begin{cases} n-1, & j=r \\ 1-n, & j=\theta, r\theta \end{cases}, \quad \Lambda_n^j = \begin{cases} n+1, & j=r, r\theta \\ -(n+1), & j=\theta \end{cases}$$

また  $R_n^{c,s}$ ,  $L_n^{c,s}$ ,  $M_n^{c,s}$ ,  $N_n^{c,s}$  は未定定数であり、境界条件式(21)から導かれる連立方程式によって定まる。

### 5. 数値計算

簡単な場合として  $Q(R)=Q_0$ (一定) ( $0 \leq R \leq \eta$ ) で円孔および外周面が断熱( $B_i=B_o=0$ )の場合について直径上 ( $\theta=0, \pi$ ) および円孔、外周面上での温度および応力分布を数値的に明らかにした。熱源半径が  $\eta=0.2$ 、回転半径が  $\xi=0.6$  で一定の場合、 $T^*=Q_0 r_0^2/K$  なる

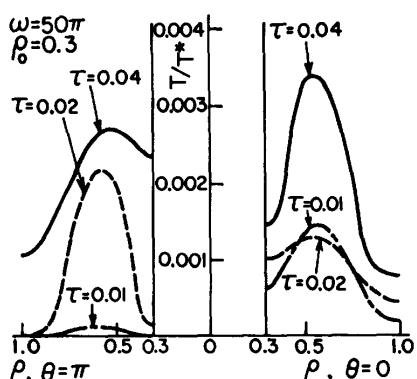


図 2 直径上の温度分布の時間的変化

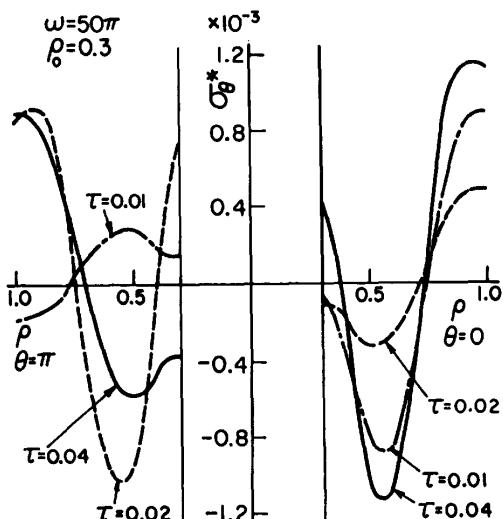


図 3 直径上の円周応力の時間的変化

温度で無次元化した無次元量  $T/T^*$  および  $\sigma_j^* = \sigma_j/E\alpha T^*$  ( $j=r, \theta, r\theta$ ) の数値結果を以下に示す。

まず無次元角速度  $\omega=50\pi$  で無次元円孔半径  $\rho_0=0.3$  の場合について、O<sub>1</sub> 点を通る円板直径上の温度および応力分布の時間的変化を図 2-5 に示す。各応力成分のうち円周応力が最も大きく、熱源通過領域で大きな圧縮応力、円孔縁や外周縁では大きな引張応力が見られる。そこで図 6, 7 には円孔縁と外周縁における円周応力分布の時間的変化を示す。図 6 より円孔縁における各時間の最大引張応力はそのときの熱源位置よりも約 45° 程度遅れたところまたはその反対側 (約

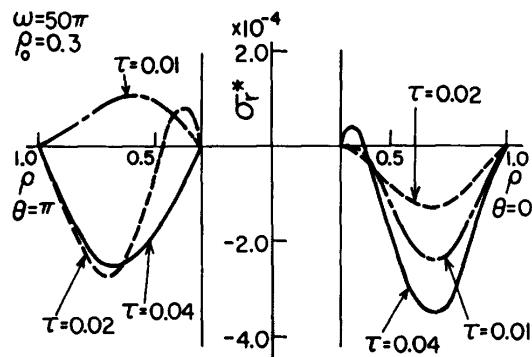


図 4 直径上の半径応力の時間的変化

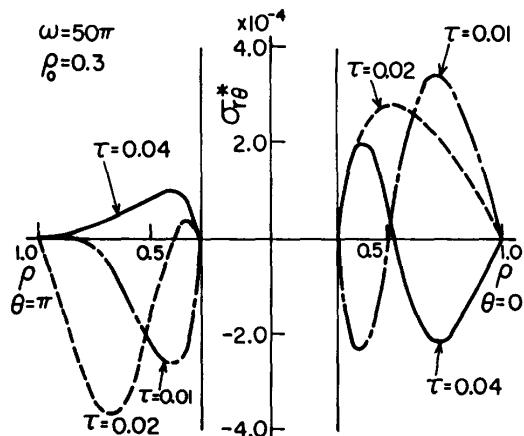


図 5 直径上のせん断応力の時間的変化

135°程度進んだ)あたりで生じている。そしてその大きさは本数値例の時間範囲ではあまり大きく変化していない。また図7より外周縁における各時間の最大引張応力はそのときの熱源位置よりも約45°程度遅れたところで生じており、その大きさは円孔縁の最大引張応力よりも大きい。また外周縁での圧縮応力は時間が小さいときにわずかに見られる程度でほとんど現れていない。

次に角速度が応力分布に及ぼす影響を明らかにするために、 $\rho_0=0.3$ で $\tau=0.04$ とし $\omega$ が0から $\infty$ まで6通りに変化した場合の直径上および円孔縁、外周縁上の円周応力分布を図8-10に示す。角速度が小さい場合にはそのときの熱源位置から最も遠い円孔縁で最大引張応力が生じ、 $\omega=0$ の場合にその値は最も大きくな

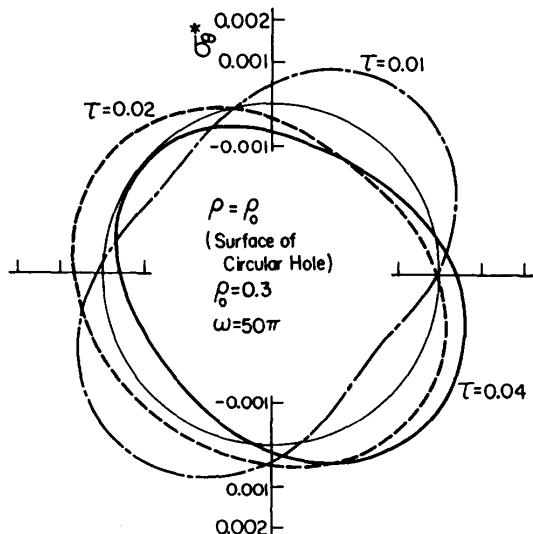


図6 円孔縁上の応力分布の時間的変化

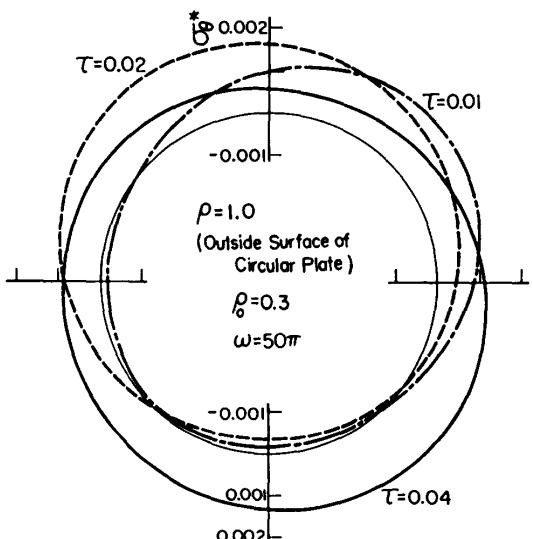


図7 外周縁上の応力分布の時間的変化

り円孔縁での応力集中も著しくなっている。角速度が大きくなるに従って最大応力の値も小さくなり、本数値例の範囲では $\omega \geq 25\pi$ で、そのときの熱源位置より約45°程度遅れた外周縁で最大引張応力が生じている。 $\omega=\infty$ の場合には軸対称問題となり、円孔縁で一様な圧縮応力、円周縁で一様引張応力が生じている。とくに円周応力に関しては $\omega$ が $100\pi$ 以上で $\omega=\infty$ の結果とほとんど等しくなっている。

最後に図11、12には $\omega=50\pi$ で $\tau=0.04$ のとき、円孔半径を3通りに変化させた場合の直径上および円孔縁上の円周応力分布を示す。なお図中には比較のため

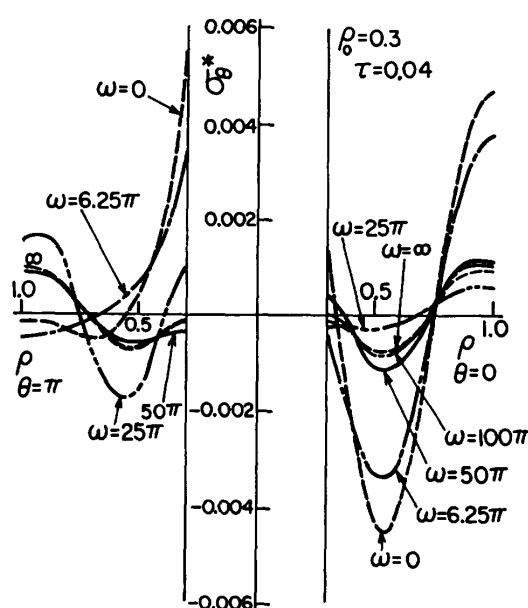


図8 角速度が直径上の円周応力分布に及ぼす影響

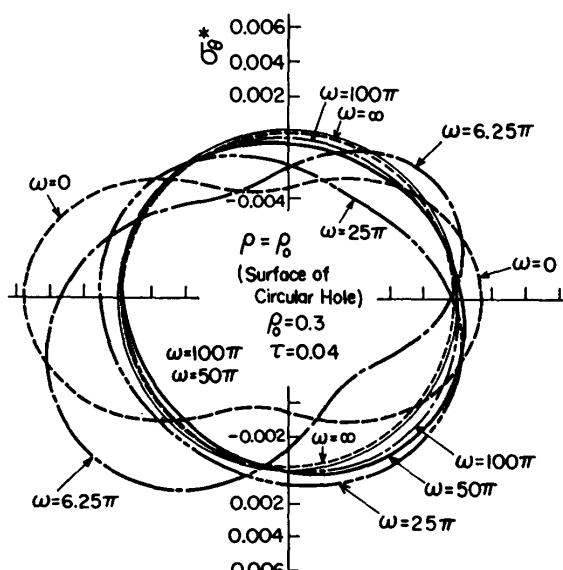


図9 角速度が円孔縁上の応力分布に及ぼす影響

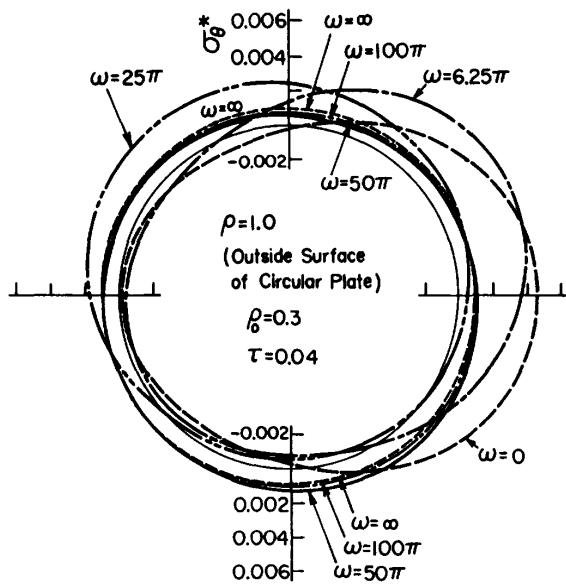


図 10 角速度が外周線上の応力分布に及ぼす影響

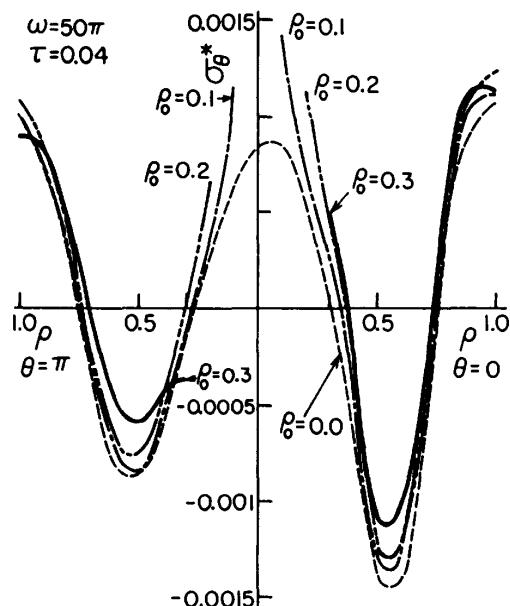


図 11 円孔半径が直径上の円周応力分布に及ぼす影響

円孔のない場合 ( $\rho_0=0.0$ ) の結果<sup>(6)</sup>も破線で示してある。これより円孔が小さくなるほど応力値は大きくななり円孔縁での応力集中も著しくなっている。とくに本数値計算の範囲では  $\rho_0 \leq 0.2$  で円孔縁の引張応力が最大となり円周縁引張応力ならびに円孔のない円板の中心の引張応力よりも大きくなっている。

## 6. 結 言

以上円孔を有する円板に一定角速度で回転移動する熱源があるときの非定常熱応力を解析し、得られた結

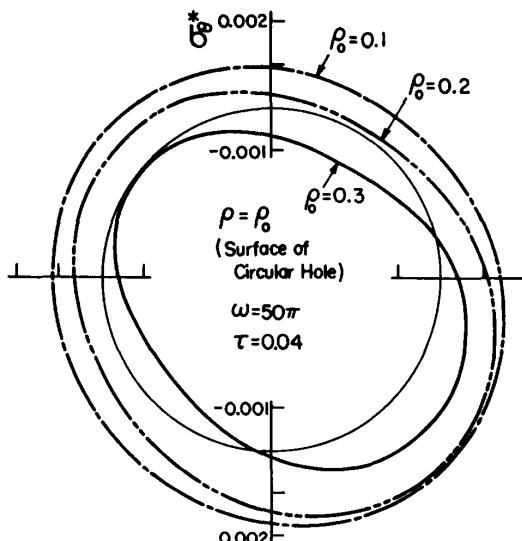


図 12 円孔半径が円孔縁応力分布に及ぼす影響

果に基づいて簡単な熱的境界条件のもとで円孔円板に生ずる熱応力を数値的に明らかにし、次の結論を得た。

(1) 最大引張応力は、角速度が小さいときには熱源位置から最も遠い円孔縁で生じ、角速度が比較的大きいときには熱源位置から約 45° 程度遅れた外周縁に生ずる。また最大圧縮応力は熱源通過領域または円孔縁の円周応力に生ずる。

(2) 热源が静止しているとき最大応力値は最も大きく円孔縁の応力集中も最も著しいが、热源移動速度が大きくなるに従い最大応力値は小さくなる。とくに円周縁応力については無次元角速度が  $100\pi$  以上で角速度無限大の結果と等しくなっている。

(3) 円孔が小さくなるほど、とくに円孔縁での最大引張応力値が大きくなり円孔縁応力集中も著しくなってくる。

最後に本研究に協力いただいた当時富山大学工学部学生であった米原寿弘君に感謝する。

## 文 献

- (1) 福井・ほか2名、機論、36-291 (1970), 1772.
- (2) 野田・竹内、機論、40-329 (1974), 125.
- (3) 小泉・ほか2名、機論、42-359 (1976), 2000.
- (4) Kim, T. J., AIAA J., 9 (1971), 2078.
- (5) 竹内・ほか2名、機論、40-336 (1974), 2110.
- (6) 五嶋・宮尾、機論、47-418, A (1981), 619.
- (7) 五嶋・宮尾、機論、50-452, A (1984), 636.
- (8) Misra, J. C., Achari, R. M., J. of Thermal Stresses, 6 (1983), 115.
- (9) Goshima, T., Miyao, K., J. of Thermal Stresses, 13 (1990), 43.