

外乱を伴う放物形分布定数系の有限次元離散時間 MRAC*

佐々木 基文*¹, 早川 義一*², 藤井 省三*²

Finite-Dimensional Discrete-Time MRAC for Distributed-Parameter Systems of Parabolic Type with Disturbances

Motofumi SASAKI, Yoshikazu HAYAKAWA and Seizo FUJII

In this paper, a method of design for a discrete-time MRAC (model reference adaptive control) for a distributed-parameter system of parabolic type with disturbances is presented. A new adaptive law is proposed, and a controller is constructed with a finite-dimensional adaptive mechanism. The global boundedness of all the signals in the closed loop system is shown. Finally, the effectiveness of our proposed method is shown by using a simple numerical example.

Key Words: Stability, Adaptive Control, Distributed System, Discrete-Time Control, Disturbance, Robust Control, Global Boundedness

1. はじめに

最近、適応制御の実用化をめざしてロバスト適応制御に関する研究が活発に行われている。これらの研究のほとんどは未知プラントが集中定数系で記述される場合(例えば、文献^{(1)~(6)}を参照)を取扱っている。一方、分布定数系の場合⁽⁷⁾は極めて少ない。

文献⁽⁸⁾⁽⁹⁾では、分布定数系の適応制御を報告しているが、コントローラの構成が無次元機構であるため、実現が困難である。これに対して、文献⁽⁷⁾では、有限次元適応制御の設計法を示しているが、得られる結果は局所的安定性にすぎない。ところで、実際のプラントでは、しばしば好ましくない外乱を受ける。しかしながら、文献^{(7)~(9)}では、いずれも外乱を考慮していない。また、これらの制御方式はすべて連続時間形式で行われている。

近年、デジタルコンピュータの発展はめざましく、計算の高速化および記憶の大容量化が進んでいる。このことおよび計装の容易さを考慮すれば、適応コントローラは離散時間形式で設計されることが望ましい。

本論文では、外乱を伴う放物形分布定数系(熱伝導や拡散現象の一般的数学モデル)の適応制御の設計法について述べる。新しい適応則を提案し、適応コントローラを有限次元離散時間形式で構成する。得られる主な結果は閉ループ系の全信号の大域的有界性である。最後に、簡単な数値例を用いて本手法の有効性を示す。

2. 問題記述

準備として、線形作用素 \bar{A} について述べる。 $\Omega \subset R^n$ を有界領域、 A' を Ω 上の実係数 $2m'$ 階偏微分作用素、 V' を実ヒルベルト空間、 a を V' 上の双一次形式、 (A', V', a) を Ω 上の Višik-Sobolev 問題⁽¹⁰⁾とする。 (A', V', a) から定まる A' の Friedrichs 拡張を \bar{A} と記す。 \bar{A} の定義域 $D(\bar{A})$ は $L^2(\Omega)$ で稠密である。 \bar{A} のリゾルベントは $L^2(\Omega)$ におけるコンパクト写像であり、 \bar{A} のスペクトルは離散的で重複度有限な固有値だけからなる。本論文では、簡単のため、 \bar{A} の多重度が 1 であると仮定する。作用素 \bar{A} の固有値 σ_i 、固有関数 ϕ_i はそれぞれ次の性質を満たす。

$$\bar{A}\phi_i = \sigma_i\phi_i, \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_i < \dots$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = +\infty$$

* 平成元年7月27日 第28回計測自動制御学会学術講演会において講演、原稿受付 平成2年4月4日。

*¹ 正員、富山大学工学部 (〒930 富山市五福3190)。

*² 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

$$\phi_i \in D(\bar{A}), \|\phi_i\|=1$$

$\{\phi_i\}_{i=1}^n : L^2(\Omega)$ の完全正規直交系

ここに、 $\|\cdot\|$ は $L^2(\Omega)$ のノルムを表す。また、 $-\bar{A}$ は解析の半群 $\exp(-\bar{A}t)$ を生成する。ここで、関数空間 V' に関する u のノルム、すなわち、 $\|u\|_{V'}$ に対する事前評価を求めておこう。まず、 $u \in D(\bar{A})$ に対して、

$$a(u, u) = (\bar{A}u, u)$$

が成り立つ⁽¹⁰⁾。ここに、 (\cdot, \cdot) は $L^2(\Omega)$ の内積を表す。次に、Višik-Sobolev 問題の条件から、

$$a(u, u) + t_a \|u\|^2 \geq \delta_a \|u\|_{V'}^2, \quad u \in V'$$

が得られる。ここに、 δ_a は正定数、 t_a は実定数で、ともに u に無関係である。上の二つの式より、 $\|u\|_{V'}$ に対する次の評価を得る。

$$\|u\|_{V'} \leq \bar{c} (\|\bar{A}u\| + \|u\|), \quad u \in D(\bar{A}) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 \bar{c} は δ_a, t_a に依存する正定数である。以上で、準備を終える。

次のような放物形分布定数系で記述される未知プラントを考える。

$$\dot{u}(t) = -\bar{A}u(t) + \bar{g}f(t) + \bar{h}d(t) \dots\dots\dots (2 \cdot a)$$

$$y(t) = Wu(t) + d_y(t), \quad W \cdot = (\bar{w}, \cdot) \dots\dots (2 \cdot b)$$

ここに、 $u(0) = u_0, \bar{g}, \bar{h}, \bar{w}, u_0 \in L^2(\Omega), f(t), d(t) \in R$ は任意の $T' > 0$ に対して $[0, T']$ で区分的 Hölder 連続、 $d_y(t) \in R$ は区分的連続、 $f(t)$ は制御入力、 $d(t), d_y(t)$ は有界外乱、 $y(t) \in R$ は出力である。仮定より、式(2・a)は一意解が存在⁽¹¹⁾する。いま、射影作用素 P, Q をそれぞれ $Pu = \sum_{i=1}^n (u, \phi_i) \phi_i, u \in L^2(\Omega), Q = I - P$ と定義すると、式(2)は次のように書ける。

$$\dot{x}_d(t) = \bar{A}_d x_d(t) + \bar{b}_d f(t) + d_d(t)$$

$$\dot{x}_r(t) = -\bar{A}_r x_r(t) + \bar{b}_r f(t) + d_r(t) \dots\dots\dots (3)$$

$$y(t) = c_d^T x_d(t) + c_r x_r(t) + d_y(t)$$

ここに、 $x_d(t) = [(Pu(t), \phi_i)] \in R^n, \bar{A}_d = \text{diag}[-\sigma_i] \in R^{n \times n}, \bar{b}_d = [(P\bar{g}, \phi_i)] \in R^n, d_d(t) = [(P\bar{h}d(t), \phi_i)] \in R^n, x_r(t) = Qu(t), \bar{A}_r$ は \bar{A} の $QD(\bar{A})$ への制限、 $\bar{b}_r = Q\bar{g}, d_r(t) = Q\bar{h}d(t), c_d = [(P\bar{w}, \phi_i)] \in R^n, c_r \cdot = (Q\bar{w}, \cdot)$ である。零次ホールダを前置し、式(3)を離散化すると、次を得る。

$$x_{k+1}^d = A_d x_k^d + b_d f_k + d_k^d$$

$$x_{k+1}^r = A_r x_k^r + b_r f_k + d_k^r \dots\dots\dots (4)$$

$$y_k = c_d^T x_k^d + c_r x_k^r + d_k^y$$

トリプル (A_d, b_d, c_d^T) を dominant part という。これに対して次の前提を設ける。

(A 1) $G_d(z) = k_d N(z) / D(z) = c_d^T (zI - A_d)^{-1} b_d$ で、 $D(z)$ は n 次モニク多項式、 $N(z)$ は m 次モニク漸近安定多項式、 $n > m$ とする。

(A 2) $k_d > 0$ とする。

$$(A 3) \quad (P\bar{g}, \phi_i)(P\bar{w}, \phi_i) \neq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

注：零次ホールダを前置し、連続プラントを離散化すると、たいいていの場合、連続プラントの相対次数が何であっても離散化プラントの相対次数は1になる。

しかし、本論文では一般性を重視し、dominant part の相対次数が1とは限らない場合を取扱う。もちろん、その相対次数が1であっても本手法の有効性はなんら変わらない。前提(A 2)は、一般性を失うことなく、設定できる。前提(A 3)は dominant part が可制御かつ可観測であること、したがって、 $D(z)$ と $N(z)$ が互いに素であることを保証する。

トリプル (A_r, b_r, c_r) を unmodeled part という。これに対して次の前提を設ける。

$$(A 4) \quad \sigma_{n+1} > \beta_1 > 0, \beta_1 \text{ は既知とする。}$$

(A 5) $c_r(zI - A_r)^{-1} b_r = \mu c_r'(zI - A_r)^{-1} b_r', \mu$ は既知で正のスカラ-とする。ここに、 $b_r = \mu_1 b_r', c_r = \mu_2 c_r', \mu = \mu_1 \mu_2, \|b_r'\| = \|c_r'\| = 1$ である。

dominant part に対して規範モデルは次のように与えられる。

$$\frac{y_k^m}{r_k} = c_m^T (zI - A_m)^{-1} b_m = \frac{k_m}{D_m(z)} = W_m(z) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 r_k はスカラ-で有界な規範入力、 y_k^m はスカラ-の規範出力、 $k_m > 0, D_m(z)$ は $(n - m)$ 次モニク漸近安定多項式、トリプル (A_m, b_m, c_m) は最小表現である。

問題は、まず dominant part の出力が規範モデルの出力に適応的にできるだけ追従するように有限次元離散時間適応コントローラを構成し、次にこれを外乱および unmodeled part の存在するプラントに適用し、このときの閉ループ系の全信号の大域的有界性を保証することである。以下では、dominant part のゲイン k_d が既知の場合と未知の場合に分けて考察する。

3. 有限次元離散時間適応コントローラの構成 (k_d が既知の場合)

本章では、有限次元離散時間適応コントローラを構成する。ここでは、簡単のため、 k_d が既知であると仮定し、 $k_d = k_m$ とする。

入力 f_k 、出力 y_k を用いて次のような補助ベクトル $\omega_k = [\omega_k^{(1)T} \quad \omega_k^{(2)T} \quad y_k]^T \in R^{2n-1}$ を発生させる。
 $\omega_{k+1}^{(1)} = F\omega_k^{(1)} + g f_k, \quad \omega_{k+1}^{(2)} = F\omega_k^{(2)} + g y_k$
 (6)

ここに、 $\omega_0^{(1)} = \omega_0^{(2)} = 0 \in R^{n-1}$ 、対 (F, g) は可制御、 F は漸近安定である。制御則として次のような構造をもつものを採用しよう。

$$f_k = \theta_k^T \omega_k + r_k \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\theta_k \in R^{2n-1}$ は可調整コントローラパラメータベクトルである。 $\theta_k \equiv \theta^* = \text{const.}$ のとき、 dominant part とコントローラの合成系の伝達関数が規範モデルの伝達関数にマッチするような θ^* が存在⁽¹²⁾する。

いま、

$$Y_k = [x_k^{dT} \quad \omega_k^{(1)T} \quad \omega_k^{(2)T}]^T$$

とおくと、

$$Y_{k+1} = A_c Y_k + b_c (\phi_k^T \omega_k + r_k) + \eta_k^e + d_k^e + f_k^e$$

$$y_k = h_c^T Y_k + c_r x_k^T + d_k^e \dots\dots\dots (8)$$

を得る。ここに、 A_c は漸近安定であり、 $h_c^T (zI - A_c)^{-1} b_c = W_m(z)$ 、 $\phi_k \triangleq \theta_k - \theta^*$ 、 η_k^e および d_k^e はそれぞれ unmodeled part (ただし、初期値部分を除く) および外乱に依存する項で、 f_k^e は unmodeled part の初期値のみに依存する指数減衰項である。これより、

$$y_k = W_m(z) (\phi_k^T \omega_k + r_k) + \eta_k + f_k^e$$

$$\eta_k = \bar{\eta}_k + \bar{d}_k^e$$

を得る。ここに、 $\bar{\eta}_k$ および \bar{d}_k^e はそれぞれ unmodeled part および外乱に依存する項で、 f_k^e はプラントのすべての初期値のみに依存する指数減衰項である。 \bar{d}_k^e 、 $\bar{\eta}_k$ および η_k はそれぞれ次のように評価できる：

$$|\bar{d}_k^e| \leq N_1, \quad |\bar{\eta}_k| \leq \mu m_k$$

$$|\eta_k| \leq N_1 + \mu m_k \triangleq \eta_k^{(0)} \leq N m_k \dots\dots\dots (9)$$

$$N \triangleq N_1 (1 - \delta_0) \delta_1^{-1} + \mu$$

m_k は次の式で生成される信号である。

$$m_{k+1} = \delta_0 m_k + \delta_1 (|f_k| + |y_k| + 1) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$m_0 \geq \delta_1 / (1 - \delta_0)$$

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_0 = \max \{ \exp(-\beta_1 T), \beta_2, \beta_3 \}$$

である。ここに、 T はサンプリング周期、 β_2 および β_3 は次の式

$$\|A_m^k\| \leq N_2 \beta_2^k, \quad 0 < \beta_2 < 1$$

$$\|F^k\| \leq N_3 \beta_3^k, \quad 0 < \beta_3 < 1$$

を満たすある正定数である。拡張誤差を

$$\epsilon_k^{(1)} = y_k - y_k^m + \theta_k^T \zeta_k - W_m(z) \theta_k^T \omega_k \dots\dots\dots (11)$$

と定義すると、 $\epsilon_k^{(1)}$ は次のように表される。

$$\epsilon_k^{(1)} = \phi_k^T \zeta_k + \eta_k + f_k^e$$

ここに、 $\zeta_k = W_m(z) \omega_k$ である。 $\epsilon_k^{(1)}$ 、 $\eta_k^{(0)}$ を用いると、新しい適応則は次によって与えられる。

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \gamma_1 \frac{\epsilon_k^{(1)} \zeta_k}{\|\zeta_k\|^2} - \gamma_2 \frac{|\epsilon_k^{(1)}| \eta_k^{(0)} \theta_k}{\|\zeta_k\|^2} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $0 < \gamma_1 < 1.5$ 、 $0 < \gamma_2 < N^{-1}$ 、 $\xi_k = [\zeta_k^T \quad m_k \quad \epsilon_k^{(1)}]^T \in R^{2n+1}$ である。この適応則の一つの特徴は正規化信号 ξ_k の中に拡張誤差 $\epsilon_k^{(1)}$ を含んでいることである。これは、後に示されるように、 θ_k の有界性の立証に寄与する。式(6)、(7)、(10)~(12)が所望の有限次元離散時間適応コントローラである。理解を容易にするため、このブロック図を図1に示す。

4. 全信号の大域的有界性

本章では、前章で述べた有限次元離散時間適応コントローラを未知プラントに適用したとき、その結果生

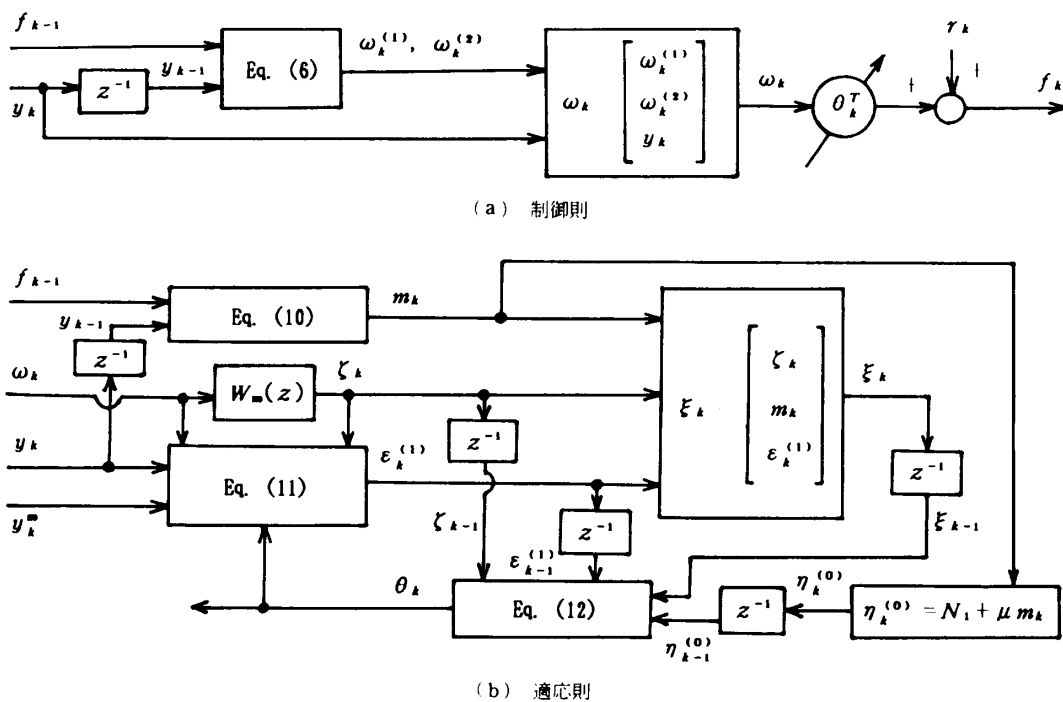


図1 有限次元離散時間適応コントローラの構成

ずる閉ループ系の全信号の大域的有界性について述べる。まず、 ϕ_k の有界性を示す。正定値関数 V_k を次の式

$$V_k = \phi_k^T \phi_k + 2 \sum_{i=k}^{\infty} \gamma_1 \left(\frac{|f_i^e|}{\|\xi_i\|} \right)^2$$

で定義する。 V_k を評価すると、次の式

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= V_{k+1} - V_k \\ &\leq -\gamma_1(1.5 - \gamma_1) \left(\frac{|\varepsilon_k^{(1)}|}{\|\xi_k\|} \right)^2 - \gamma_2 \\ &\quad \times (1 - N\gamma_2) |\varepsilon_k^{(1)}| \eta_k^{(0)} \left(\frac{\|\phi_k\|}{\|\xi_k\|} \right)^2 - \frac{|\varepsilon_k^{(1)}| \eta_k^{(0)}}{\|\xi_k\|^2} \\ &\quad \times [\gamma_2 (\|\phi_k\|^2 - 2\|\phi_k\| \|\theta^*\|) - 2\gamma_1 - 2\gamma_1 \gamma_2 \\ &\quad \times (\|\phi_k\| + \|\theta^*\|) - N\gamma_2^2 (2\|\phi_k\| + \|\theta^*\|) \|\theta^*\|] \\ &\quad - \frac{\gamma_1}{2} \left(\frac{|\varepsilon_k^{(1)}|}{\|\xi_k\|} - 2 \frac{|f_k^e|}{\|\xi_k\|} \right)^2 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

を得る。よって、ある正定数 $\bar{\phi}_0$ が存在して、 $\|\phi_k\| \geq \bar{\phi}_0$ のとき $\Delta V_k \leq 0$ が成り立つ。これより ϕ_k が有界であることがわかる。

次に、残りの信号の有界性を矛盾によって示そう。これを二つのステップに分けて行う。

ステップ1: unmodeled part の状態 x_k^i を除く全体系の状態を

$$\begin{aligned} z_k &\triangleq [z_k^T \ m_k]^T, \quad z_k^i \triangleq [Y_k^T \ \bar{z}_k^T]^T \\ \bar{z}_k &\triangleq [\zeta_k^{(1)T} \ \bar{\zeta}_k^{(1)T} \ \zeta_k^{(2)T} \ \bar{\zeta}_k^{(2)T}]^T \end{aligned}$$

と定義する。ここに、

$$\begin{aligned} \zeta_{k+1}^{(1)} &= F \zeta_k^{(1)} + g c_m^T \bar{\zeta}_k^{(1)}, \quad \zeta_0^{(1)} = 0 \\ \bar{\zeta}_{k+1}^{(1)} &= A_m \bar{\zeta}_k^{(1)} + b_m f_k, \quad \bar{\zeta}_0^{(1)} = 0 \\ \zeta_{k+1}^{(2)} &= F \zeta_k^{(2)} + g c_m^T \bar{\zeta}_k^{(2)}, \quad \zeta_0^{(2)} = 0 \\ \bar{\zeta}_{k+1}^{(2)} &= A_m \bar{\zeta}_k^{(2)} + b_m y_k, \quad \bar{\zeta}_0^{(2)} = 0 \end{aligned}$$

である。状態 z_k^i, m_k が満たす方程式を次のように表せる。

$$\begin{aligned} z_{k+1}^i &= A_z z_k^i + b_z (\phi_k^T \omega_k + r_k) + \bar{\eta}_k^i \\ m_{k+1} &= \delta_0 m_k + A_m^T z_k^i + b_m^T (\phi_k^T \omega_k + r_k) + \eta_k^m \end{aligned} \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 $\eta_k^i = [\bar{\eta}_k^i, \eta_k^m]^T = d_k^i + \bar{\eta}_k^i$ で、 d_k^i は unmodeled part の初期値および外乱に依存する項であり、 $\bar{\eta}_k^i$ は unmodeled part にのみ依存する項である。 d_k^i および $\bar{\eta}_k^i$ は次のように評価される。すなわち、

$$\|d_k^i\| \leq N_i, \quad \|\bar{\eta}_k^i\| \leq \mu_{c1} m_k$$

を満たすようなある正定数 N_i, c_1 が存在する。 A_m^T, b_m^T の時変要素は符号関数 $\text{sgn}(f_k), \text{sgn}(y_k)$ のみで、残りはすべて時間不変である。また、 A_z は漸近安定行列である。これより、

$$A_z^T P A_z - P = -Q$$

を満たすような正定対称行列 P, Q が存在する。正定値関数 W_k を

$$W_k = z_k^T P z_k + \bar{\alpha} m_k^2, \quad \bar{\alpha} > 0$$

と定義し、 $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_0$ 等をそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \lambda_{\max} P, \quad \bar{\lambda}_2 = \lambda_{\min} P, \quad \bar{\lambda}_0 = \lambda_{\min} Q \\ \lambda_1 &= \max \{ \bar{\lambda}_1, \bar{\alpha} \}, \quad \lambda_2 = \min \{ \bar{\lambda}_2, \bar{\alpha} \} \\ \|A_z\| &\leq \bar{A}_0, \quad \|A_m^T\| \leq \bar{A}_0, \quad \|b_z\| \leq b_0 \\ \|b_m^T\| &\leq b_0, \quad |r_k| \leq \bar{r} \end{aligned}$$

とおく。 $\bar{\alpha}$ を

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\lambda}_0}{2\bar{A}_0} \cdot \frac{1 - \delta_0^2}{1 + \delta_0^2}$$

のように選び、 λ_0, A_0 を

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \min \{ \bar{\lambda}_0, \bar{\alpha}(1 - \delta_0^2) \}$$

$$A_0 = 3 \max \{ \bar{A}_0, \delta_0 \}$$

とおく。増分 ΔW_k を評価すると次を得る。

$$\begin{aligned} \Delta W_k &= W_{k+1} - W_k \\ &\leq -\|z_k\|^2 \left\{ \lambda_0 - 2\lambda_1 A_0 \left[b_0 \left(\frac{|\phi_k^T \omega_k|}{\|z_k\|} + \frac{\bar{r}}{\|z_k\|} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\|\eta_k^i\|}{\|z_k\|} \right] - 2\lambda_1 \left[b_0 \left(\frac{|\phi_k^T \omega_k|}{\|z_k\|} + \frac{\bar{r}}{\|z_k\|} \right) + \frac{\|\eta_k^i\|}{\|z_k\|} \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

いま、 $N', k' (< 1)$ および ε_0 を次の式

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\leq [-\lambda_1 A_0 b_0 \\ &\quad + \sqrt{(\lambda_1 A_0 b_0)^2 + 2\lambda_1 b_0^2 (\lambda_0 - k' \lambda_1)}] / (4\lambda_1 b_0^2) \\ N' &\geq (b_0 \bar{r} + N_i) / (b_0 \varepsilon_0 - \mu_{c1}) \end{aligned}$$

を満足するような正定数であるとしよう。このとき、

$$k' \lambda_1 \leq \lambda_0 - 4\lambda_1 A_0 b_0 \varepsilon_0 - 8\lambda_1 b_0^2 \varepsilon_0^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Delta W_k &\leq -k' \lambda_1 \|z_k\|^2 \leq -k' W_k \\ \text{if } \|z_k\| &\geq N' \text{ and } |\phi_k^T \omega_k| / \|z_k\| < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

を得る。

ところで、 ϕ_k が有界であるから、状態 z_k はたかだか指数関数的に成長できる。または等価的に前述と同様にして、

$$W_{k+1} \leq (1 + \lambda) W_k, \quad \lambda > 0$$

を得る。以下では、信号が非有界形で成長し得ると仮定すると、これが矛盾に至ることを示す。

ステップ2: 正規化信号 ξ_k と状態 z_k との間には、次の関係

$$c_2 \|\xi_k\| \leq \|z_k\| \leq c_3 \|\xi_k\| \dots \dots \dots (15)$$

が成り立つ(付録参照)。ここに、 c_2, c_3 はある正定数である。いま、

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\xi_k\| = \infty$$

が成り立つと仮定しよう。 $\|\xi_k\|$ はたかだか指数関数的に成長できるから、次を満たすような単調増加な非有界列 $\{k_i\}$ および $\{N_i\}$ が存在する。すなわち、任意の正数 ε および $i \geq i'$ に対して $N_i \geq \Delta_0 / \varepsilon^2$ とし、

$$\begin{aligned} \|\xi_{k_i}\| &= N_i' \\ \|\xi_k\| &\geq N_i', \quad \text{for all } k \in [k_i, k_i + N_i - 1] \end{aligned}$$

または、

$W_{k_i+N'_i-1} \geq \lambda_0 W_{k_i}$
 が成り立つと仮定する。ここに、
 $\lambda_0 = (\lambda_2/\lambda_1)(c_2/c_3)^2$
 である。 Δ_0 は次のようにして与えられる正定数である。すなわち、正定値関数 V_k が有界であるから、式(13)を用いると、次の式

$$\sum_{j=k_i}^{k_i+N'_i-1} \left(\frac{|\varepsilon_j^{(1)}|}{\|\xi_j\|} \right)^2 \leq \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 \sum_{j=k_i}^{k_i+N'_i-1} \eta_j^{(0)} \frac{|\varepsilon_j^{(1)}|}{\|\xi_j\|^2}$$

を満たすようなある正定数 $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$ が存在することがわかる。これより、次の式

$$\sum_{j=k_i}^{k_i+N'_i-1} \left(\frac{|\phi_j^T \zeta_j|}{\|\xi_j\|} \right)^2 \leq \Delta_1 + \Delta_2 \mu N'_i$$

$$\triangleq \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 > 0 \dots\dots\dots (16)$$

を満たすようなある正定数 Δ_1, Δ_2 が存在する。

区間 $T_i \triangleq [k_i, k_i + N'_i - 1]$ を二つの集合 $T_{i1} = \{k \mid \phi_{k+j}^T \zeta_{k+j} / \|\xi_{k+j}\| < \sqrt{\varepsilon}, j=0, 1, \dots, n-m\}$ および $T_{i2} = T_i \setminus T_{i1}$ に分割する。ここで、

$$\frac{|\phi_k^T \omega_k|}{\|\xi_k\|} < \sqrt{\varepsilon'}, \quad k \in T_{i1} \dots\dots\dots (17)$$

を示そう。ここに、 ε' は ε のオーダーのある連続関数である。 $k \in T_{i1}$ のとき $|\phi_k^T \zeta_k| / \|\xi_k\| < \sqrt{\varepsilon}$ であり、また、前述より θ_k は有界である。したがって、 ε を十分小さく選び $\mu \leq \varepsilon$ とし、式(12)を用いると

$$\|\phi_{k+1} - \phi_k\| = 0(\sqrt{\varepsilon}), \quad k \in T_{i1}$$

を得る。 $|f_k| \leq c_f m_k, |y_k| \leq c_y m_k, k \geq 0$ が成り立つことに注意すると、 $m_{k+1}/m_k \leq \bar{c}_m, k \geq 0$ を得る。ここに、 c_f, c_y および \bar{c}_m はある正定数である。また、 $\|\xi_k\| \leq c_g m_k$ が成り立つ。ここに、 c_g はある正定数である。よって、 $\|\xi_{k+1}\| / \|\xi_k\| \leq \bar{c}_g, k \geq 0$ を満たすような正定数 \bar{c}_g が存在する。ここで、次の式

$$\frac{|\phi_k^T \zeta_{k+j}|}{\|\xi_k\|} \leq \sum_{p=0}^{j-1} \|\phi_{k+p} - \phi_{k+p+1}\| \frac{\|\zeta_{k+j}\|}{\|\xi_{k+j}\|}$$

$$\times \prod_{q=0}^{j-1} \frac{\|\xi_{k+q+1}\|}{\|\xi_{k+q}\|} + \frac{|\phi_{k+j}^T \zeta_{k+j}|}{\|\xi_{k+j}\|} \prod_{q=0}^{j-1} \frac{\|\xi_{k+q+1}\|}{\|\xi_{k+q}\|}$$

$$j=0, 1, 2, \dots, n-m$$

が成り立つことに注意すると、次の評価

$$\frac{|\phi_k^T \zeta_{k+j}|}{\|\xi_k\|} = 0(\sqrt{\varepsilon}), \quad k \in T_{i1}$$

$$j=0, 1, 2, \dots, n-m$$

を得る。最後に、 $\zeta_k = W_m(z)\omega_k$ および上の結果を用いると、式(17)を得る。

式(14)のすべての解が大域的に有界であることを示そう。 $\|z_k\| \geq c_2 \|\xi_k\| \geq c_2 N'_i$ および $\{N'_i\}$ が非有界列であるから、 $c_2 \sqrt{\varepsilon'} < \varepsilon_0$ および $c_2 N'_i > N'$ を満たすように ε および N'_i を選ぶことができる。よって、式(17)およびステップ1より ε を十分小さく選ぶことにより、

$$\Delta W_k \leq -k' W_k, \quad k \in T_{i1}$$

が従う。また、次の不等式

$$\Delta W_k \leq \lambda W_k, \quad k \in T_{i2}$$

も成り立つ。いま、集合 T_{i1} および T_{i2} の要素の個数をそれぞれ L_{i1} および L_{i2} と記そう。このとき、

$$W_{k_i+N'_i-1} \leq (1+\lambda)^{L_{i2}} (1-k')^{L_{i1}} W_{k_i}$$

が従う。式(16)より、 $L_{i2} \leq \Delta_0/\varepsilon'$ を得る。したがって、 $L_{i1} \geq N'_i - \Delta_0/\varepsilon'$ を得る。まず、 $1-k' < \alpha < 1$ を満たすように α を選び、次に、 $\varepsilon^2/\varepsilon' < \ln\{\alpha/(1-k')\}/\ln\{(1+\lambda)/(1-k')\}$ を満たすように ε を選ぶ。 c^* を

$$c^* \triangleq \min \left\{ \varepsilon, \frac{b_0 \varepsilon_0}{c_1}, \frac{\varepsilon^2}{\Delta_2}, \frac{\varepsilon'}{\Delta_2} \frac{\ln \frac{\alpha}{1-k'}}{\ln \frac{1+\lambda}{1-k'}} \right\}$$

のように定義しよう。このとき、 N'_i を次の式

$$N'_i \geq \max \left\{ \frac{N'}{c_2}, \frac{\Delta_1}{\varepsilon^2 - \Delta_2 \mu} \right\}$$

を満たすように選び、 ε を十分小さく選ぶことにより、すべての $\mu \in [0, c^*]$ に対して、

$$(1+\lambda)^{L_{i2}} (1-k')^{L_{i1}} \leq \left(\frac{1+\lambda}{1-k'} \right)^{4/\varepsilon'} \alpha^{N'_i} < \lambda_0$$

を得る。したがって、 $W_{k_i+N'_i-1} < \lambda_0 W_{k_i}$ となる。これは、矛盾である。よって、式(14)のすべての解は大域的に有界である。

前提(A4)より線形作用素 A_r は漸近安定であり、上述より制御入力 f_k が有界であることを示せるから、式(4)の第2式より x_k^* は $L^2(\Omega)$ のノルムの意味で大域的に有界となる。 x_k^* はさらに実ヒルベルト空間 V' のノルムの意味でも有界である。以下にこれを示そう。まず、 $-\bar{A}_r$ は解析的半群の生成素であるから、次の式

$$\|\bar{A}_r \exp(-\bar{A}_r T)\| \leq M_1 T^{-1}$$

を満たすような正定数 M_1 が存在⁽¹¹⁾する。この式を用いると、 $k \geq 1$ であれば、次の不等式

$$\|\bar{A}_r A_r^* x_0^*\| \leq M_1 T^{-1} \exp[-\sigma_{n+1}(k-1)T] \|x_0^*\| \dots\dots\dots (18)$$

を得る。次に、 b_r, d_k^* が \bar{A}_r の境界条件を満たすものと仮定すると、 $b_r, d_k^* \in D(\bar{A}_r)$ であることを示せる。実際、 \bar{A}_r^{-1} は有界であるから、

$$b_r = \int_0^T \exp(-\bar{A}_r \tau) \bar{b}_r d\tau$$

$$= \int_0^T \exp(-\bar{A}_r \tau) \bar{A}_r \bar{A}_r^{-1} \bar{b}_r d\tau$$

$$= - \int_0^T \frac{d}{d\tau} \exp(-\bar{A}_r \tau) \bar{A}_r^{-1} \bar{b}_r d\tau$$

$$= [I - \exp(-\bar{A}_r T)] \bar{A}_r^{-1} \bar{b}_r$$

を得る。これより、

$$\|\bar{A}_r b_r\| \leq \|I - \exp(-\bar{A}_r T)\| \|\bar{b}_r\| \leq 2\|\bar{b}_r\|$$

が成り立つ。よって、

$$b_r \in D(\bar{A}_r)$$

を得る。同様にして、

$$d_k^* \in D(\bar{A}_r)$$

を得る。最後に、 $\|x_k\|_{V_r}, k \geq 1$ の有界性を示す。制御入力 f_k が有界であるから、式(4)の第2式および式(18)を用いると、次の不等式

$$\|\bar{A}_r x_k\| \leq M_2, \quad k \geq 1 \dots\dots\dots (19)$$

を満たすようなある正定数 M_2 が存在することがわかる。 $\|x_k\|$ が有界であるから、式(1)および式(19)を用いると、

$$\|x_k\|_{V_r} \leq M_3, \quad k \geq 1$$

を満たすようなある正定数 M_3 が存在する。

以上をまとめると、全信号の大域的有界性について次のように述べる事ができる。

《定理》 k_d が既知であるとする。このとき、すべての $\mu \in [0, c^*]$ に対して、プラント式(2)と有限次元離散時間適応コントローラ式(6), (7), (10)~(12)を合成した閉ループ系の全信号が大域的に有界となるようなある正定数 c^* が存在する。特に、 $k \geq 1$ のとき、 b_r, d_k^* が \bar{A}_r の境界条件を満たすものと仮定すると、 $\|x_k\|_{V_r}$ が有界となる。

5. k_d が未知の場合

k_d が未知のとき、付加的な二つの推定パラメータが導入される必要がある。一つは k_d を推定するもの、もう一つは $1/k_d$ を推定するものである。制御則は

$$f_k = \theta_k^T \omega_k + c_{0k} r_k \dots\dots\dots (20)$$

によって与えられる。ここに、 θ_k は後に述べる式によって生成され、 ω_k は3章で定義されたものと同様である。 c_{0k} は時刻 k における $c_0^* = k_m/k_d$ の推定値である。補助信号 ρ_k および拡張誤差 $\varepsilon_k^{(1)}$ は次の式

$$\rho_k = \theta_k^T \zeta_k - W_m(z) f_k + c_{0k} y_k^m$$

$$\varepsilon_k^{(1)} = y_k - y_k^m + \bar{\psi}_k \rho_k \dots\dots\dots (21)$$

によって生成される。ここに、 $\bar{\psi}_k$ は時刻 k における $\bar{\psi}^* = k_d/k_m$ の推定値で、 ζ_k は3章で与えられたものと同様である。推定値パラメータベクトルを

$$\bar{\theta}_k \triangleq [\theta_k^T \quad c_{0k} \quad \bar{\psi}_k]^T$$

と定義すると、新しい適応則は

$$\bar{\theta}_{k+1} = \bar{\theta}_k - \gamma_1 \frac{\varepsilon_k^{(1)} \bar{\zeta}_k}{\|\bar{\zeta}_k\|^2} - \gamma_2 \frac{|\varepsilon_k^{(1)}| \gamma_k^{(0)}}{\|\bar{\zeta}_k\|^2} \bar{\theta}_k \dots\dots\dots (22)$$

のように選ばれる。ここに、 $\bar{\zeta}_k = [\zeta_k^T \quad y_k^m \quad \rho_k]^T, \bar{\xi}_k = [\zeta_k^T \quad m_k \quad \varepsilon_k^{(1)}]^T, 0 < \gamma_1 < 1.5 \min\{1, k_m/k_d\}, 0 < \gamma_2 < N^{-1} \min\{1, k_d/k_m\} / \max\{1, k_d/k_m\}$ である。

有限次元離散時間適応コントローラは式(20)~(22)で与えられるが、これをプラント式(2)に適用したとき、閉ループ系の全信号の大域的有界性について次の

ように述べる事ができる。まず、拡張誤差は

$$\varepsilon_k^{(1)} = \bar{\psi}^* \bar{\phi}_k^T \bar{\zeta}_k + \eta_k + f_k^e$$

のように表される。ここに、 $\bar{\phi}_k = G(\bar{\theta}_k - \bar{\theta}^*), G = \text{diag}[1, \dots, 1, k_m/k_d], \bar{\theta}^* = [\theta^* \quad c_0^* \quad \bar{\psi}^*]^T$ である。次に、 $\bar{\theta}_k$ の大域的有界性は正定値関数

$$V_k = \bar{\phi}_k^T G^{-1} \bar{\phi}_k + 2 \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_1 c_0^* \left(\frac{|f_j^e|}{\|\bar{\zeta}_j\|} \right)^2$$

を用いて前章と同様にして得られる。最後に、残りの信号の大域的有界性についても前章と同様にして得られる。

6. 数 値 例

ここでは、本手法の有効性を確かめるため数値実験を行う。次のようなプラントを考える。

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = 0.1 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) + \bar{g}(x) f(t) + \exp(x), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$y(t) = 10 \int_0^1 x^2 u(t, x) dx + \sin(2\pi t), \quad t \geq 0$$

$$\text{初期条件: } u_0(x) = x$$

$$\text{境界条件: } \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, 1)}{\partial x} = 0$$

本例では、数値計算のための固有展開の打ち切り次数を10とし、 $\bar{g}(x)$ として次のようなものを与える。

$$\bar{g}(x) = \sum_{i=0}^{10} \bar{g}_i \psi_i(x)$$

$$[\bar{g}_i] = [8.26 \quad 13.3 \quad 14.6 \quad 10^{-2} \quad 10^{-3} \quad \dots \quad 10^{-8}]^T$$

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_i(x) = \sqrt{2} \cos(i-1)\pi x, \quad i \geq 2$$

サンプリング周期を $T=0.1$ 、連続系の dominant part の次数を3に選ぶと、連続系の相対次数が2、離散系の場合が2となった。規範モデルを次のように与える。

$$\frac{y_k^m}{r_k} = \frac{k_m}{z^2 - 1.75z + 0.76}$$

規範入力 r_k は振幅が2、周期が1000である。ここでは、ゲイン k_d が既知で、 $k_d = k_m = 0.0501$ の場合を取扱った。設計パラメータは次のとおりである。

$$F = \text{diag}[-0.95 \quad -0.80], \quad g = [1 \quad 1]^T, \quad N_1 = 10$$

$$\mu = 1.94 \times 10^{-4}, \quad N = 0.5, \quad \delta_0 = 0.95, \quad \delta_1 = 1$$

$$m_0 = 20, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1.98$$

計算結果を図2および図3に示す。図2では、プラント出力 y_k が規範出力 y_k^m に良く追従している様子を示している。図3では、可調整コントローラパラメータベクトルのノルム $\|\theta_k\|$ が有界である様子を示している。入出力外乱の挙動を図4に示す。以上、数値例を用いて本手法の有効性を確かめた。

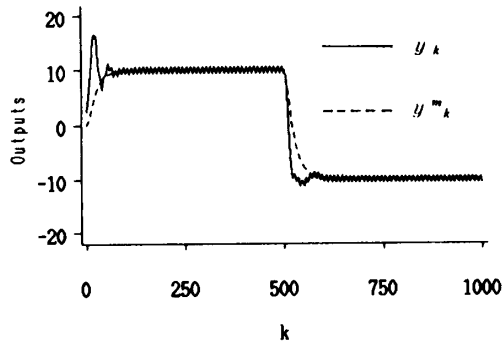
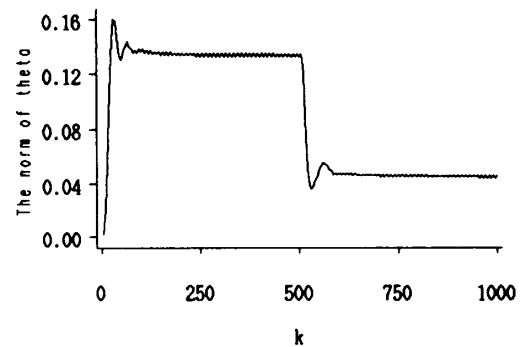


図2 プラントおよび規範モデルの出力応答

図3 $\|\theta_k\|$ の応答

7. 結 言

外乱を伴う放物形分布定数系に対する有限次元離散時間適応制御の設計法について述べた。新しい適応則を提案し、閉ループ系の全信号の大域的有界性が保証された。また、本手法が有効なことを簡単な数値例によって確かめた。

付録 式(15)の誘導

まず、 $c_2\|\xi_k\| \leq \|z_k\|$ は明らかであろう。次に、 $\|z_k\| \leq c_3\|\xi_k\|$ であるが、このためには、 $\|x_k^d\| \leq M_1 m_k$, $M_1 > 0$ を示せば十分である。式(8)を用いると、すべての外乱および初期値による x_k^d への影響は、 $m_k \geq \delta_1/(1 - \delta_0)$, $k \geq 0$ に注意すると、 $M_2 m_k$, $M_2 > 0$ によって抑えられることがわかる。その他の要因による影響を調べよう。このためには、

$$x_{k+1}^d = A_k^d x_k^d + b_d f_k$$

$$y_k = c_k^T x_k^d + c_r x_k^r$$

について調べるとよい。適応観測器でよく知られた非最小表現を用いると、上の系は

$$v_{k+1} = F v_k + g(y_k - c_r x_k^r)$$

$$w_{k+1} = F w_k + g f_k$$

$$y_{k+1}^d = \lambda y_k^d + a^T v_k + b^T w_k + a(y_k - c_r x_k^r) + \beta f_k$$

$$y_k = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] X_k + c_r x_k^r$$

のように書ける。ここに、 $X_k = [y_k^d \ v_k^T \ w_k^T]^T$, 対 (F, g) は3章のものと同じで、 λ は $|\lambda| < 1$ なる定数で3章で述べた δ_0 より小さく選び、 $a, b \in R^{n-1}$, $\alpha, \beta \in R$ である。ある定数行列 C を用いると、

$$x_k^d = C X_k$$

と表せる。これと前述の外乱および初期値の影響を考慮すると、結局、

$$\|x_k^d\| \leq M_1 m_k$$

を得る。

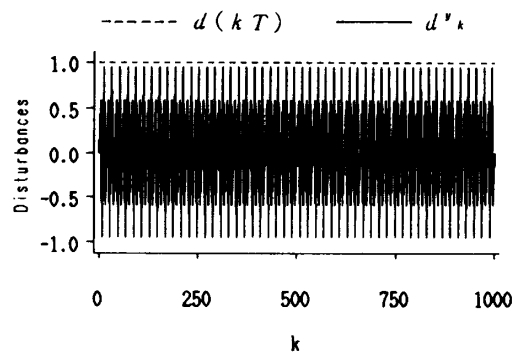


図4 入出力外乱の挙動

文 献

- (1) Sastry, S. S., Model-Reference Adaptive Control-Stability, Parameter Convergence, and Robustness. *IMA J. Math. Control & Inform.*, 1 (1984), 27.
- (2) Ioannou, P. A. and Tsakalis, K. L., A Robust Direct Adaptive Controller. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31-11 (1986), 1033.
- (3) Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M., A New Adaptive Law for Robust Adaptation Without Persistent Excitation. *ibid.*, 32-2 (1987), 134.
- (4) 藤井・水野, 未知確定外乱を考慮した離散時間モデル規範形適応制御. 計自論, 21-9 (1985), 914.
- (5) Ioannou, P. and Tsakalis, K., A Robust Discrete-Time Adaptive Controller. *Proc. 25th IEEE CDC.* (1986), 838.
- (6) Kreisselmeier, G. and Anderson, B. D. O., Robust Model Reference Adaptive Control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31-2 (1986), 127.
- (7) Kobayashi, T., Finite-Dimensional Adaptive Control for Infinite-Dimensional Systems. *Int. J. Control*, 48-1 (1988), 289.
- (8) 田沼, 輸送遅れを含む線形系のモデル規範形適応制御系. 計自論, 15-4 (1979), 458.
- (9) 宮里・北森, 放物型分布定数系のモデル規範型適応制御. 計自論, 21-11 (1985), 1163.
- (10) 島倉, 楕円型偏微分作用素. (1982), 紀伊國屋書店.
- (11) Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, (1984), Springer.
- (12) Narendra, K. S. and Valavani, L. S., Stable Adaptive Controller Design-Direct Control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 23-4 (1978), 570.