

# 503 転がりすべり接触を受ける半無限体の空孔または介在物による応力集中

Stress Concentration due to a Void or Inclusion in a Half-space subjected to Rolling-Sliding Contact

○学 浜中 貴信 (富山大院) 正 五嶋 孝仁 (富山大工) 正 石原 外美 正 清水 理能

Takanobu HAMANAKA, Toyama University, 3190 Gofuku, Toyama-city  
Takahito GOSHIMA, Sotomi ISIHARA, Masayoshi SHIMIZU

The presence of near-surface inclusion or void are known to have detrimental effects on the tribological failure in rolling and sliding contact elements, such as bearings, rollers and rails etc.. This paper deals with the two-dimensional stress analysis in the half-space involved in a void or an rigid inclusion, subjected to the rolling-sliding contact with frictional heating. The complex variable formulation of Muskhelishvili is used to reduce the problem to a Fredholm integral equation. Attention is focused on the stress concentration due to the inclusion or void. The effects of the frictional coefficient and the depth of the inclusion or void on the stress concentration are considered numerically.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Inclusion, Void, Rolling-sliding Contact, Frictional Heating, Thermal Stresses.

## 1. 緒言

軸受や圧延ロール、鉄道のレールなど、材料内部に存在する介在物や空孔がトライボロジー損傷の原因となることが多い。そこで本研究では、摩擦熱を伴う転がりすべり接触を受ける半無限体内部に円形剛体介在物または円柱状空孔が存在する場合についての応力解析を行い、摩擦係数や空孔、介在物の深さが応力集中に及ぼす影響を数値的に検討した。

## 2. 解析モデルと境界条件

解析モデルと座標系を図1に示す。以下の解析では、次に示すように、接触半幅  $c$  を基準とした無次元変数を採用する。

$$(x, y) = (\bar{x}/c, \bar{y}/c), (r, \theta) = (\bar{r}/c, \theta) \quad d = \bar{d}/c, \quad e = \bar{e}/c, \\ a = \bar{a}/c, \quad Pe = Vc/\kappa_1, \quad S_r = V_s/V, \quad Q(x) = Q_1(\bar{x})/Q_0, \\ P(x) = P_1(\bar{x})/P_0, \quad H_0 = 2\alpha_0 G_0 \kappa_1 (1-\nu)/(K_1(1+\nu))$$

ここで、 $V$  はローラーの転がり移動速度、 $V_s$  はローラーのすべり速度、 $f$  は摩擦係数、 $G_0$  は横弾性係数、 $\nu$  はポアソン比、 $\alpha_0$  は線膨張係数、 $\kappa_1$  は温度伝導率、 $K_1$  は熱伝導率、 $Q_1(\bar{x})$  は接触領域における熱流入、 $P_0$  はヘルツの最大接触圧力を表す。なお、 $P_1$  はベクレ数、 $S_r$  はすべり率である。

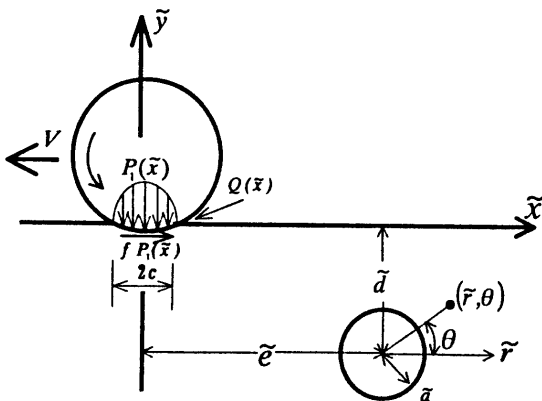


Fig.1 Geometry and coordinate system

転がり接触を接触圧力  $P_1(\bar{x})$  と摩擦力  $fP_1(\bar{x})$  でモデル化する。このとき発生する摩擦熱  $Q_1(\bar{x})$  は、次式で与えられる。

$$Q_1(\bar{x}) = fV_s P_1(\bar{x}) = fV_s P_0 P(x) = fVS_r P_0 P(x) \quad (1)$$

半無限体表面の接触領域において上記の摩擦熱が生じ、非接触領域においては断熱とし、介在物または空孔による温度場のかく乱を無視できるものと仮定する。このとき熱的境界条件並びに力学的境界条件は以下の式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \begin{cases} fcV_s P_0 P(x)/K_1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$(T)_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (3)$$

$$\left(\sigma_{yy}\right)_{y=0} = \begin{cases} -P_0 P(x), & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (4)$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_{y=0} = \begin{cases} fP_0 P(x), & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\left(\sigma_{pq}\right)_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (p, q = x, y) \quad (6)$$

とくに、円形剛体介在物の場合の境界条件は、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_{x_1} + iv_{y_1}) = -ia\epsilon_0 e^{i\theta} \quad |z_1 - z_0| = a \quad (7-1)$$

となり、空孔の場合は次式の境界条件が与えられる。

$$\sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} = 0 \quad |z_2 - z_1| = a \quad (7-2)$$

## 3. 応力解析

求める応力場  $\sigma_{ij}$  は、介在物または空孔のない半無限体の応力  $\sigma_{ij}^0$  と介在物による応力場または空孔のかく乱  $\sigma_{ij}^1$  を次式のように重ね合わせることで求めることができる。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \quad (i, j = x, y \text{ or } r, \theta) \quad (8)$$

ここで  $\sigma_{ij}^0$  は、移動熱源による熱応力  $\sigma_{ij}^T$  と機械的接触荷重による応力  $\sigma_{ij}^P$  の和として表せる。熱応力は熱的境界条件式 (2), (3) を満足するように温度を求めた後、表面応力自由の境界条件を満足するように熱弾性基礎式を解けば閉じた形で求まる。例えば  $x$  方向の熱応力成分は次式で与えられる。

$$\frac{\sigma_{xx}^T}{P_0} = H_0 Pe Sr \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \bar{Q} \left( \frac{2\xi^2}{Pe y^2} \right) \frac{2\sqrt{2}e^{-\xi}}{(-y) \sqrt{\left( \frac{2\xi^2}{Pe y^2} \right)^2 + Pe^2}} \cos\left(\theta_1 - \xi - \frac{2\xi^2}{Pe y^2} x + \frac{\pi}{4}\right) d\xi \\ + \int_0^{\infty} \bar{Q} \left( -\frac{\eta}{y} \right) \frac{e^{-\eta}}{y \sqrt{\left( \frac{\eta}{y} \right)^2 + Pe^2}} \left[ \frac{\eta(1-\eta)}{y} \cos\left(\theta_2 + \frac{\eta}{y} x - \frac{\pi}{4}\right) + (2-\eta) \cos\left(\theta_2 + \frac{\eta}{y} x\right) \right] d\eta \quad (9)$$

機械的接触荷重による応力は、境界条件式 (4), (5), (6) を満足するように、Muskhelishvili の複素応力関数  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  を使い、Cauchy 積分を利用して次式により容易に求められる。

$$\frac{\sigma_{rr}^P + i\tau_{r\theta}^P}{P_0} = \Phi_2(z_2) + \overline{\Phi_2(z_2)} - e^{-2i\theta} \left\{ z_2 \Phi_2'(z_2) + \overline{\Psi_2(z_2)} \right\} \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}^P + i\tau_{r\theta}^P}{P_0} = \Phi_2(z_2) + \overline{\Phi_2(z_2)} + e^{-2i\theta} \left\{ z_2 \Phi_2'(z_2) + \overline{\Psi_2(z_2)} \right\}$$

また介在物または空孔による応力場のかく乱  $\sigma_{ij}^1$  は剛体介

在物表面の変位の未知量を  $q(t)$ , 空孔表面の応力の未知量を  $p(t)$  とし, 半無限体表面応力自由の境界条件を満足するように, 必要な応力補解を追加して求めることができる<sup>1)</sup>. 求められた変位および応力の式を境界条件式(7-1), (7-2)に代入することにより  $q(t)$ ,  $p(t)$ に関する次の積分方程式が得られる.

$$-2\mu \left( \frac{\partial u^0}{\partial \theta} + i \frac{\partial v^0}{\partial \theta} \right) = -2\pi\kappa s q(t) + \int_0^{2\pi} q(t) K_a(s, t) i t d\theta_0 \quad (11)$$

$$-\int_0^{2\pi} \overline{q(t)} K_b(s, t) i t d\theta_0 - (\sigma_r^0 + i\tau_{r\theta}^0) = -2\pi p(s) + \int_0^{2\pi} p(t) K_{p1}^0(s, t) i t d\theta_0 + \int_0^{2\pi} \overline{p(t)} K_{p2}^0(s, t) i t d\theta_0 \quad (12)$$

ここで  $t = ae^{i\theta}$ ,  $s = re^{i\theta}$  である.

積分方程式の解を数値的に求めるために, 積分区間を等分割し節点を決め, 任意に選点を選ぶ. このとき, 積分方程式は離散化することにより  $q(t)$ ,  $p(t)$ に関する連立一次方程式に帰着される. これを数値的に解けば,  $q(t)$ ,  $p(t)$ が求まり, 介在物及び空孔による応力場のかく乱  $\sigma_{ij}^1$ が求まる. これを式(9), (10)とともに式(8)に代入し, 座標変換することにより介在物または空孔を含む応力場を求めることができる.

#### 4. 介在物及び空孔周りの応力分布の数値結果

半無限体内部に円形剛体介在物及び空孔が存在する場合について, 介在物表面の応力分布を図 2(a-c)に示し, 空孔表面の応力分布を Fig.2(d)に示す. なお数値計算例として介在物及び空孔の無次元半径  $a = 0.2$ , ベクレ数  $P_c = 100$ , ポアソン比  $\nu = 0.3$ , トライボロジー定数  $H_0 = 1.0$  として計算した.

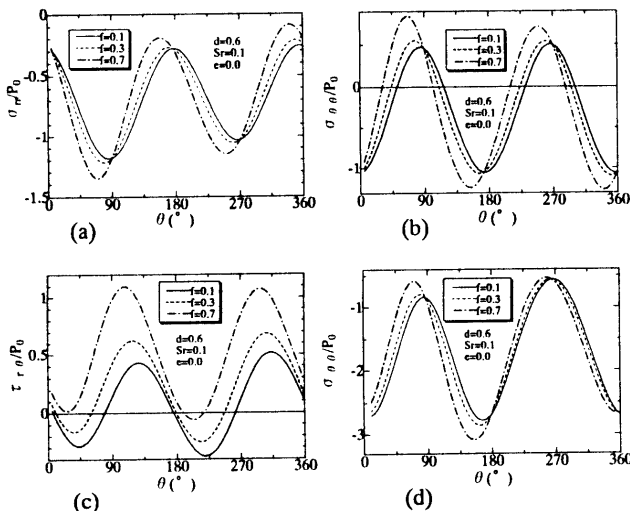


Fig.2 Variation of the stresses on the inclusion interface(a-c) or void surface (d) with  $\theta$

次に, 介在物周辺の水平軸上( $\theta=0^\circ, 180^\circ$ )の  $x$  および  $y$  方向応力分布を Fig.3 に, せん断応力分布を Fig.4 に示す.

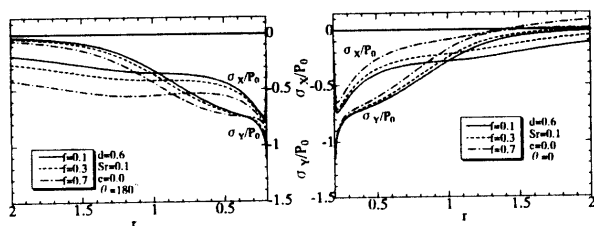


Fig.3 Variation of  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  on the horizontal  $r$ -axis for an inclusion

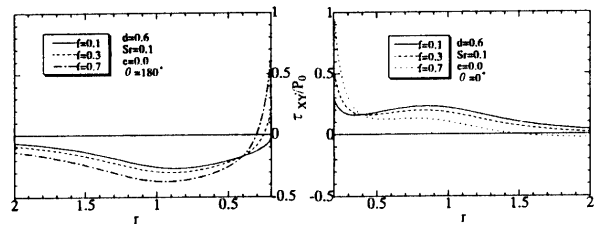


Fig.4 Variation of  $\tau_{xy}$  on the horizontal  $r$ -axis for an inclusion

また, 空孔周辺の水平軸上( $\theta=0^\circ, 180^\circ$ )の  $x$  および  $y$  方向応力分布を Fig.5 に, せん断応力分布を Fig.6 に示す.

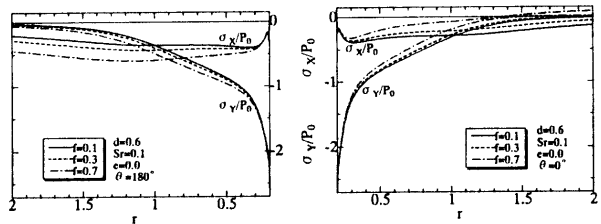


Fig.5 Distribution of  $\sigma_x, \sigma_y$  on the horizontal  $r$ -axis for a void

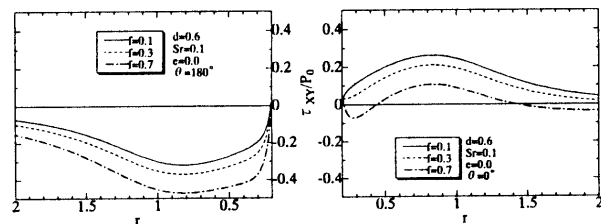


Fig.6 Distribution of  $\tau_{xy}$  on the horizontal  $r$ -axis for a void

最後に, 上下頂点近傍の円周方向応力について, 介在物または空孔深さによる変化を Fig.7 に示す.

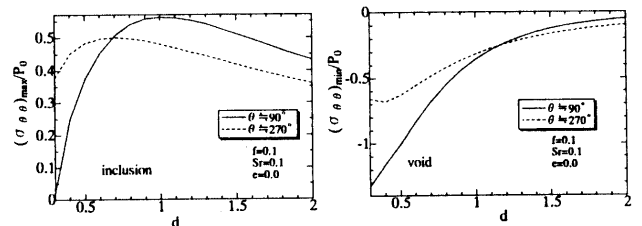


Fig.7 Variation of  $\sigma_{\theta\theta}$  with the depth of the inclusion of the void

#### 5. 結言

- (1) 介在物の上下頂点近傍では円周方向に引張応力が生じ, 同点での半径方向圧縮応力とせん断応力も急激に大きくなり, これらの値は摩擦係数の増加とともに大きくなる. 一方, 空孔表面ではすべて圧縮応力となり左右頂点近傍で最大となり, その値は介在物の場合よりも大きい.
- (2) 介在物または空孔付近で水平軸上の応力は急激に大きくなり応力集中が見られるが, 特に空孔の場合の応力集中が著しい. また摩擦係数が大きくなるにしたがって, 特に介在物近傍のせん断応力の応力集中が著しくなる.
- (3) 空孔が浅くなるにしたがって, 空孔表面の圧縮応力は単調に増加するが, 介在物上下頂点近傍の引張応力は, 介在物が浅くなるにしたがって, ある深さ ( $d \approx 1$ ) でピークを示し, 以後急激に減少する.

#### 文献

- 1) Miller and Keer, Trans. ASME J.Appl. Mech., 50 (1983),615.