

基本荷重下でのだ円孔を有する異方性の  
平板曲げ問題の解析解と数値計算例\*高野 登<sup>\*1</sup>, 池田 直樹<sup>\*2</sup>  
平島 健一<sup>\*3</sup>, 能登谷 久公<sup>\*1</sup>Analytical Solutions and Numerical Examples for Anisotropic Bending  
Problems with Elliptic Hole or Rigid Inclusion under Singular LoadsNoboru TAKANO<sup>\*4</sup>, Naoki IKEDA,  
Ken-ichi HIRASHIMA and Hisakimi NOTOYA<sup>\*4</sup> Mechanical and Intellectual Systems Engineering, Toyama University,  
3190 Gofuku, Toyama-shi, Toyama, 930-8555 Japan

This paper presents a unified analysis of plate bending problems due to classical plate theory containing an elliptic hole or elliptic inclusion under singular point moments and point discrepancies of deflection and slope as well as applied moments and torque at infinity. The analogies existing between the mathematical formulations of transverse bending of elastic plates and two-dimensional stress problems are used for analytical treatments. Some numerical examples are shown in graphic representation.

**Key Words:** Anisotropic Plate, Point Moments, Point Discrepancies, Singular Loads, Elliptic Hole, Dipole Type Singular Loads, Analytical Solutions

## 1. 結 言

著者らの既発表論文<sup>(1)~(7)</sup>では、孔を有する弾性体に関する諸問題に対して閉じた型の一般的な解析解を誘導するとともに、統一的な視点に立ったまとめがなされている。その内の第4報<sup>(4)</sup>においては、等方性および異方性の平板曲げ問題に対する基礎理論といくつかの基本解が示されている。また第7報<sup>(7)</sup>では、だ円形孔を有する等方性の平板曲げ問題に焦点を当て、基本的な特異項荷重を含めた荷重下での基礎理論とそれらの基本解を誘導するとともに、それらの数値計算例を示した。

本論文では、平板曲げ問題を対象として、だ円形の境界を有する異方性平板の有限位置に作用する Dipole 型も含めた特異項荷重の解析解を求めるとともに、いくつかの数値計算例を提示し、断面力の挙動特性について検討を行った。なお、最近 Ting<sup>(9)</sup>によって異方性体問題に関する総合報告的な著書が発行されたが、平板曲げ問題については触れられていない。

## 2. 異方性の平板曲げ問題における基本解

基礎関係式については著者らの論文の第4報<sup>(4)</sup>に示してあるので、以下ではいくつかの種類の平板曲げの荷重が作用する場合の解析解を導出する。

**2.1 特異項荷重が作用する問題** 図1に示すように、境界Lを含む平板の外部領域の任意点 $z_0$ に特異項

荷重が作用する問題を考える。ここで特異項荷重とは、任意の載荷点の特異点となり、その点のまわりに一周することで食違いが生ずる荷重を意味する。異方性の場合、広義の食違い項が作用する問題の解は次の関数で与えられる。

$$f_k(z_k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{H_k^m}{2\pi} (\zeta_k - b_k) \ln(\zeta_k - b_k). \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 $b_k$ は論文<sup>(4)</sup>の式(46)中の $\zeta_k$ の代わりに $b_k$ を代入することにより次式から求められる。

$$z_0 + \gamma_k \bar{z}_0 = R_0(1 + m\gamma_k)b_k + (m + \gamma_k)/b_k. \quad \dots\dots(2)$$

これより、 $b_k$ は次式となる。

$$b_k = \frac{1}{2R_0(1 + m\gamma_k)} \left\{ (z_0 + \gamma_k \bar{z}_0) + \sqrt{(z_0 + \gamma_k \bar{z}_0)^2 - 4R_0^2(1 + m\gamma_k)(m + \gamma_k)} \right\} \quad \dots\dots(3)$$

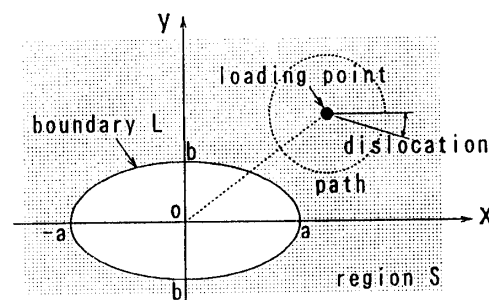


Fig.1 Model of anisotropic plate under singular force.

\* 原稿受付 2000年8月31日。

<sup>\*1</sup> 正員, 富山大学工学部(☎930-8555 富山市五福3190)。

<sup>\*2</sup> 金沢大学大学院(☎920-1192 金沢市角間町)。

<sup>\*3</sup> 正員, 山梨大学工学部(☎400-0016 甲府市武田4-3-11)。

E-mail: takano@eng.toyama-u.ac.jp

ここに、 $H_k^m$ は荷重条件から決定される複素係数で、上添字  $m$  は  $z_k$  の  $m$  次の係数である。

この広義の食違い式を用いて、以下に示す各荷重条件に対する解析解を求めることができる。

**2.1.1 集中モーメント、たわみ角の食違いなどが作用する場合** 境界内の任意の有限位置  $z_0$  に集中モーメント  $m_x$ ,  $m_y$ , たわみ角の食違い  $[w_x]$ ,  $[w_y]$  が作用 (発生) する場合を考える。このときの解析関数  $f_{k0}(\zeta_k)$  は次のように設定できる。

$$f_{k0}(\zeta_k) = \frac{H_k}{2\pi} \ln\{\omega'_k(b_k)(\zeta_k - b_k)\}. \quad \dots\dots(4)$$

上式中の  $\omega'_k(b_k)$  はだ円孔の写像関数  $\omega_k(\zeta_k)$  を  $\zeta_k$  で微分したものに特定点  $b_k$  を代入したものであり、また  $H_k$  は以下の荷重条件で決定される複素係数である。

$$\begin{pmatrix} 1 + \gamma_1 & -1 - \bar{\gamma}_1 & 1 + \gamma_2 & -1 - \bar{\gamma}_2 \\ 1 - \gamma_1 & 1 - \bar{\gamma}_1 & 1 - \gamma_2 & 1 - \bar{\gamma}_2 \\ \lambda_1 + \bar{\mu}_1 & -\bar{\lambda}_1 - \mu_1 & \lambda_2 + \bar{\mu}_2 & -\bar{\lambda}_2 - \mu_2 \\ \lambda_1 - \bar{\mu}_1 & \bar{\lambda}_1 - \mu_1 & \lambda_2 - \bar{\mu}_2 & \bar{\lambda}_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1 \\ \bar{H}_1 \\ H_2 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i[w_x] \\ -[w_y] \\ 2im_x/I_0 \\ -2m_y/I_0 \end{pmatrix}. \quad \dots\dots(5)$$

ここに、 $I_0$  は単位幅当たりの断面二次モーメントで、 $I_0 = h^3/12$  である。

**2.1.2 集中力が作用する場合** 集中力  $P_z$  が領域内の任意点  $z_0$  に作用する場合を考える。ここで、Mossakowski により与えられた半無限体に作用する集中力の複素関数<sup>(8)</sup>をもとに、だ円境界を有する無限平板に関する解析関数  $f_{k0}(\zeta_k)$  を以下のように設定する。

$$f_{k0}(\zeta_k) = \frac{G_k}{2\pi} \omega'_k(b_k)(\zeta_k - b_k) \ln\{\omega'_k(b_k)(\zeta_k - b_k)\} + \frac{H_k}{2\pi} \ln\{\omega'_k(b_k)(\zeta_k - b_k)\}. \quad \dots\dots(6)$$

ここに、 $b_k$  は荷重の作用点  $z_0 = x_0 + iy_0$  に対応する  $\zeta_k$  平面での写像点である。

また、上式中の  $G_k$  および  $H_k$  は次の4元連立1次方程式から求められる。

$$\begin{pmatrix} (1 + \gamma_1)^2 & -(1 + \bar{\gamma}_1)^2 & (1 + \gamma_2)^2 & -(1 + \bar{\gamma}_2)^2 \\ 1 - \gamma_1^2 & 1 - \bar{\gamma}_1^2 & 1 - \gamma_2^2 & 1 - \bar{\gamma}_2^2 \\ (1 - \gamma_1)^2 & -(1 - \bar{\gamma}_1)^2 & (1 - \gamma_2)^2 & -(1 - \bar{\gamma}_2)^2 \\ m_1 & \bar{m}_1 & m_2 & \bar{m}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_1 \\ \bar{G}_1 \\ G_2 \\ \bar{G}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\kappa_x \\ -\kappa_{xy} \\ i\kappa_y \\ -P_z/2I_0 \end{pmatrix}. \quad \dots\dots(7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \gamma_1 & -1 - \bar{\gamma}_1 & 1 + \gamma_2 \\ 1 - \gamma_1 & 1 - \bar{\gamma}_1 & 1 - \gamma_2 \\ \frac{C_{22}^{11}}{\gamma_1} + C_{11}^{22}\gamma_1^2 & -\frac{\bar{C}_{22}^{11}}{\bar{\gamma}_1} - \bar{C}_{11}^{22}\bar{\gamma}_1^2 & \frac{C_{22}^{11}}{\gamma_2} + C_{11}^{22}\gamma_2^2 \\ \frac{C_{22}^{11}}{\gamma_1} - C_{11}^{22}\gamma_1^2 & \frac{\bar{C}_{22}^{11}}{\bar{\gamma}_1} - \bar{C}_{11}^{22}\bar{\gamma}_1^2 & \frac{C_{22}^{11}}{\gamma_2} - C_{11}^{22}\gamma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ \bar{H}_1 \\ H_2 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i[w_x] \\ -[w_y] \\ -iy_0P_z/I_0 \\ -x_0P_z/I_0 \end{pmatrix}. \quad \dots\dots(8)$$

なお、複素係数  $H_k$  は楕円形空孔または楕円形剛体介在物の中心からの集中力の偏心による曲げモーメントを規定するものであるから、 $H_k$  の項を考慮することはせん断力に合モーメントを重ね合わせることになり、純粋に集中力のみを扱う場合には  $H_k$  は必要ではなくなる。

**2.2 Dipole 型の特異項荷重が作用する問題** 図2に示すように、 $z_0$  の点に集中モーメントが作用し、それより微小距離離れた位置  $z_0 + \Delta z_0$  に  $z_0$  のものに対向する特異項が同時に作用する場合を考える。このとき式(2)で現れた  $b_k$  の代わりに  $\zeta_{k0}$  に置き換えることにする。すなわち、

$$z_{k0} = r_0(1 + m\gamma_k)\zeta_{k0} + (m + \gamma_k)/\zeta_{k0}. \quad \dots\dots(9)$$

ところで、図2より  $\Delta z_0 = \epsilon e^{i\delta_0}$ ,  $\Delta \bar{z}_0 = \epsilon e^{-i\delta_0}$  であるから、

$$\Delta \zeta_{k0} = \epsilon d \zeta_{k0}, \quad \Delta \bar{\zeta}_{k0} = \epsilon d \bar{\zeta}_{k0}. \quad \dots\dots(10)$$

ここに、

$$d \zeta_{k0} = \frac{e^{i\delta_0} + \gamma_k e^{-i\delta_0}}{\omega'_k(\zeta_{k0})}. \quad \dots\dots(11)$$

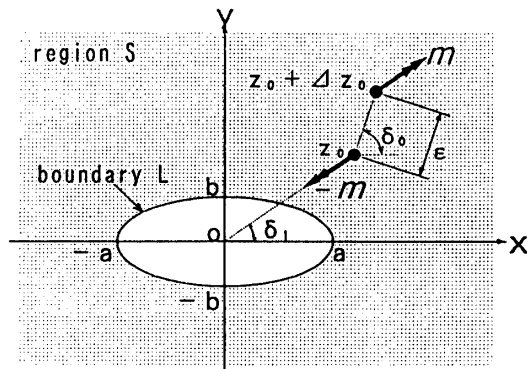


Fig.2 Model of loads with dipole.

この場合の複素関数  $f_k$  は物理平面上の荷重作用点位置に対応する写像点  $\zeta_{k0}$ ,  $\bar{\zeta}_{k0}$  の関数でもあることから、次のように書き表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(\zeta_1; \zeta_{10}, \bar{\zeta}_{k0}) &= f_{10}(\zeta_1, \zeta_{10}) \\ &+ C_1 \bar{f}_{10} \left( \frac{1}{\zeta_1}, \bar{\zeta}_{10} \right) + C_2 \bar{f}_{20} \left( \frac{1}{\zeta_1}, \bar{\zeta}_{20} \right), \\ f_2(\zeta_2; \zeta_{20}, \bar{\zeta}_{k0}) &= f_{20}(\zeta_2, \zeta_{20}) \\ &+ C_3 \bar{f}_{10} \left( \frac{1}{\zeta_2}, \bar{\zeta}_{10} \right) + C_4 \bar{f}_{20} \left( \frac{1}{\zeta_2}, \bar{\zeta}_{20} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} f_{k0}(\zeta_k, \zeta_{k0}) &= \frac{H_k}{2\pi} \ln \left\{ \omega'_k(\zeta_{k0})(\zeta_k - \zeta_{k0}) \right\}, \\ \bar{f}_{k0}(\zeta_k, \zeta_{k0}) &= \frac{\bar{H}_k}{2\pi} \ln \left\{ \bar{\omega}'_k(\bar{\zeta}_{k0}) \left( \frac{1}{\zeta_k} - \bar{\zeta}_{k0} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

上式中の係数  $C_1 \sim C_4$  は、境界条件によって決定されるものである。

以上の準備を踏えて、集中モーメント対  $m_x^*$ ,  $m_y^*$  に対する解析関数  $F_k(\zeta_k)$  は次のように定義される。

$$F_k(\zeta_k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial f_k}{\partial \zeta_{k0}} \Delta \zeta_{k0} + \frac{\partial f_k}{\partial \bar{\zeta}_{10}} \Delta \bar{\zeta}_{10} + \frac{\partial f_k}{\partial \bar{\zeta}_{20}} \Delta \bar{\zeta}_{20} \right) \quad \dots \dots (14)$$

上式に式(10)および(12)を代入し整理すると次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta_1) &= \frac{H_1^*}{2\pi} \frac{\omega_1''(\zeta_{10})(\zeta_1 - \zeta_{10}) - \omega_1'(\zeta_{10}) d\zeta_{10}}{\omega_1'(\zeta_{10})(\zeta_1 - \zeta_{10})} \\ &+ C_1 \frac{\bar{H}_1^*}{2\pi} \frac{\bar{\omega}_1''(\bar{\zeta}_{10}) \left( \frac{1}{\zeta_1} - \bar{\zeta}_{10} \right) - \bar{\omega}_1'(\bar{\zeta}_{10}) d\bar{\zeta}_{10}}{\bar{\omega}_1'(\bar{\zeta}_{10}) \left( \frac{1}{\zeta_1} - \bar{\zeta}_{10} \right)} \\ &+ C_2 \frac{\bar{H}_2^*}{2\pi} \frac{\bar{\omega}_2''(\bar{\zeta}_{20}) \left( \frac{1}{\zeta_1} - \bar{\zeta}_{20} \right) - \bar{\omega}_2'(\bar{\zeta}_{20}) d\bar{\zeta}_{20}}{\bar{\omega}_2'(\bar{\zeta}_{20}) \left( \frac{1}{\zeta_1} - \bar{\zeta}_{20} \right)}, \\ F_2(\zeta_2) &= \frac{H_2^*}{2\pi} \frac{\omega_2''(\zeta_{20})(\zeta_2 - \zeta_{20}) - \omega_2'(\zeta_{20}) d\zeta_{20}}{\omega_2'(\zeta_{20})(\zeta_2 - \zeta_{20})} \\ &+ C_3 \frac{\bar{H}_1^*}{2\pi} \frac{\bar{\omega}_1''(\bar{\zeta}_{10}) \left( \frac{1}{\zeta_2} - \bar{\zeta}_{10} \right) - \bar{\omega}_1'(\bar{\zeta}_{10}) d\bar{\zeta}_{10}}{\bar{\omega}_1'(\bar{\zeta}_{10}) \left( \frac{1}{\zeta_2} - \bar{\zeta}_{10} \right)} \\ &+ C_4 \frac{\bar{H}_2^*}{2\pi} \frac{\bar{\omega}_2''(\bar{\zeta}_{20}) \left( \frac{1}{\zeta_2} - \bar{\zeta}_{20} \right) - \bar{\omega}_2'(\bar{\zeta}_{20}) d\bar{\zeta}_{20}}{\bar{\omega}_2'(\bar{\zeta}_{20}) \left( \frac{1}{\zeta_2} - \bar{\zeta}_{20} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (15)$$

$H_k^*$  は次の連立方程式を解くことにより決定される。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \bar{\mu}_1 & -\bar{\lambda}_1 - \mu_1 & \lambda_2 + \bar{\mu}_2 & -\bar{\lambda}_2 - \mu_2 \\ \lambda_1 - \bar{\mu}_1 & \bar{\lambda}_1 - \mu_1 & \lambda_2 - \bar{\mu}_2 & \bar{\lambda}_2 - \mu_2 \\ 1 + \gamma_1 & -1 - \bar{\gamma}_1 & 1 + \gamma_2 & -1 - \bar{\gamma}_2 \\ 1 - \gamma_1 & 1 - \bar{\gamma}_1 & 1 - \gamma_2 & 1 - \bar{\gamma}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1^* \\ \bar{H}_1^* \\ H_2^* \\ \bar{H}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2im_x^*/I_0 \\ -2m_y^*/I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \dots (16)$$

ここに、

$$m_x^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon m_x), \quad m_y^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon m_y). \quad \dots \dots (17)$$

### 3. 数値計算例

#### 3.1 異方性パラメータの設定

異方性材料を取り扱う場合に問題となるのは、異方性パラメータの組み合わせが無限に存在するため、選定した材料定数が物理現象を表すのに適切でない場合がある。加えて妥当な数値を用いた場合でも、異方性平板のたわみに関する代数方程式から得られる特性根やそれを用いて表される断面力等の挙動は場合によっては不安定となることがあるため、得られた結果が局所的に乱れるような状況も生じてくる。したがって計算結果の乱れの原因を明確にして数値計算をスムーズに行うために、異方性パラメータの制約条件を明らかにしておくことが必要である。

以上の論議と利便性を考慮して、以下のような材料定数を用いることとする。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 1.0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2 \quad (9.8 \text{ GPa}), \\ \nu_{12} &= 0.25, \\ e &= \frac{E_2}{E_1}, \\ \frac{1}{G_{12}} &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1}. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (18)$$

#### 3.2 特異項荷重下の断面力

前節で扱った特異項荷重に関する数値計算を行い、その代表的な断面力についての計算結果を以下に示す。

なお、平板曲げに対する異方性の特異項荷重についての研究結果はほとんど見当たらないことから、ここでの計算結果の検証は、等方性への縮退と境界条件によった。

##### 3.2.1 集中モーメントが作用する場合

図3に示すように、領域の任意の有限位置  $z_0$  に集中モーメント  $m_x$ ,  $m_y$  が作用する場合を考える。このとき荷重条件を規定する複素関数  $H_k$  は、 $m_x$  および  $m_y$  のそれぞれに

対して以下のような値をとる.

$$\left. \begin{aligned} m_x: & \quad H_1 = (-0.159 \times 10^{-3}, -0.123 \times 10^{-4}), \\ & \quad H_2 = (0.159 \times 10^{-3}, -0.123 \times 10^{-4}). \\ m_y: & \quad H_1 = (-0.873 \times 10^{-5}, -0.134 \times 10^{-3}), \\ & \quad H_2 = (-0.873 \times 10^{-5}, 0.134 \times 10^{-3}). \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

図4は、 $z_0(2a, 0)$ に集中モーメント  $m_x$  が作用した場合の曲げモーメント  $M_\xi$  の分布を示している。断面力是对称的に発生するから、 $x$  軸上側にだ円孔の自由境界、下側に剛体境界の場合を示している。この図よりまず、自由端での境界条件のひとつである  $M_\xi = 0$  を満足していることが確認される。載荷点の反対側のだ円の頂点では、自由境界の場合は全く断面力の集中が観察されないが、剛体境界では断面力が集中している点が異なる。しかしながら、その他の領域での分布状態は、境界条件によらず類似していることが認められる。

図5は、 $z_0(2a, 0)$ に集中モーメント  $m_y$  が作用した場合の曲げモーメント  $M_\xi$  の分布を示している。剛体境界の場合、 $m_x$  を作用させたときよりもかなりだ円境界の頂点で断面力が集中しているのがわかる。また、双方の境界とも、載荷点の右側で比較的大きな断面力を保持した領域が存在することが観察される。

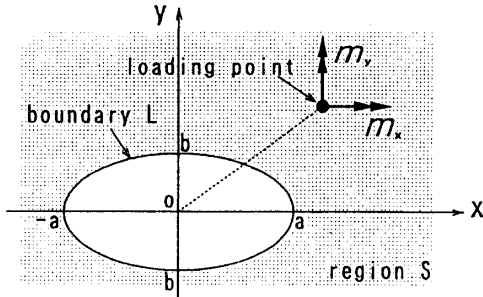


Fig.3 Anisotropic plate under concentrated moment  $m_x, m_y$  at arbitrary point.

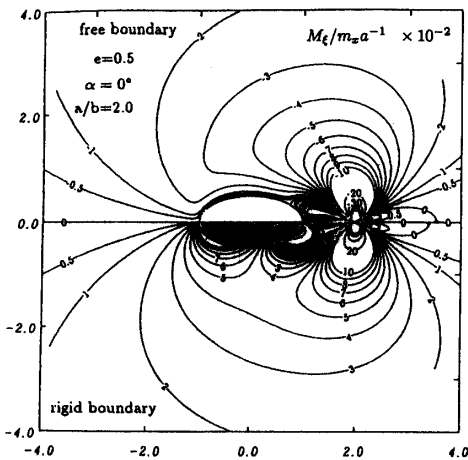


Fig.4 Distribution of bending moment  $M_\xi$  under concentrated moment  $m_x$  at point  $(2a, 0)$ .

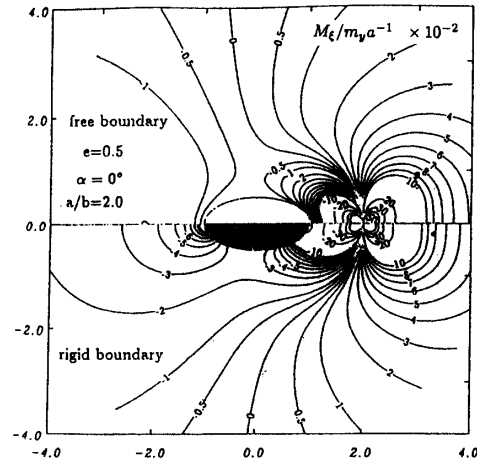


Fig.5 Distribution of bending moment  $M_\xi$  under concentrated moment  $m_y$  at point  $(2a, 0)$ .

3.2.2 たわみ角の食違いが作用する場合 図6に示すように、領域  $S$  の任意の有限位置  $z_0$  にたわみ角の食違い  $[w_x, [w_y]$  が作用する場合を考える。このとき荷重条件を規定する複素関数  $H_k$  は次のような値をとる。

$$\left. \begin{aligned} [w_x]: & \quad H_1 = (0.779, -0.213), \\ & \quad H_2 = (0.779, -0.213). \\ [w_y]: & \quad H_1 = (-0.187, 0.653), \\ & \quad H_2 = (-0.187, -0.653). \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

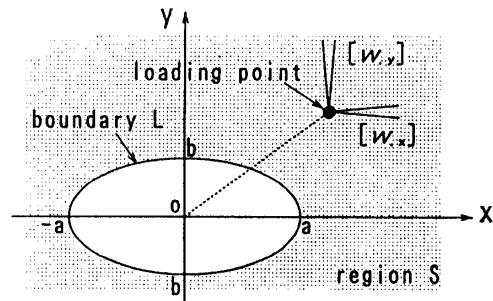


Fig.6 Anisotropic plate under slope dislocation  $[w_x], [w_y]$  at arbitrary point.

図7は、 $z_0(2a, 0)$ にたわみ角の食違い  $[w_x]$  が作用した場合の曲げモーメント  $M_\xi$  の分布を示している。前節同様、 $x$  軸上側に自由境界、下側に剛体境界の場合を示している。まず、自由境界の一つである  $M_\xi$  が境界上で0になることが確認できる。また、自由境界では載荷点の反対側領域ではほとんど断面力が発生していないのに対し、剛体境界では自由境界の場合の約10倍程度の断面力が発生しており、その特性は弾性係数比  $e = E_2/E_1$  にあまり依存しないことが確認されている。

両境界とも、載荷点近傍の分布はかなり似たものとなっているが、これは実軸の正方向はだ円境界の影響

を受けにくいとめと考えられる。また、弾性係数比を小さくすると、発生する断面力およびその領域が縮小することも確認されている。

図8は、 $z_0(2a, 0)$ にたわみ角の食違い $[w, y]$ が作用した場合の曲げモーメント $M_\xi$ の分布を示している。自由境界をもつ場合、境界上で $M_\xi = 0$ でなければならないことから、境界付近での $M_\xi$ の分布状態は異なっているが、境界条件にかかわらずかなり類似した分布になることがわかる。しかし剛体境界の場合、だ円頂点での断面力集中はかなり高い値をとることになる。

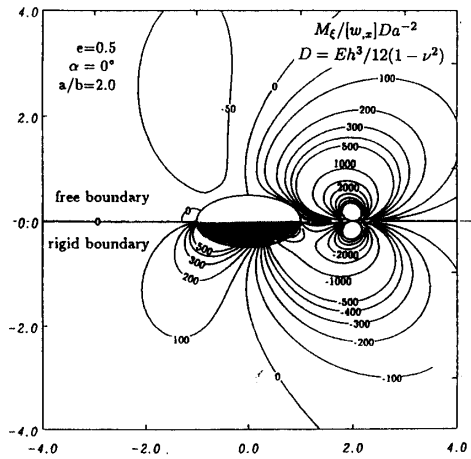


Fig.7 Distribution of bending moment  $M_\xi$  under slope dislocation  $[w, x]$  at point  $(2a, 0)$ .

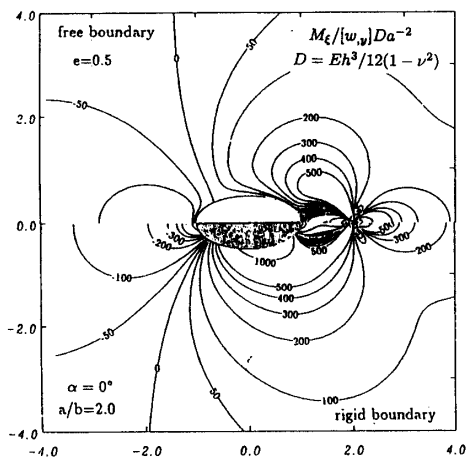


Fig.8 Distribution of bending moment  $M_\xi$  under slope dislocation  $[w, y]$  at point  $(2a, 0)$ .

3.3 Dipole型の特異項荷重下の断面力

図9に示すように、Dipole型の荷重を重ね合わせることで、任意の有限位置 $z_0$ にDipole型の特異項荷重を合成載荷することができる。その形態は集中モーメント対に限定すれば、鞍型曲げの集中モーメント対、球面曲げの集中モーメント対およびねじり型の集中モーメント対の3つに分類できる。ねじり型の集中モーメント対

は、面内変形を引き起こすが面外へはほとんどたわまないため、それによって生じる断面力は非常に小さい。したがって、以下では集中モーメント対の合成に関して、鞍型曲げおよび球面曲げの集中モーメント対の2例について取り上げる。

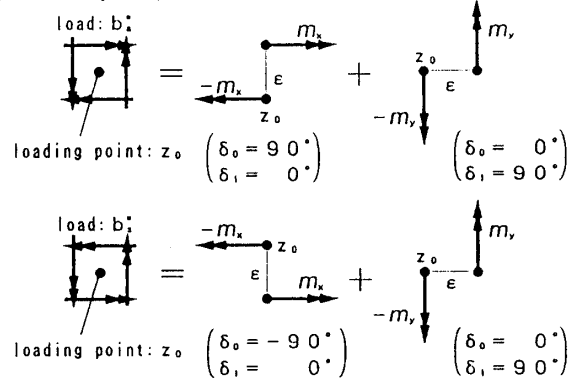


Fig.9 Superposition of singular forces of dipole type.

3.3.1 鞍型曲げの集中モーメント対が作用する場合

鞍型曲げの集中モーメント対 $b_a^*$ は、載荷重によりその変形が鞍型になるような集中モーメント対であり、図10に示すように重ね合わせて載荷される。 $m_x$ ,  $m_y$ がそれぞれ載荷されるとき複素関数 $H_k^*$ は以下の値をとる。

$$\left. \begin{aligned} m_x : H_1^* &= (-0.159 \times 10^{-3}, -0.123 \times 10^{-4}), \\ &H_2^* = (0.159 \times 10^{-3}, -0.123 \times 10^{-4}). \\ m_y : H_1^* &= (-0.873 \times 10^{-5}, -0.134 \times 10^{-3}), \\ &H_2^* = (-0.873 \times 10^{-5}, 0.134 \times 10^{-3}). \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

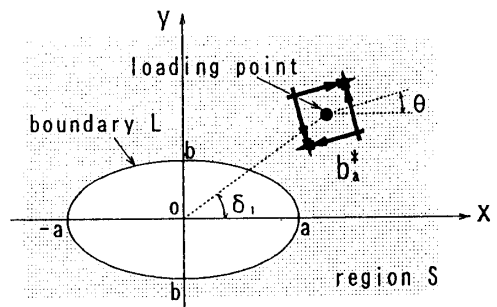


Fig.10 Anisotropic plate under anticlastical concentrated moment of dipole type.

図11は、 $z_0(2a, 0)$ に鞍型曲げのモーメント対 $b_a^*$ が作用した場合の曲げモーメント $M_\xi$ の分布を示している。この場合も前節同様、 $x$ 軸上側に自由境界、下側に剛体境界の場合を示している。自由境界は、その境界条件からだ円孔付近での断面力は大きくないものの、載荷点の反対側領域での断面力が消失していないのに対し、剛体境界では、剛体付近での断面力はかなり大きな値

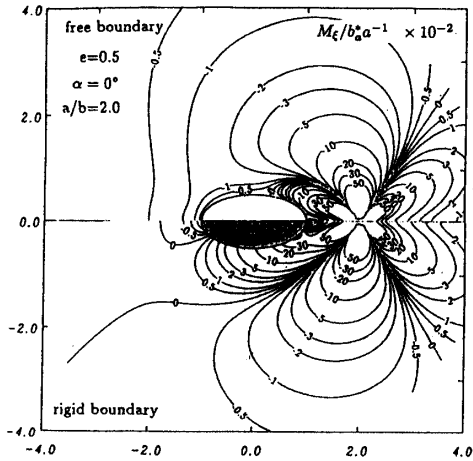


Fig.11 Distribution of bending moment  $M_\xi$  under anticlaxtical concentrated moment of dipole  $b_a^*$  at point  $(2a, 0)$ .

を示しているが、境界からの距離に対する  $M_\xi$  の消失は、自由境界のそれに比べてやや速いことがわかる。

3.3.2 球面曲げの集中モーメント対が作用する場合

球面型曲げの集中モーメント対  $b_s^*$  は、載荷重によりその変形が球面状になるような集中モーメント対であり、図12に示すように重ね合わせて載荷される。  $m_x$ ,  $m_y$  がそれぞれ載荷されるとき複素関数  $H_k^*$  は以下の値をとる。

$$\left. \begin{aligned} m_x: & H_1^* = (-0.159 \times 10^{-3}, 0.123 \times 10^{-4}), \\ & H_2^* = (-0.159 \times 10^{-3}, -0.123 \times 10^{-4}). \\ m_y: & H_1^* = (-0.873 \times 10^{-5}, -0.134 \times 10^{-3}), \\ & H_2^* = (-0.873 \times 10^{-5}, 0.134 \times 10^{-3}). \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

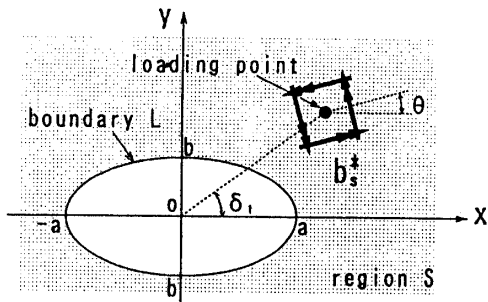


Fig.12 Anisotropic plate under spherical concentrated moment of dipole type.

図13は、 $z_0(2a, 0)$  に球面曲げのモーメント対  $b_s^*$  が作用した場合の曲げモーメント  $M_\xi$  の分布を示している。剛体境界の場合、載荷点と反対側領域のだ円頂点で断面力  $M_\xi$  の集中が他の場合と比較して、かなり高いことがわかる。

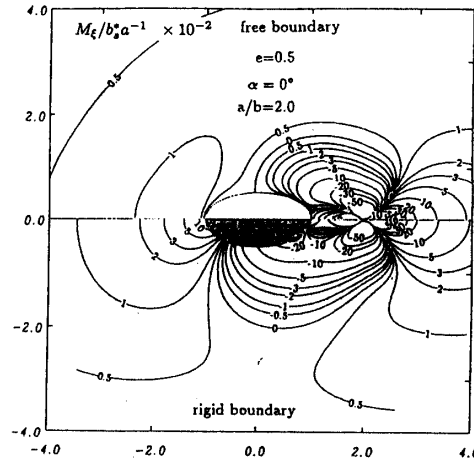


Fig.13 Distribution of bending moment  $M_\xi$  under spherical concentrated moment of dipole  $b_s^*$  at point  $(2a, 0)$ .

4. 結 言

本論文では、古典理論を用いただ円形境界の孔（または剛体）を有する異方性平板曲げ問題の各種荷重条件における解析解の導出と、その解析解を用いた断面力の挙動特性について解析した。これにより、体積力法や境界要素法といった数値解析手法の検証に必要な基本解が求められたことになる。

また Dipole 型の特異項荷重問題で扱ったような重ね合わせができることは、本研究で用いた解析解が上述の数値解析手法に必要な基本解となっているものであるとともに、だ円形境界に有限長のクラックが存在する平板曲げ問題への拡張に利用することができるものである。

文 献

- (1) 平島健一・木村清和・広瀬幸雄, 機論, 57-540, A(1991), 1897-1904.
- (2) 平島健一・木村清和・広瀬幸雄, 機論, 57-542, A(1991), 2516-2522.
- (3) 平島健一・佐藤晃一・川久保昌平, 機論, 58-548, A(1992), 559-566.
- (4) 平島健一・荒田訓史・Mura T., 機論, 58-552, A(1992), 1403-1410.
- (5) 平島健一・木村清和・広瀬幸雄, 機論, 58-555, A(1992), 2104-2110.
- (6) 平島健一・川久保昌平, 機論, 59-559, A(1993), 808-814.
- (7) 平島健一・金本康宏, 機論, 62-603, A(1996), 2615-2620.
- (8) Mossakowski, J., Arch. Mech. Stos., Vol.6, (1954), 413-432.
- (9) Ting, TCT, Anisotropic Elasticity, - Theory and Application -, Oxford Sci. Pub., (1996), 570 pp.