Working Paper No. 284

不動産価格指数の理論と推計：サーベイ
－品質調整済み不動産価格指数の推計方法－

唐渡広志，Walter Erwin Diewert，清水千弘

2013 年 9 月 17 日

FACULTY OF ECONOMICS
UNIVERSITY OF TOYAMA

不動産価格指数の理論と推計：サーベイ

–品質調整済み不動産価格指数の推計方法–

唐渡広志* Walter Erwin Diewert † 清水千弘‡

2013 年 9 月 17 日

（初稿）

概 要

不動産価格指数の推計においては，不動産が持つ同質の財が存在しないという特性から，品質調整を施す必要がある。その品質調整の方法としては，多くの物価統計で利用されているヘドニック法と合わせて，推計に利用できる情報の限定から，リピートセールス価格法や不動産鑑定評価情報を用いた方法など，様々な方法が提案されるとともに，実用化されている。しかし，その実用化においては，その背後にある理論的な知識の欠如や情報の制約から，その評価が困難な状況にあると言っても過言ではない。そこで，本稿においては，不動産価格指数の品質調整方法として提案されているヘドニック価格法，またはリピートセールス価格指数，不動産鑑定価格を活用した指数を中心として，その経済理論的な背景を整備すると共に，それぞれの推計手法の優位点 (advantage) と問題点 (disadvantage) を明確にすることを目的とする。

Key Words：ヘドニック価格指数; リピートセールス価格指数; 経年効果; ハイブリッド法; 不動産鑑定価格法; SPAR

JEL Classification：C2, C23, C43, D12, E31, R21.

1 はじめに

不動産バブルの生成と崩壊は，多くの主要国の経済運営に対して深刻な影響をもたらしてきた。日本における 1980 年代中ごろから始まった不動産バブルは，20 世紀最大のバブルと言われた．そして，その後においては,「失われた 10 年 (lost decade)」と揶揄されたように，長期的な経済の停滞に直面した。このような問題は，1990 年代のスウェーデンの経済危機や 21 世紀に入ってからの米国を中心とした不動産バブルの生成と崩壊によってもたらされた世界的な金融危機と経済停滞など，多くの国が共通に経験した事であった。

このような中で，住宅を含む不動産市場と金融市場，そして，政策当局の間に「情報ギャップ」が存在していた問題が指摘された。IMF は 2009 年，20 カ国・地域（G 20）に，情報ギャップを埋めるために住宅価格指数を整備していくことを提案して採択された。さらに，2011 年には，次の経済危機は，Land つまり，収益性不動産 (商業不動産) から発生するという提言が出され，商業用不動産指数も整備されていくことが決定された。それでは，不動産価格指数はどの様に整備をしていけばいいのであろうか。

*富山大学経済学部，email: kkarato@eco.u-toyama.ac.jp
†ブリティッシュコロンビア大学経済学部
‡麗澤大学経済学部・ブリティッシュコロンビア大学経済学部

不動産は, 規格や設備は建物ごとに大なり小なり異なっており, 同質のものを見出すことができない。仮に規格や設備が同じであっても「建築後年数」が異なれば質の劣化の程度が異なり同質のものではなくなる。つまり,「同質の財が存在しない特殊性」を持つ。このような問題に加えて, 建物の技術進歩が比較的早く，時間の経過とともに「品質」が変化する。つまり，時間の経過と共に建物の機能が低下していくだけでなく，技術進歩が進むことで建物の経済的な陳腐化が進むこととなる。また，再開発等を通じて周辺環境が大きく変わる場合においては，中心地までの交通利便性などの立地特性も変化してしまう。

こうした「同質の財が存在しない特殊性」や「品質の変化」がもたらす問題に対処しつつ不動産価格の時系列的な変動を捕捉しようとした場合には，価格の品質調整を行う必要がある。消費者物価統計などに代表される既存の指数理論から応用できる点も少なくはない。例えば，技術進歩に伴う品質の変化に対しては，ヘドニック価格法と呼ばれる品質調整方法が活用されている。不動産価格指数においても，ヘドニック価格法で品質調整をすることを考える方が，他の経済統計との整合性もとれるために，自然な流れであると言えよう。

しかし，不動産価格指数の推計における品質調整の方法には複数の候補が存在する。2013 年に EuroStat から公表された住宅価格指数ハンドブック (Residential Property Price Indices Handbook) を見ると，

a) 層別平均値・中央値法 (Stratification or Mix Adjustment Methods),

b) ヘドニック価格法 (Hedonic Regression Methods),

c) リピート・セールス価格法 (Repeat Sales Methods),

d) 鑑定評価法 (Appraisal-Based Methods)

が，それぞれの優位性 (advantage) と問題点 (disadvantage) と合わせて紹介されている。その背景には，実際に，不動産価格指数の推計において実用化されている手法が，複数存在しているためである[1]。

実用的な観点から，ヘドニック価格法以外の手法に頼らざるを得ない状況にあるのは，それなりの理由がある。

第一の理由は，品質調整の困難性である。前述のように，不動産の品質調整の理由としては，同質の財が存在せず，不均一性 (heterogeneity) が強い。その場合には，消費者物価統計などが直面している品質変化に対する問題と加えて，その不均一性に対しても対応しなければならない。つまり，品質調整の困難性が大きいと言えよう。

第二の理由は，不動産価格指数の推計において活用可能なマイクロレベルでの価格情報が不足しているという問題である。ヘドニック価格法を適用しようとすれば，取引価格，取引時点，土地・建物の大きさだけでなく，都市の中心までの時間などの立地に関わる情報や，建物の年齢や性能に関する詳細な情報が必要とされる。このような情報がない中では，限られた情報の中で価格指数を推計しなければならない。リピートセールス価格法は，取引価格，取引時点だけの品質調整が出来るために，不動産に関わる変数に関する情報を節約できるという優位性を持つ。そうすると，情報が限られた中で価格変化を測定しようとすれば，同じ物件が繰り返し取引されたものだけを用いて指数を作成しようとするのは，一般的な価格指数の測定方法の考え方とも整合する。

しかし，ここで他の財やサービス市場と異なるのが，不動産の取引市場は極めて薄い (thin) ことである。そうすると，例えば，月次の価格指数を作成しようとしたときに，同じ品質の財やサー

[1]ハンドブックは，次のサイトから見ることが出来る `http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/hicp/methodology/hps/rppi_handbook`

ビスが十分に取引がなされているような市場と異なり，数年に一度しか同じ特性を持つ不動産の取引が発生しないような市場であるために，多くの問題が発生することは容易に予想できることである。

第三に，不動産取引の商慣行の中では，不動産鑑定価格を用いられることが少なくないと言うことである。不動産は不均一性が強いだけでなく，取引が少ない。用途や地域によっては，ほとんど取引が発生していないような市場も存在する。この場合，不動産鑑定評価に基づく価格は，取引に重大な影響を与える。

以上のことから，ヘドニック価格法を簡単には採用できない理由が複数あることがわかる。また，その他の手法を利用したとしても，不動産価格指数の推計には多くの困難を伴うことになる。その困難さは，比較的取引が多く，品質の格差が小さい (homogeneous) な住宅市場よりも，オフィス，商業施設，ホテル，物流施設，病院，そして農地などの商業用不動産において，第一の不均一性の増加と情報の欠如，第二のリピートセールスサンプルの減少，そして，第三の不動産鑑定価格を活用される確率が上昇していくのである。

本稿では，不動産価格情報が比較的に入手が容易な市場において，不動産価格指数を作成していく上で活用が出来るであろうヘドニック価格法，リピートセールス価格法，そして不動産鑑定価格を用いた推計方法の特徴を整理することを目的としている。具体的には，ヘドニック価格法，リピートセールス価格法を中心として，不動産価格指数を推計する際の品質調整方法に関して網羅的にサーベイし，それぞれの推計方法の特性を明らかにする。さらに，そのような整理を受けて，不動産価格指数をどの様に整備していくべきかといった推計方法論から見た視点を提示する。

2　ヘドニック価格法

2.1　ヘドニック・アプローチとは

ヘドニック・アプローチとは，Rosen (1974) によって理論的に確立された手法である。[2]具体的には，ある商品価格をその商品のさまざまな属性（特性）の価値に関する集合体（属性の束）とみなし，回帰分析を利用してそれぞれの特性価格を推定する。市場に出回っている商品の多くは，使用目的が同じであったとしても性能や機能などで多くの差別化が図られている。特性の違いはその商品の生産費用に反映される。そして，その商品独自の性能や機能に対する消費者の評価もまた市場で決まる価格に反映されているといえる。しかしながら，その特性自体は市場で売買されているとは限らない。ヘドニック・アプローチでは，商品価格を特性の質や量を示す変数に回帰させることによって，その係数推定値から非市場財の影の価格をも計測する。

古くは， Court (1939) が自動車の価格指数を推定するためにこの手法を利用しているが，この手法についてより多くの注意が払われるようになったのは Griliches (1961,1967, 1971) 以降である。特に，不動産価格による環境評価や不動産市場分析において良く用いられるようになった。また，商品特性の価格を制御することで，品質調整された価格指数を計測する際にも利用されている。たとえば，急速な技術革新で品質が変化するコンピューターのような財について，Dulberger (1989) や Berndt, Griliches and Rappaport (1995) の研究がある。

Rosen (1974) は属性の束で表現される商品価格を競争均衡の枠組みで捉えようとしており，この発想は Lancaster (1966) の議論に影響を受けている。Lancaster (1966) は消費者の効用が商品そのものではなく，商品を構成するさまざまな性能や機能などに依存していることを想定した消費者行動の理論的分析をおこなっている。商品の市場価格はさまざまな特性に対する需要と供給に

[2]ヘドニック・アプローチに関する理論的・体系的な解説は Sheppard (1999) が詳しい。

よって決まると考えられる。ただし，それぞれの特性に関する市場は必ずしも陽表的ではなく，商品価格決定の背後に隠れてしまっている。Lancaster の狙いはこのような背後にあるメカニズムを明示的に示し，差別化された財市場における消費者行動を分析することにあった。

このような差別化された商品の価格と消費者行動の関係を綿密に検討することは，価格指数の作成において重要である。たとえば，デジタル家電製品，乗用車，住宅などは，たとえ価格が同じであったとしても，時間が経過すると品質が向上し，機能も豊富になる。ラスパイレス方式では基準時点のマーケット・バスケットを固定するので，そのような価格指数は品質や機能の変化を無視してしまうことになる。ヘドニック・アプローチを利用すると，旧製品と新製品との間の性能比を推定することができる。

Rosen(1974) の差別化された財についてのヘドニック価格分析は，属性の束によって構成される商品価格が，どのようにして市場で生じるのかを理論的に解明した研究である。商品供給者のオファー関数，商品需要者の付け根関数およびヘドニック市場価格関数との関係を厳密に検討し，商品の市場価格を消費者と生産者の行動から特徴づけている。このヘドニック市場価格関数を利用すると，商品属性に対する支払許容額を求めることができる。

以下では，2.2 節において Rosen(1974) のヘドニック・アプローチ理論を概説し，2.3 節においてヘドニック市場価格関数の推定に関する問題点を取り上げる。2.4 節では Diewert(2007) にしたがい，時間ダミーを用いたヘドニック時間ダミー価格指数 (hedonic time dummy index) と補定指数 (hedonic imputed index) による違いをまとめる。2.5 節では生産者価格に関する品質調整ヘドニック指数の特徴を説明し，2.6 節でヘドニック価格法の特徴をまとめる。

2.2 ヘドニック・アプローチの理論

2.2.1 付け値関数

Rosen (1974) に手法に従い，不動産を例にヘドニックアプローチの理論的基礎を示す。 不動産を構成する第 k 番目の特性の値を z_k $(k = 1, 2, \cdots, K)$ で表すものとしよう。不動産の特性とは，たとえば，広さ，建物の構造，台所，お風呂，交通の利便性，自然環境，社会環境などを示している。 Rosen は不動産の市場価格 p と特性値 $z_1, \cdots, z_k, \cdots, z_K$ の関係を次のヘドニック価格関数 h で示すことができるとした。

$$p = h(z_1, \cdots, z_k, \cdots, z_K) \tag{1}$$

Rosen の分析の主要な目的は (1) が市場において如何にして決定されるのかを明らかにすることである。

消費者は市場価格関数 (1) を所与として，最適な不動産特性の組みを選択する。効用最大化問題は次のように書くことができる。

$$\max_{x,\boldsymbol{z}} \quad U = U(x, \boldsymbol{z}) \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \quad I = x + h(\boldsymbol{z}) \tag{3}$$

ここで，$U(\cdot)$ は振る舞いの良い狭義の凹関数，x は不動産以外の財・サービスを含む合成財，$\boldsymbol{z} = (z_1, \cdots, z_K)$ は不動産の特性ベクトル，I は所得である。 合成財価格は 1 に基準化されている。この最適化問題の 1 階の条件より $\frac{U_k}{U_x} = h_k(\boldsymbol{z})$ が成立する。 ただし， $U_k = \partial U(x, \boldsymbol{z})/\partial z_k$, $U_x = \partial U(x, \boldsymbol{z})/\partial x$, $h_k(\boldsymbol{z}) = \partial h(\boldsymbol{z})/\partial z_k$ である。 すなわち，所得の限界効用で図った不動産特性の限界効用は，市場価格における属性の限界的な寄与値に等しいことを示している。

付け値関数を用いて市場価格関数を決定することができる。 ある効用水準 u と所得のもとで，不動産需要者が提示する特性 $\boldsymbol{z}$ を持つ不動産の付け値を θ とおくと，(2) により

$$U(I-\theta, \boldsymbol{z}) = u$$

と書ける。 これを θ について解くと，特性 $\boldsymbol{z}$ のさまざまな組に対して消費者が不動産に支出できる金額は，効用水準と所得を所与として，付け値関数 $\theta(\boldsymbol{z}; I, u)$ として表現できる。 効用水準 u を高める（低める）には，特性 $\boldsymbol{z}$ を持つ不動産の付け値 θ が下落（上昇）しなければならない ($\partial\theta(\boldsymbol{z}; I, u)/\partial u = -U_x^{-1} < 0$)。したがって，$\theta$ は効用水準 u を達成するときに，特性 $\boldsymbol{z}$ を持つ不動産に支払いうる最大の価格であることを示している。

(2)，(3) および付け値関数 $\theta(\boldsymbol{z}; I, u)$ より $U(I-\theta(\boldsymbol{z}; I, u), \boldsymbol{z}) = u$ と書くことができる。 この式を z_k について偏微分して 0 とおくと

$$-U_x \frac{\partial\theta(\boldsymbol{z}; I, u)}{\partial z_k} + U_k = 0$$

が得られる。効用が u^* の水準で最大化されているとき，最適な特性の組み $\boldsymbol{z}^*$ について $\frac{U_k}{U_x} = h_k(\boldsymbol{z}^*)$ なので，次の 2 式が必ず成立している。

$$\frac{\partial\theta(\boldsymbol{z}^*; I, u^*)}{\partial z_k} = h_k(\boldsymbol{z}^*) \tag{4}$$

$$\theta(\boldsymbol{z}^*; I, u^*) = h(\boldsymbol{z}^*) \tag{5}$$

(4) および (5) は，最適な特性を選択しているとき，付け値関数の傾きと市場価格関数の傾きは一致しており，かつ付け値と市場価格も等しくなることを示している。すなわち，最適な特性値のもとで付け値関数と市場価格関数は接していることになる。

消費者の所得や嗜好が異なる場合，付け値関数も異なる。しかし，市場均衡では付け値関数と市場価格関数は接していなければならないので，市場価格関数はさまざまな所得と嗜好を持つすべての消費者の付け値関数の包絡線になっている。

2.2.2　オファー関数

不動産の供給者についても価格のオファー関数を定義し，利潤最大化問題より市場価格関数との関係を論じることができる。オファー関数は所与の技術水準のもとで，ある利潤を達成するときに提示する最低の価格である。企業が最適な特性を選択して不動産を生産しているとき，利潤最大化よりオファー関数の傾きと（不動産一つあたりの）市場価格関数の傾きは一致し，オファー価格と市場価格も一致する。したがって，最適な特性値のもとでオファー関数と市場価格関数は接していることになる。 不動産生産者の技術には異質性があるので，それに対応するオファー価格もさまざまである。 均衡ではオファー価格と市場価格は一致する必要があるので，市場価格関数はさまざまな企業のオファー関数の包絡線になっている。

以上より，ヘドニック市場価格関数は無数の不動産需要者の付け値関数と無数の不動産供給者のオファー関数の双方の包絡線になっている。 なお，供給者が 1 社の場合，付け値関数は不動産 1 戸を追加的に生産した場合の限界費用（もしくは不動産 1 戸あたりの平均費用）に等しくなる。そのため，市場価格関数は供給者の限界費用に等しくなる。

2.2.3　支払容認額

付け値関数を利用すると，属性の変化に対する消費者の支払容認額を求めることができる。いま，$\boldsymbol{z}^*$ において $p^* = \theta(\boldsymbol{z}^*; I, u^*) = h(\boldsymbol{z}^*)$ であるとしよう。不動産の第 K 特性 z_K^* が z_K^{**} に上昇（$z_K^* < z_K^{**}$）したとすると，

$$WTP \equiv \theta(z_1^*, \cdots, z_{K-1}^*, z_K^{**}; I, u^*) - p^* \tag{6}$$

は需要者の支払容認額 (WTP) である。 つまり，支払容認額は特性値が追加的に変化したとき，効用水準を変化させることなく不動産に支払うことができる追加的な価値である。

効用関数 $U(x, \boldsymbol{z})$ が狭義の凹関数であるとき（ヘッセ行列は半負値定符号），

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}\theta(\boldsymbol{z}^*; I, u^*) = \frac{U_x^2 U_{kk} - 2U_x U_k U_{xk} + U_k^2 U_{xx}}{U_x^3} < 0$$

なので，付け値関数は凹関数である。最適な特性値の組み $\boldsymbol{z}^*$ のもとでは (4) および (5) が成立するが，付け値関数は凹関数であることから，

$$\theta(z_1^*, \cdots, z_{K-1}^*, z_K^{**}; I, u^*) < h(z_1^*, \cdots, z_{K-1}^*, z_K^{**}) = p'$$

および (6) より，

$$p' - p^* > WTP \tag{7}$$

となる。すなわち，市場価格関数の特性の限界値は需要者が同質でない限り WTP を過大に推定する可能性があるので注意を要する。しかし，十分に小さい特性値の変化を想定するのであれば，市場価格関数の限界値は WTP の近似値として利用できるだろう。[3]

2.3　ヘドニック市場価格関数の推定

2.3.1　関数型

支払容認額を正確に計測するためには付け値関数の推定が必要であるが，一般にはヘドニック市場価格関数 (1) を推定し，その近似値を利用する。ヘドニック市場価格関数の推定において問題となるのはその関数型である。容易な推定ができることから，両対数，半対数および線形などのモデルがよく用いられる。

多時点の不動産価格がデータとして観察されるとき，第 n 物件の t 時点のヘドニック市場価格は次の形で記述できる。

$$y_n^t = \alpha_t + \boldsymbol{z}_n^{t\prime}\boldsymbol{\gamma} + \epsilon_n^t \quad (n = 1, 2, \cdots, N(t);\ t = 0, 1, \cdots, T) \tag{8}$$

ここで，y_n^t は不動産価格の対数（$\ln p_n^t$）もしくは真数値（p_n^t），α_t は未知の時間効果，$\boldsymbol{z}_n^{t\prime} = (1, z_{n1}^t, \cdots, z_{nk}^t, \cdots, z_{nK}^t)$ は定数項を含む説明変数（特性）ベクトル，$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_k, \cdots, \gamma_K)'$ は係数ベクトル，ϵ_n^t は誤差項である。 たとえば時間効果を含む半対数モデルは

$$y_n^t \equiv \ln p_n^t = \alpha_t + \gamma_0 + \sum_{k=1}^{K} \gamma_k z_{nk}^t + \epsilon_n^t \tag{9}$$

[3] 公共投資や環境価値などの経済評価にヘドニック・アプローチを応用した邦語の研究として，金本・中村・矢澤 (1989)，肥田野 (1997) がある。

と定義できる。このモデルにおいて，係数 $\boldsymbol{\gamma}$ の推定値は不動産価格に対する特性値の効果を示しており， 時間効果について各時点に対するダミー変数を利用すれば最小 2 乗法から推定を行うことができる。価格指数計測の観点から，Diewert (2003) や Malpezzi (2003) では半対数モデルの利点が述べられている。

多重共線性を避けてすべてのパラメタを識別するには α_t と γ_0 について何らかの基準化をする必要がある。典型的には観察の初期時点 $t=0$ において $\alpha_0=0$ とおき，各時点に対するダミー変数は $t=1,2,\cdots,T$ に対して用いられる。

ヘドニック市場価格関数 $h(\boldsymbol{z})$ の関数型は理論的に特定できないので，統計的な手法で選択せざるをえない。両対数モデルや半対数モデルなどに特定している場合でも，その形が最良のものとは限らない。1980 年代以降の研究では，Linneman (1980) を始めとして，Box–Cox 変換を利用した非線型推定の有用性についての議論が深まっている。この場合，(9) の左辺は次のように書き換えられる。

$$y \equiv \begin{cases} \dfrac{p^{\lambda}-1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln p & \lambda = 0 \end{cases} \tag{10}$$

ここで，λ は未知パラメタである。Halvorson and Polakowski (1981) は説明変数間の交差項を含んだ 2 階近似式によるフレキシブルな関数形に Box–Cox 変換を適用して，さまざまな関数形のテストを行っている。同論文に対して Cassel and Mendelsohn (1985) は変数間の交差項を多数含むことで説明力が上昇するのもの，多重共線性による係数推定値の信頼性低下やヘドニック特性値の限界効果の解釈が困難になることを指摘している。Cropper, Deck and McConnell (1988) はトランスログ型や Diewert 型効用関数（Barten (1964)，Diewert (1971, 1973)）のもとで統計実験を行ったところ，変数に観測誤差が含まれている場合には，2 次形式の Box–Cox 変換よりも，線型もしくは右辺だけ Box–Cox 変換したモデルのほうが定式化の観点で優れていることを示している。

ヘドニック価格関数をパラメトリックな関数型で特定化する代わりに，ノン・パラメトリック法あるいはセミ・パラメトリック法を利用する研究も提案されている。これらのアプローチは関数型をあらかじめ特定化することなく，データから直接的に属性価格を推定する（Knight et. al. 1993, Anglin and Gencay 1996 , Pace 1995 ）。ただし，パラメトリックな分析手法と同様に，データ上の問題点（多重共線性）から解放されないことも指摘されている。Anglin and Gencay (1996) は，パラメトリック対ノンパラメトリックのモデル選択に関する検定において，パラメトリック・モデルは比較的棄却されやすい事実を示している。パラメトリック・モデルの変数構成が貧弱だからというわけではなく，モデル選択に関する標準的な検定をいくつもパスしたパラメトリック・モデルにおいてすら，そのような結果になることが示されている。Pace (1998) はより柔軟な一般化加法モデル (Generalized Additive Model; GAM) を利用して，セミパラメトリックのヘドニック価格関数を推定しており，あらゆるパラメトリック・モデルに対する優位性があることを実証している。GAM 自体が統計的手法として確立されているので，このことはヘドニック・アプローチへのノンパラメトリック法やセミパラメトリック法の援用がきわめて効果的であることを示す結果であるといえる。

2.3.2 限界付け値関数の識別問題

特性値が市場価格に与える影響が大きい場合，支払容認額はヘドニック市場価格関数と付け値関数との間に乖離を生じさせるので，付け値関数ないし付け値の限界効果を推定する必要がある。[4]

[4]ヘドニック・アプローチを使用した実証分析上の問題点を整理したより綿密な邦語文献として中村 (1992) がある。

Rosen (1974) は付け値関数を推定するための手法として，市場価格関数の限界効果を特性値とその他の外生変数に回帰する方法を提案している。

$$\hat{h}_k = D_k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{A}) \tag{11}$$

$$\hat{h}_k = S_k(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{B}) \tag{12}$$

ここで，$\hat{h}_k$ はヘドニック市場価格関数の特性 k についての限界効果，$D(\cdot)$ および $S(\cdot)$ は特性の需要関数と供給関数，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ不動産需要者と供給者のタイプ（所得や生産技術など）を示すベクトルである。 限界効果は特性値の影の価格なので，(11)，(12) は逆需要（付け値），逆供給（オファー価格）を用いた需給連立方程式になっており，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を操作変数として需給の識別を図っている。

Witte, Sumka and Erekson (1982) は Rosen のモデルにしたがって複数の不動産市場を対象に三つの属性に関して同時連立方程式を推定している。しかしながら，Brown and Rosen (1982) が指摘しているように，この方法による推定は特性値の需要と供給を正しく識別することができない。1 段階目で推定される市場価格関数の限界効果は $\hat{h}_k$ は $h(\boldsymbol{z})$ から導き出されるので，限界効果で示された属性価格もまた $\boldsymbol{z}$ の関数であると考えることができる。$\boldsymbol{z}$ の需要はそれぞれの属性価格に依存しており，属性価格と属性需要方程式の誤差との間に相関が生じてしまう。すなわち，属性価格が属性需要に与える効果はバイアスをもって推定される可能性が生じる。

付け値関数とオファー関数のこの識別問題は Diamond and Smith (1985) や Mendelsohn (1985) において検討されている。まず，1 段階目のヘドニック市場価格関数の推定において，特性ベクトルとは別に付け値関数とオファー関数どちらにも含まれない外生変数や特性値のべき乗項が必要であることが指摘されている。そして，2 段階目において，識別条件を満たすだけの外生変数を用いて限界付け値関数の方程式体系を同時推定する。[5]

2.4 ヘドニック・アプローチによる価格指数計測

ヘドニック・アプローチは品質を調整した価格指数を作成する際の有益な手法である。代表的なヘドニック価格指数として (i) 時間ダミーヘドニック指数 (time dummy hedonic index)，(ii) ヘドニック補定指数 (hedonic imputaion indx)，の二つがある。以下では，Diewert (2007) にしたがって，二つの価格指数の違いについて論じよう。

2.4.1 時間ダミーヘドニック回帰 (Time Dummy Hedonic Index)

ヘドニック回帰式 (9) における説明変数ベクトルから定数項を除いたものを $\boldsymbol{z}_n^{t\prime} = (z_{n1}^t, \cdots, z_{nk}^t, \cdots, z_{nK}^t)$ とし，対数価格をこれらに回帰した，次の 2 時点（$t = 0, 1$）についての時間ダミー回帰モデルを考える。

$$y_n^t \equiv \ln p_n^t = \alpha_t + \sum_{k=1}^{K} \gamma_k z_{nk}^t + \epsilon_n^t \quad (t = 0, 1;\ n = 1, 2, \cdots, N(t)) \tag{13}$$

ここで， α_t は各期における商品の品質一定価格の平均水準を示しており，第 0 期から第 1 期への対数価格変化の総体的な尺度は $\alpha_1 - \alpha_0$ である。

[5]Sheppard (1999) では，識別問題に関するより詳しいサーヴェイがなされている。また，近年では Ekeland, Heckman and Nesheim (2004) および Heckman, Matzkin and Nesheim (2010) がノンパラメトリック法を利用した識別方法を提案している。

$\mathbf{1}_t$ をすべて 1 からなる $N(t)$ 次元ベクトル，$\mathbf{0}_t$ をすべて 0 からなる $N(t)$ 次元ベクトルであるとしよう。 また，$\boldsymbol{y}^0$ および $\boldsymbol{y}^1$ をそれぞれ 第 0 期，第 1 期の対数価格についての $\boldsymbol{N(0)}$，$\boldsymbol{N(1)}$ 次元ベクトル，$\boldsymbol{Z}^0$ および $\boldsymbol{Z}^1$ をそれぞれ第 0 期，第 1 期の $N(t) \times K$ 説明変数行列としよう。(13) を第 0 期と第 1 期について行列表示すると次のように書ける。

$$\boldsymbol{y}^0 = \mathbf{1}_0 \alpha_0 + \mathbf{0}_0 \alpha_1 + \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\epsilon}^0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{y}^1 = \mathbf{0}_1 \alpha_0 + \mathbf{1}_1 \alpha_1 + \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\epsilon}^1 \tag{15}$$

α_t^*，$\boldsymbol{\gamma}^*$ を最小 2 乗法によるこれらの未知パラメタの推定量とすると，推定量と最小 2 乗残差の実現値 $\boldsymbol{e}^t$ を用いて，(14) と (15) は以下のように書き換えることができる。

$$\boldsymbol{y}^0 = \mathbf{1}_0 \alpha_0^* + \mathbf{0}_0 \alpha_1^* + \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^* + \boldsymbol{e}^0 \tag{16}$$

$$\boldsymbol{y}^1 = \mathbf{0}_1 \alpha_0^* + \mathbf{1}_1 \alpha_1^* + \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^* + \boldsymbol{e}^1 \tag{17}$$

$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}^{0\prime} & \boldsymbol{y}^{1\prime} \end{bmatrix}'$，$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}^{0\prime} & \boldsymbol{e}^{1\prime} \end{bmatrix}'$，$\boldsymbol{\phi}^* = \begin{bmatrix} \alpha_0^* & \alpha_1^* & \boldsymbol{\gamma}' \end{bmatrix}'$，および

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_0 & \mathbf{0}_0 & \boldsymbol{Z}^0 \\ \mathbf{0}_1 & \mathbf{1}_1 & \boldsymbol{Z}^1 \end{bmatrix} \quad (N(0) + N(1)) \times (2 + K)$$

と定義すると (16)，(17) は次のように書き換えることができる。

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X} \boldsymbol{\phi}^* + \boldsymbol{e} \tag{18}$$

ここで $\boldsymbol{X}$ と残差 $\boldsymbol{e}$ は直交するので $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\phi}^*) = \mathbf{0}$ が得られる。すなわち， $\mathbf{1}_0' \boldsymbol{e}^0 = 0$ ，$\mathbf{1}_1' \boldsymbol{e}^1 = 0$ ， および $\boldsymbol{Z}^{0\prime} \boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{Z}^{1\prime} \boldsymbol{e}^1 = \mathbf{0}$ が得られる。したがって (16)，(17) の残差を利用して

$$\mathbf{1}_0' \boldsymbol{y}^0 = N(0) \alpha_0^* + \mathbf{1}_0' \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^* \tag{19}$$

$$\mathbf{1}_1' \boldsymbol{y}^1 = N(1) \alpha_1^* + \mathbf{1}_1' \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^* \tag{20}$$

である。(19)，(20) をそれぞれ α_0^*, α_1^* について解くと

$$\alpha_0^* = \frac{\mathbf{1}_0' \boldsymbol{y}^0}{N(0)} - \frac{\mathbf{1}_0' \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^*}{N(0)} = \frac{\mathbf{1}_0' (\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^*)}{N(0)} \tag{21}$$

$$\alpha_1^* = \frac{\mathbf{1}_1' \boldsymbol{y}^1}{N(1)} - \frac{\mathbf{1}_1' \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^*}{N(1)} = \frac{\mathbf{1}_1' (\boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^*)}{N(1)} \tag{22}$$

が得られる。 (21) および (22) は品質一定の対数価格水準を示している。 $\frac{\mathbf{1}_t' \boldsymbol{y}^t}{N(t)}$ は $t = 0, 1$ 期の対数価格の算術平均，$\frac{\mathbf{1}_0' \boldsymbol{Z}^0}{N(t)}$ は $t = 0, 1$ 期の特性値の算術平均を示している。すなわち， α_0^* は対数価格の平均値からすべての属性価値の平均値の合計を差し引いたもの（品質調整した対数価格の算術平均）に等しい。 以上より，第 0 期から第 1 期への対数価格変化によるヘドニック時間ダミーの推定値は次の差分になる。

$$LP_{HD} \equiv \alpha_1^* - \alpha_0^* \tag{23}$$

(18) における説明変数行列について次のように表現する。

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_0 & \mathbf{0}_0 \\ \mathbf{0}_1 & \mathbf{1}_1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z}^0 \\ \boldsymbol{Z}^1 \end{bmatrix}$$

ここで，$\boldsymbol{V}$ は $(N(0)+N(1))\times 2$，$\boldsymbol{Z}$ は $(N(0)+N(1))\times K$ の行列である。説明変数を $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{V},\boldsymbol{Z}]$ と書き直すと，残差ベクトルは $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{\alpha^*}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma^*}$ なので $\partial\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/\partial\boldsymbol{\alpha}^*=\boldsymbol{0}$ より最小 2 乗推定量

$$\boldsymbol{\alpha}^*=\begin{bmatrix}\alpha_0^*\\ \alpha_1^*\end{bmatrix}=(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V})^{-1}\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z}\gamma^*) \tag{24}$$

が得られる。(24) より残差は

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z}\gamma^*)$$

と書き換えられる。ここで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}^0\\ \boldsymbol{M}^1\end{pmatrix}&=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V})^{-1}\boldsymbol{V}'\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_0-\boldsymbol{1}_0\boldsymbol{1}_0'/N(0) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{1}_1\boldsymbol{1}_1'/N(1)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

，$\boldsymbol{I}$ は $\{N(0)+N(1)\}\times\{N(0)+N(1)\}$ の単位行列，$\boldsymbol{I}_t$ は $N(t)\times N(t)$ の単位行列である。$\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{Z}^*=\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}$ と定義すると，残差 2 乗和は $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{Z}^*\gamma^*)'(\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{Z}^*\gamma^*)$ なので，$\boldsymbol{\gamma}$ の最小 2 乗推定量が次のように得られる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}^*&=(\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^*)^{-1}\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{y}\\ &=\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}+\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{y}^{0*}+\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{y}^{1*}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

はじめに，(25) から $\boldsymbol{\gamma}^*$ を計算し，これを (24)（または (21)，(22)）に代入することで時間効果の推定量 $\boldsymbol{\alpha}^*$ が得られる。

2.4.2 ヘドニック補定指数 (Hedonic Imputed Index)

Silver and Heravi (2007) は，ヘドニック・アプローチを利用したラスパイレスおよびパーシェ価格指数を定式化している。半対数モデルのヘドニック価格関数 h の $t=0$ における理論値を $\hat{p}_n^0=h^0(\boldsymbol{z}_n^0)$ とおくと，二つの期間 $t=0,1$ の数量をどちらも 1 に基準化した場合の価格指数は次のように書ける。

$$P_{\mathrm{HLAS}}=\frac{\sum_{n=1}^{N(0)}h^1(\boldsymbol{z}_n^0)}{\sum_{n=1}^{N(0)}h^0(\boldsymbol{z}_n^0)},\quad P_{\mathrm{HPAA}}=\frac{\sum_{n=1}^{N(t)}h^1(\boldsymbol{z}_n^1)}{\sum_{n=1}^{N(t)}h^0(\boldsymbol{z}_n^1)}$$

ここで，P_{HLAS} はヘドニック・ラスパイレス価格指数，P_{HPAA} はヘドニック・パーシェ価格指数を示している。P_{HLAS} は基準時点の，P_{HPAA} は比較時点の特性ベクトルでそれぞれ評価していることがわかる。したがって，補定指数を計測するには，ヘドニック価格関数における特性パラメタも観察時点によって異なることを想定しなければならない。品質調整された補定指数を計測するには，以下で示されるようにヘドニック・アプローチを適用する。

ヘドニック時間ダミー指数を求める場合，データをプーリングして特性価格が一定のもとでの時間効果を推定した。しかしながら，プーリングデータで一度に二期間を推定する代わりに，属性価格パラメタを各期で推定することもできる。$\boldsymbol{\eta}^t$ を $N(t)\times 1$ の誤差項ベクトルとすると，$t=0$ 期と $t=1$ 期の回帰モデルは次のように書くことができる。

$$\boldsymbol{y}^t=\boldsymbol{1}_t\beta_t+\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{\gamma}^t+\boldsymbol{\eta}^t \tag{26}$$

ここで，β_t は t 期の時間効果，属性価格パラメタ $\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\gamma}^1$ は観察時期によって異なることを想定している。 ${\beta_t}^*$ および $\boldsymbol{\gamma}^{t*}$ を最小 2 乗推定量とおくと，最小 2 乗残差ベクトル $\boldsymbol{u}^t$ を用いて次が成立する。

$$\boldsymbol{y}^t = \mathbf{1}_t {\beta_t}^* + \boldsymbol{Z}^t \boldsymbol{\gamma}^{t*} + \boldsymbol{u}^t \tag{27}$$

残差の性質より $\begin{bmatrix}\mathbf{1}_t & \boldsymbol{Z}^t\end{bmatrix}' \boldsymbol{u}^t = \begin{bmatrix}0 & \mathbf{0}'_K\end{bmatrix}'$ なので，(27) の両辺に左側から $\mathbf{1}'_t$ を乗じると次が得られる。

$$\mathbf{1}'_0 \boldsymbol{y}^0 = N(0)\beta_0^* + \mathbf{1}'_0 \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^{0*} \tag{28}$$

$$\mathbf{1}'_1 \boldsymbol{y}^1 = N(1)\beta_1^* + \mathbf{1}'_1 \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^{1*} \tag{29}$$

したがって，(28)，(29) より時間効果の推定量はこれを β_0^*, β_1^* について解くことで得られる。

$$\beta_0^* = \frac{\mathbf{1}'_0 \boldsymbol{y}^0}{N(0)} - \frac{\mathbf{1}'_0 \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^{0*}}{N(0)} = \frac{\mathbf{1}'_0(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^{0*})}{N(0)} \tag{30}$$

$$\beta_1^* = \frac{\mathbf{1}'_1 \boldsymbol{y}^1}{N(1)} - \frac{\mathbf{1}'_1 \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^{1*}}{N(1)} = \frac{\mathbf{1}'_1(\boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^{1*})}{N(1)} \tag{31}$$

第 0 期から第 1 期への対数価格変化によるヘドニック時間ダミーの推定値は，差分 $LP_{HD} \equiv \alpha_1^* - \alpha_0^*$ より求められた。しかしながら，(26) の定式化より品質調整のためのパラメタ $\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\gamma}_1$ は二つの期間において異なるものと想定しているため，β_1^* と β_0^* の差分から単純には品質調整した価格変化を定義することができない。そこで，二つの期間において同じ品質調整を行うために，第 1 期の品質調整において第 0 期のパラメタ $\boldsymbol{\gamma}^{0*}$ を $\boldsymbol{\gamma}^{1*}$ の代わりに利用して，次の品質調整済み対数価格算術平均を定義する。

$$\delta_1^* = \frac{\mathbf{1}'_1 \boldsymbol{y}^1}{N(1)} - \frac{\mathbf{1}'_1 \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^{0*}}{N(1)} = \frac{\mathbf{1}'_1(\boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{Z}^1 \boldsymbol{\gamma}^{0*})}{N(1)} \tag{32}$$

(32) は (30) の β_0^* と同じ品質調整を行っているため，各期において品質一定の対数価格が形成される。そこで，第 0 期から第 1 期への変化は次の δ_1^* と β_0^* の差分で示される。

$$\phi_L^* = \delta_1^* - \beta_0^*$$

この対数価格変化によるヘドニック補定尺度を価格変化による「ラスパイレス型尺度」とよぶことにする。この対数価格変化の尺度は第 0 期の回帰式から得られる属性価格ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_0^*$ に依存している。 したがって，これとは対照的に第 1 期の回帰式から得られる属性価格ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_1^*$ を用いた対数価格変化の尺度も定義することができる。 第 0 期の品質調整において $\boldsymbol{\gamma}_1^*$ を利用した品質調整済み対数価格算術平均は次のように書ける。

$$\delta_0^* = \frac{\mathbf{1}'_0 \boldsymbol{y}^0}{N(0)} - \frac{\mathbf{1}'_0 \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^{1*}}{N(0)} = \frac{\mathbf{1}'_0(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Z}^0 \boldsymbol{\gamma}^{1*})}{N(0)} \tag{33}$$

(31) の品質調整済み対数価格算術平均 β_1^* と (33) における δ_0^* は同一の属性価格 $\boldsymbol{\gamma}^{1*}$ で調整されており，品質一定の価格変化を差分

$$\phi_P^* = \beta_1^* - \delta_0^*$$

で定義することができる。この対数価格変化によるヘドニック補定尺度を価格変化による「パーシェ型尺度」とよぶことにする。

差分 ϕ_L^* および ϕ_P^* はどちらも属性価格での調整が非対称的である。 そこで，二つの差分の中央値を用いて，第 0 期から第 1 期への対数価格変化によるヘドニック補定の推定値を次のように書く。

$$\begin{aligned} LP_{HI} &= \frac{1}{2}\phi_L^* + \frac{1}{2}\phi_P^* \\ &= \frac{\mathbf{1}_1'\left\{\boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{Z}^1(\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*})\right\}}{N(1)} - \frac{\mathbf{1}_0'\left\{\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Z}^0(\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*})\right\}}{N(0)} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで，価格の品質調整は $\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{\gamma}^*$ の代わりに，$\boldsymbol{Z}^t(\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*})$ で行われていることがわかる。 二つの期間のサンプルサイズが等しく，属性および属性価格が期間を通じて不変であれば二つの手法に差異はない。

2.4.3 時間ダミー指数と補定指数の差

時間ダミー指数と補定指数の差についてより詳しく検討する。LP_{HD} (23) と LP_{HI} (34) の差分を次のように表す。

$$LP_{HD} - LP_{HI} = \left(\frac{\mathbf{1}_1'\boldsymbol{Z}^1}{N(1)} - \frac{\mathbf{1}_0'\boldsymbol{Z}^0}{N(0)}\right)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*} - \boldsymbol{\gamma}^*\right) \quad (35)$$

すなわち，特性値の平均値が各期において等しく，かつプールされたヘドニック回帰モデルの属性価格が各期ごとに推定されたヘドニック属性価格の中央値に等しいならば，LP_{HD} (23) と LP_{HI} (34) は完全に等しくなる。

各期において回帰した β_0, β_1 の最小 2 乗推定量は (30)，(31) より $\beta_t = \mathbf{1}_t'(\boldsymbol{y}^t - \boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{\gamma}^{t*})/N(t)$ $(t = 0, 1)$ である。これを利用すると最小 2 乗残差は次のように書ける。

$$\boldsymbol{u}^t = \boldsymbol{M}^t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{M}^t\boldsymbol{Z}^t\boldsymbol{\gamma}^{t*} \quad (t = 0, 1) \quad (36)$$

ここで $\boldsymbol{M}^t = \boldsymbol{I} - \frac{1}{N(t)}\mathbf{1}_t\mathbf{1}_t'$ である。(36) において $\boldsymbol{y}^{t*} = \boldsymbol{M}^t\boldsymbol{y}^t$，$\boldsymbol{Z}^{t*} = \boldsymbol{M}^t\boldsymbol{y}^t$，と定義すると，属性価格ベクトルの推定量は

$$\boldsymbol{\gamma}^{t*} = \left(\boldsymbol{Z}^{t*\prime}\boldsymbol{Z}^{t*}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}^{t*\prime}\boldsymbol{y}^{t*} \quad (t = 0, 1) \quad (37)$$

である。

(35) 右辺のベクトル $\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*} - \boldsymbol{\gamma}^*$ に $2(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*})$ を乗じると次が得られる。

$$\begin{aligned} 2\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\right)\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*} - \boldsymbol{\gamma}^*\right) &= \boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^{0*} \\ &+ \boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^{1*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^{1*} \\ &- 2\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^* + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^*\right) \end{aligned} \quad (38)$$

ここで，(25) の両辺に $\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}$ を左側から乗じると

$$\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^* + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^*\right) = \left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{y}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{y}^{1*}\right)$$

であるから，式 (38) 右辺の最後の項は

$$\begin{aligned} -2\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^* + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^*\right) &= -2\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{y}^{0*} - 2\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{y}^{1*} \\ &= -2\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^{0*} - 2\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^{1*} \end{aligned} \quad (39)$$

と書ける。ただし，(37) より $\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\boldsymbol{\gamma}^{0*} = \boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{y}^{0*}$ ，$\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\boldsymbol{\gamma}^{1*} = \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{y}^{1*}$ である。したがって，(38) は (39) を用いると次のように整理できる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{0*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{1*} - \boldsymbol{\gamma}^{*}\right) &= -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\right)^{-1} \\ &\times \left(\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*} - \boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\right)(\boldsymbol{\gamma}^{1*} - \boldsymbol{\gamma}^{0*}) \qquad (40)\end{aligned}$$

以上より，(40) を (35) に代入すると，対数価格の差で示された時間ダミー指数と補定指数の差分は次の式で書き換えることができる。

$$\begin{aligned}LP_{HD} - LP_{HI} &= -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\boldsymbol{1}_1'\boldsymbol{Z}^1}{N(1)} - \tfrac{\boldsymbol{1}_0'\boldsymbol{Z}^0}{N(0)}\right)\left(\boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*} + \boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*}\right)^{-1} \\ &\times\left(\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*} - \boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}\right)(\boldsymbol{\gamma}^{1*} - \boldsymbol{\gamma}^{0*}) \qquad (41)\end{aligned}$$

(41) より，次の何れかの条件が満たされるときヘドニック時間ダミーおよびヘドニック補定法による二つの対数価格差分は同一となる。

- 各特性の平均値が二つの期間において等しい：$\frac{\boldsymbol{1}_1'\boldsymbol{Z}^1}{N(1)} = \frac{\boldsymbol{1}_0'\boldsymbol{Z}^0}{N(0)}$
- 特性値の分散・共分散行列が二つの期間において等しい：$\boldsymbol{Z}^{1*\prime}\boldsymbol{Z}^{1*} = \boldsymbol{Z}^{0*\prime}\boldsymbol{Z}^{0*}$
- 各期のヘドニック価格推定で得られた品質調整価格が同一である：$\boldsymbol{\gamma}^{1*} = \boldsymbol{\gamma}^{0*}$

2.4.4 ヘドニック時間ダミー指数 (hedonic time dummy index) とヘドニック補定指数 (hedonic imputed index) のまとめ

以上のようにヘドニック・ダミー指数とヘドニック補定指数の違いを示す要素を特定した。回帰式において，二つの期間における情報を利用することができ，同一の関数型で定式化されうるとすると，両アプローチが異なる結果を示す際に，二つの（幾何）平均をとることはまっとうなやり方かもしれない。しかしながら，そうするよりもどちらか片方の指数を利用した方がよい理由がそれぞれにある。

ヘドニック時間ダミー法（HD 法）の利用に際しての主要な関心事は，特性価格が期間を通じて一定であるという制約を持つ点である。しかし，実際にはいくつかの文献において特性変数のパラメタが観察期間を通じて一定あるとの帰無仮説は棄却される。これに対してヘドニック補定指数法（HI 法）は時間ダミーモデルよりも本質的にフレキシブルであり，これは HI 法における大きな利点になっている。

2.4.3 節では二つのアプローチ間の違いが次の三つの変わりうる要素に依存していることを示した。

- 特性平均値
- 特性値の分散・共分散行列
- 推定されたヘドニック特性価格

そして，これら 3 点の二つの期間における差異の乗算が最終的な違いをもたらす。 したがって，パラメタ自体の安定性のみが問題となっているわけではない。 たとえば，パラメタが不安定であったとしても，他の特性のわずかな変化によってその不安定性が軽減され，価格指数は似たようなものになるかもしれない。

HD 法の本質は二つの期間において観察される独立変数を利用し，特性変数が二つの期間において等しいという制約をもって，回帰分析を 1 回だけ実行するだけで済んでしまうという点である。この意味において，HD 法はこれらの制約が存在するためにフレキシブルではないと言えよう。 では，なぜこのような制約が課されるのであろうか。 おそらく次のような理由が指摘できる。

- 自由度を浪費しない。
- 第 0 期から第 1 期への総体的な価格変化について曖昧でない推定値を与える。
- 自由度が小さい状況において異常値の影響を最小化する

これに対して， HI 法は特性価格が通時的に変化することを許容し，定式化がよりフレキシブルである。しかしながら，

- 自由度を浪費させる。
- 二つの期間において全体の価格変化に関する推定値が再現しづらい。

などの点において分析のコストが上昇する。実際には，二つの指摘のうち後者の方はそれほど深刻ではないかもしれない。 価格変化についてのラスパイレスおよびパーシェ型推定値は指数理論において確立されているからである。これらのことを考慮すると，自由度が極端に限られていないのであれば，HI 法は好ましい方法であるといえる。

特性価格パラメタの安定性に関する仮定については，これをより柔軟にした分析手法がある。たとえば，ヘドニック・時間ダミー法とヘドニック補定指数を融合させた重複期間ヘドニック価格法 (Rolling Woindow Hedonic) が提案されている。市場の構造変化は様々な外的ショックが与えられた結果として発生するものであるが，その変化が市場に浸透するまでには，一定の調整期間が存在するものと考えられる。よって回帰係数もまた瞬時に変化するのではなく逐次的に変化するとみなすべきである。

しかしながら，HI 法のように，それぞれの期間ごとに分けてそれぞれの期間ごとの観測データを用いてモデルを推定すると，その前後で接続性を断ち切ることになる。そのため構造変化が逐次的に生ずるという仮定の下では，その方法が却って逐次的変化の過程にある価格の変化を捕捉しにくいものにしている。むしろ自然な着想として，あたかも移動平均を求めるのと同様に，一定の長さを推定期間にとり，その期間を移動させながらモデルを推定することで逐次的変化の過程にある価格指数を推定する方法が望ましいのではないかと考えられる。このような着想に経って提案されたのが，重複期間ヘドニック価格法 (Rolling Woindow Hedonic) となる。この手法は，アイルランド，日本の住宅価格指数の推計において採用されている[6] 。

2.5 ヘドニック生産価格指数の計測と品質調整

Diewert (2002) による生産者価格に関する品質調整ヘドニック指数の特徴を説明する。同論文で提案されている Konüs 型価格指数は，企業の技術および資源制約のもとでの収入最大化問題の値関数である収入関数を利用して定義される。収入関数は，生産物価格，生産技術，生産要素，生産物を構成する特性値からなる。

[6]清水・唐渡 (2007，第 6 章) を参照。

2.5.1　生産者の収入最大化問題

特性ベクトル $\boldsymbol{z}$ のもとでのヘドニック価格（生産者の支払許容総額）を

$$\Pi^t(\boldsymbol{z}) \equiv \rho^t f^t(\boldsymbol{z}) \tag{42}$$

と定義する。 ここで，ρ^t は t 期の生産物に利用される特性値全体の価値を示す価格，$f^t(\boldsymbol{z})$ は効用関数から分離可能な基数的効用を示している。(42) において効用関数は二つの期間において等しいと仮定する。

$$f^0 = f^1 \tag{43}$$

生産者はヘドニック価格 (42) を所与として収入最大化を行うものとする。

生産量を q 生産要素ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると，t 期の生産関数は $q = F^t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})$ と書ける。所与の生産技術のもとで次の収入を最大化する値関数が得られる。

$$\begin{aligned} R(\rho^s f^s, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v}) &\equiv \max_{q,\boldsymbol{z}} \{\rho^s f^s(\boldsymbol{z}) q : q = F^t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}); \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}^t\} \\ &= \max_{\boldsymbol{z}} \{\rho^s f^s(\boldsymbol{z}) F^t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}^t\} \end{aligned} \tag{44}$$

ここで $\boldsymbol{Z}^t$ は特性値の実現可能集合を示している。また，t 期の特性と投入要素を $\boldsymbol{z}^t, \boldsymbol{v}^t$ とするとき，対応する生産量は

$$q^t = F^t(\boldsymbol{z}^t, \boldsymbol{v}^t) \tag{45}$$

なので，t 期の最大化された収入関数は次のように書ける。

$$\begin{aligned} R(\rho^t f^t, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v}^t) &\equiv \max_{q,\boldsymbol{z}} \{\rho^t f^t(\boldsymbol{z}) q : q = F^t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}^t); \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}^t\} \\ &= \rho^t f^t(\boldsymbol{z}^t) q^t; \quad t = 0, 1 \end{aligned} \tag{46}$$

2.5.2　Konüs 型ヘドニック生産価格指数

第 0 期と第 1 期の間の Konüs 型ヘドニック生産物価格指数は，次のように定義される。

$$P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v}) = \frac{R(\rho^1 f^1, F^t, Z^t, \boldsymbol{v})}{R(\rho^0 f^0, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v})} \tag{47}$$

二つの収入関数における違いはヘドニック価格 $\rho^1 f^1$ と $\rho^0 f^0$ による。 仮定 (43) より

$$\max_{\boldsymbol{z}} \{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}) F^t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}^t) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}^t\} = \max_{\boldsymbol{z}} \{\rho^1 f^0(\boldsymbol{z}) F^t(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}^t) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}^t\}$$

なので，(47) は次のように書き換えることができる。

$$P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v}) = \frac{\rho^1}{\rho^0} \frac{R(\rho^0 f^0, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v})}{R(\rho^0 f^0, F^t, \boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v})} = \frac{\rho^1}{\rho^0} \tag{48}$$

ヘドニック価格の推定において，特性部分の効用が通時的に一定であるという仮定をおけば，Konüs 型の生産物価格指数は極めて簡単に推定することができる。

仮定 (43) が満たされない一般的なケースについて考えよう。 (48) の価格指数を基準として，以下の不等式で観察可能なヘドニック・ラスパイレス生産価格指数およびパーシェ生産価格指数が定

義できる。

$$P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0) = \frac{R(\rho^1 f^1, F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0)}{R(\rho^0 f^0, F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0)}$$
$$\geqq \frac{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^0)}{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^0)} = P_{HL} \tag{49}$$

$$P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1) = \frac{R(\rho^1 f^1, F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1)}{R(\rho^0 f^0, F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1)}$$
$$\leqq \frac{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^1)}{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^1)} = P_{HP} \tag{50}$$

ここで， $P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0)$ および $P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1)$ は観察できない理論上の生産価格指数である。 (49) は 理論上の生産価格指数 $P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0)$ が観察可能なラスパイレス生産価格指数 P_{HL} を下限に持つことを示しており， (50) は理論上の生産価格指数 $P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1)$ が観察可能なパーシェ生産価格指数 P_{HP} を上限に持つことを示している。

生産価格指数を構成する $F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0$ あるいは $F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1$ の代わりにこれらの凸結合式（加重平均値）を用いることで， 理論上のラスパイレス生産価格指数とパーシェ生産価格指数がとりうる範囲を定めることができる。スカラー $\lambda \in [0,1]$ を利用すると， $\boldsymbol{Z}^t, \boldsymbol{v}^t, F^t$ の $t = 0,1$ 期の凸結合は次のように書ける。

$$\boldsymbol{Z}(\lambda) = (1-\lambda)\boldsymbol{Z}^0 + \lambda \boldsymbol{Z}^1$$
$$\boldsymbol{v}(\lambda) = (1-\lambda)\boldsymbol{v}^0 + \lambda \boldsymbol{v}^1$$
$$F(\lambda) = (1-\lambda)F^0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}(\lambda)) + \lambda F^1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}(\lambda))$$

したがって，ヘドニック生産価格指数は

$$P(\lambda) = \frac{R(\rho^1 f^1, F(\lambda), \boldsymbol{Z}(\lambda), \boldsymbol{v}(\lambda))}{R(\rho^0 f^0, F(\lambda), \boldsymbol{Z}(\lambda), \boldsymbol{v}(\lambda))} = \frac{\max_{\boldsymbol{z}}\{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z})F(\lambda) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}(\lambda)\}}{\max_{\boldsymbol{z}}\{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z})F(\lambda) : \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}(\lambda)\}} \tag{51}$$

と書ける。 $\lambda = 0$ のとき，$P(\lambda)$ は $P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^0, \boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{v}^0)$ を意味するので，(49) の不等式より

$$P(0) \geqq P_{HL} = \frac{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^0)}{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^0)} \tag{52}$$

である。 また， $\lambda = 1$ のとき，$P(\lambda)$ は $P(\rho^0 f^0, \rho^1 f^1, F^1, \boldsymbol{Z}^1, \boldsymbol{v}^1)$ を意味するので，(50) の不等式より

$$P(1) \leqq P_{HP} = \frac{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^1)}{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^1)} \tag{53}$$

Diewert (1983; 1060-1061) の証明を利用することで， $P(\lambda)$ が $[0,1]$ において連続関数であるならば，$0 \leqq \lambda^* \leqq 1$ かつ

$$P_{HL} \leqq P(\lambda^*) \leqq P_{HP} P_{HP} \leqq P(\lambda^*) \leqq P_{HL}$$

となるような λ^* が存在することを示すことができる。つまり，0,1 期間における理論的なヘドニック生産価格指数は，上述の $P(\lambda^*)$ を経由して考えると，観察可能なラスパイレス生産価格指数とパーシェ生産価格指数の間に存在していることがわかる。 ただし，この結果を得るには， (51) 式の分母，分子にあるヘドニック・モデル価格関数 $\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}), \rho^1 f^1(\boldsymbol{z})$， 生産関数 $F^0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}), F^1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})$, および実現可能な特性値の集合 $\boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{Z}^1$ について λ に関する連続性が仮定されなければならない。連続性のための十分条件は

- 生産関数 $F^0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}), F^1(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})$ は正であり，$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{v}$ について連続である。
- ヘドニック・モデル価格関数 $f^0(\boldsymbol{z}), f^1(\boldsymbol{z})$ は正であり，$\boldsymbol{z}$ について連続である。
- ρ^0, ρ^1 は正である。
- 集合 $\boldsymbol{Z}^0, \boldsymbol{Z}^1$ は凸集合であり，有界かつ閉集合である。

以上より，観察可能な価格指数によって境界範囲が決められる理論的な生産価格指数があることがわかった。理論的指数の近似である最良の値を得るために二つの境界値の調整平均をとることは自然である。ラスパイレスおよびパーシェ生産価格指数の調整平均関数を $m(P_{HL}, P_{HP})$ と書くと，Diewert(1997; p.138) の議論より m は幾何平均でなければならないことが確かめられる。すなわち，理論的生産価格指数の近似値としての最良の候補は (49), (50) を用いて次の観察可能なフィッシャー・ヘドニック生産価格指数となる。

$$P_{HF} = (P_{HL}P_{HP})^{\frac{1}{2}} = \frac{\rho^1}{\rho^0}\left(\frac{f^1(\boldsymbol{z}^0)}{f^0(\boldsymbol{z}^0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{f^1(\boldsymbol{z}^1)}{f^0(\boldsymbol{z}^1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

もし，二つの期間におけるヘドニック・モデル価格関数が同一で仮定 $f^0 = f^1$ が満たされるならば，$P_{HF} = \rho^1/\rho^0$ に変形できる。 また，観察可能な価格をそれぞれ

$$P^0 = \rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^0) \qquad P^1 = \rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^1) \tag{54}$$

と定義すると，ラスパイレスおよびパーシェ生産価格指数は (54) を用いて，品質調整した価格比になることが示される。

$$P_{HL} = \frac{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^0)}{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^0)} = \frac{P^1/f^1(\boldsymbol{z}^1)}{P^0/f^1(\boldsymbol{z}^0)} \tag{55}$$

$$P_{HP} = \frac{\rho^1 f^1(\boldsymbol{z}^1)}{\rho^0 f^0(\boldsymbol{z}^1)} = \frac{P^1/f^0(\boldsymbol{z}^1)}{P^0/f^0(\boldsymbol{z}^0)} \tag{56}$$

したがって，(55)，(56) を利用すると，フィッシャー・ヘドニック生産価格指数は次のように書くこともできる。

$$P_{HF} = (P_{HL}P_{HP})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{P^1/f^1(\boldsymbol{z}^1)}{P^0/f^1(\boldsymbol{z}^0)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{P^1/f^0(\boldsymbol{z}^1)}{P^0/f^0(\boldsymbol{z}^0)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{57}$$

すなわち，フィッシャー・ヘドニック生産価格指数はヘドニック回帰モデルを推定することで得られる品質調整済みの二つの価格指数の幾何平均から求めることができる。

このように，ヘドニック・アプローチは生産物使用者だけでなく，生産物供給者の価格を品質調整する際にも有用である。この場合，競争的な企業の生産活動を想定した生産物の価格指数を定義するために，Konüs による最大化された収入関数（支払許容の総額）が用いられる。二つの時点における属性部分の基数的効用関数が同一であれば，理論的な生産価格指数は観察可能な生産物価格の比で示すことができる。

また，一般的なケースにおいて，ある一定の制約のもとで理論的生産価格指数が観察可能なラスパイレスおよびパーシェ生産価格指数を境界値とする範囲に存在していることが示される。さらに，理論的指数の近似候補として，ラスパイレスおよびパーシェ生産価格指数の調整平均であるフィッシャー・ヘドニック生産価格指数を提案することができる。

2.6 ヘドニック価格法の特徴・優位点・問題点

Rosen(1974) の研究は差別化された生産物の市場均衡理論を発展させたものである。商品供給者のオファー関数，商品需要者の付け値関数およびヘドニック市場価格関数の構造との間の関係を厳密に検討し，商品の市場価格を消費者および生産者の行動から特徴づけている。

付け値関数を利用すると特性の変化に対する消費者の支払容認額を求めることができる。市場均衡では市場価格と付け値が一致するだけでなく，ヘドニック関数と付け値関数の勾配も同一になる。付け値関数は凹関数であるため，特性の追加的な変化に対する支払許容額は市場価格の変化よりも小さい。すなわち，市場価格関数の特性の限界値は需要者が同質でない限り支払許容額を過大に推定する可能性があるので注意を要する。しかし，十分に小さい特性値の変化を想定するのであれば，市場価格関数の限界値は支払許容額の近似値として利用できる。したがって，既往研究では市場価格関数の推定が一般的である。

ヘドニック・アプローチを用いれば，他時点のサンプルを利用して品質調整された価格の変化を計測することができる。プーリングデータに時間ダミーを用いて，特性価格が不変のもとでヘドニック関数における時間効果を推定する方法は最も簡便であり広く利用されている。ヘドニック補定指数は，特性価格が変化することを許容して，観察時期ごとにヘドニック関数を推定し，ラスパイレス型尺度とパーシェ型尺度を利用して価格変化を計測する。ヘドニック時間ダミー指数とヘドニック補定指数は異なる結果を示すが，その要因は，特性価格が二つの期間において一定であるか否かの違いによってのみもたらされるものではない。各特性の平均値が二つの期間において異なる，または特性行列の分散・共分散が二つの期間において異なる場合にも二つの指数に違いが生じる。

ヘドニック・アプローチは生産物使用者だけでなく，生産物供給者の価格を品質調整する際にも有用である。Konüs による最大化された収入関数（支払許容の総額）を利用して生産者価格指数は定義できる。このとき，二つの時点における属性部分の基数的効用関数が同一であれば，理論的な生産価格指数は観察可能な生産物価格の比で示すことができる。一般的なケースにおいて，ある一定の制約のもとで理論的生産価格指数が観察可能なラスパイレスおよびパーシェ生産価格指数を境界値とする範囲に存在していることが示される。

このように，ヘドニック価格法は，どの時間効果の計測手法を採択するかによって価格指数が大きく異なることがわかる。ここで，不動産価格指数の推計におけるヘドニック価格法の優位点 (advantages) と問題点 (disadvantages) を整理する。優位点としては，次の点を挙げることが出来る。

- 経済理論，指数理論の背景を持つとともに，その理論的なバイアスも明確である。
- 他の手法と比較して，取引価格データをすべて利用することが可能であるために，最も効率的な手法であると言える。
- 不動産が持つ多くの属性を制御することが出来ることから，用途・地域毎にきめ細かな指数に分類することが出来る。
- 既に，消費者物価統計などの推計で活用されていることから，他の経済統計との整合性を持つことが出来る。

問題点としては，

- 不動産に関する多くの属性を収集することが必要となることから，情報収集コストが高い。

- 不動産の価格を決定するための重要な属性を収集できない場合においては，過小定式化バイアス (omitted variable bias) の問題に直面する。
- 採択する関数形によって異なる指数が算出されてしまう。つまり，再現性が低い。
- 不均一性が強い場合は，品質をコントロールすることが出来ない場合がある。
- 経済理論的背景や推計手続きなどが複雑であるため，指数の作成当局において特別な能力が必要となったり，利用者に説明することが困難である。

3 リピートセールス価格指数

ヘドニック価格法と合わせて，不動産価格指数の実用においては，Bailey, Muth and Nourse (1963)，Case and Shiller (1987，1989) によって精緻化されたリピート・セールス法もまた最も利用されている手法の一つである。

リピート・セールス法では，ヘドニック価格回帰モデルにおけるデータ発生プロセスを想定しているので，ヘドニック法で生じる問題点の一部が引き継がれる。ただし，同一物件の比較を行うため，もし属性や属性価格に変化がなければ，過少定式化バイアスが解消される。推計方法が簡単なことから，再現性が高く，推計効率の高い手法であるというメリットを持つ。

どちらの方法においても，推計手法がもたらすバイアスが存在する。価格指数は長期間の価格データを観察することを目的としているため，観察期間が長くなると同一物件の属性や属性価格に変化が生じることによる「集計バイアス (aggregation bias)」が予想される。

特に，不動産市場の需給バランスを要因とする市場全体に共通の効果（時間効果）と個々の不動産の変化に関する効果，とくに経年劣化の効果（年齢効果）を分離できないことは，リピート・セールス法の利用において極めて重要な問題となる。不動産の経年劣化の影響を無視した場合，リピート・セールス価格指数は大きく下方にバイアスを持つことが予想される。

また，複数回取引された物件だけを選択的に利用するためサンプル・サイズが減少し，サンプルにセレクション・バイアスが生じることも懸念されている。加えて，繰り返し取引が行われる期間において「物件の品質に変化がない」とする強い仮定を置いているものの，物件の経年劣化，修繕投資または周辺環境の変化が発生することは容易に予想されるため，仮定は整合的でない。

本節はリピート・セールス法の概要を示し，どのような問題点が生じるのかを述べる。第 2 節では標準的なリピート・セールス法の分析構造と価格指数の特徴について説明する。第 3 節では標準的なリピート・セールス法が持つ集計バイアス，第 4 節ではサンプル・セレクション・バイアス，についてそれぞれの問題点とその解決方法を提示する。

3.1 標準的なリピート・セールス価格指数

3.1.1 リピート・セールス回帰モデル

多時点の不動産価格がデータとして観察されるとき，第 n 物件の t 時点のヘドニック市場価格回帰モデルは次の形で記述できる。

$$y_n^t \equiv \ln p_n^t = \alpha_t + \boldsymbol{z}_n^{t\prime}\boldsymbol{\gamma}^t + \epsilon_n^t \quad (n = 1, 2, \cdots, N(t);\ t = 0, 1, \cdots, T) \tag{58}$$

ここで，y_n^t は不動産価格の対数 ($\ln p_n^t$)，α_t は未知の第 t 時点の時間効果，定数項を含む説明変数ベクトルは $\boldsymbol{z}_n^{t\prime} = (1, z_{n2}^t, \cdots, z_{nk}^t, \cdots, z_{nk'}^t)$，係数ベクトルは $\boldsymbol{\gamma}^t = (\gamma_1, \gamma_2^t, \cdots, \gamma_k^t, \cdots, \gamma_{k'}^t)'$，

ϵ_n^t は誤差項である。 γ_1 はモデル全体の定数項係数，$\gamma_2^t, \cdots, \gamma_{k'}^t$ は属性の限界効果（属性の品質調整パラメタ）である。

第 n 物件が s 期と t 期（$t > s$）の二度に渡って市場で取引されるものとしよう。 このとき，(58) に従えば二つの期間の対数価格差分は次のように書ける。

$$Y_n \equiv \ln p_n^t - \ln p_n^s = (\alpha_t - \alpha_s) + (\boldsymbol{z}_n^{t\prime}\boldsymbol{\gamma}^t - \boldsymbol{z}_n^{s\prime}\boldsymbol{\gamma}^s) + v_n \tag{59}$$

ここで，v_n はそれぞれの期間における誤差項の差分（$\epsilon_n^t - \epsilon_n^s$）である。 すなわち価格変化率（対数差分）は時間効果の差，属性価値（属性の品質と数量）の変化，および誤差によって生じたデータであるとみなすことができる。

Bailey, Muth and Nourse (1963) および Case and Shiller (1987，1989) の RS 法は暗黙裡に次の仮定を設けて (59) を再定式化している。

仮定 1. すべての属性は時間を通じて不変である。

仮定 2. すべての属性パラメタは時間を通じて不変である。

すなわち，仮定 1 は $\boldsymbol{z}_n^t = \boldsymbol{z}_n^s$ を， 仮定 2 は $\boldsymbol{\gamma}^t = \boldsymbol{\gamma}^s$ を意味する。 第 n 物件は s 期に 1 回目の，t 期に 2 回目の取引を行うものとすると， 仮定 1，2 のもとでの時間ダミー変数を用いた s 期と t 期それぞれのヘドニック回帰式 (58) を書き直して次のようになる。

$$y_n^s = \bar{\boldsymbol{d}}_n'\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{z}_n'\boldsymbol{\gamma} + \epsilon_n^s \tag{60}$$

$$y_n^t = \bar{\bar{\boldsymbol{d}}}_n'\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{z}_n'\boldsymbol{\gamma} + \epsilon_n^t \tag{61}$$

ただし， $\bar{\boldsymbol{d}}_n = (\bar{d}_n^1, \cdots, \bar{d}_n^T)'$ は 1 回目の取引における時間ダミー変数， $\bar{\bar{\boldsymbol{d}}}_n = (\bar{\bar{d}}_n^1, \cdots, \bar{\bar{d}}_n^T)'$ は 2 回目の取引における時間ダミー変数であり，

$$\bar{d}_n^u = \begin{cases} 1 & u = s \\ 0 & u \neq s \end{cases}, \quad \bar{\bar{d}}_n^u = \begin{cases} 1 & u = t \\ 0 & u \neq t \end{cases},$$

また， $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \cdots, \alpha_t, \cdots, \alpha_T)$ は時間効果ベクトルである。モデル全体の定数項 $\boldsymbol{z}^1$ とダミー変数の間に線型関係が生じるので， ここでは，0 期の時間効果を $\alpha_0 = 0$ に基準化する。 したがって，0 期に対応する時間ダミー変数 $\bar{d}_n^0$ および $\bar{\bar{d}}_n^0$ は除外されている。

1 回目と 2 回目のヘドニック回帰式における時間ダミー変数の差分を次の $T \times 1$ ベクトルで定義する。

$$\underbrace{\boldsymbol{D}_n}_{T\times 1} = \bar{\bar{\boldsymbol{d}}}_n - \bar{\boldsymbol{d}}_n \tag{62}$$

ただし，

$$D_n^u = \begin{cases} 1 & u = t \ (2\ \text{回目の取引}) \\ -1 & u = s \ (1\ \text{回目の取引}) \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases},$$

である。 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_n, \cdots, Y_N)'$， $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_1, \cdots, \boldsymbol{D}_n, \cdots, \boldsymbol{D}_N)'$ とおくと リピートセールス回帰モデルが次のように定義できる。

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{v} \tag{63}$$

(63) の最小 2 乗推定量は $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{Y}$ である。 s 期に 1 回目の，t 期に 2 回目の取引がなされた任意の物件の理論値（対数価格差分）は $\hat{Y}_n = \ln\widehat{\left(\frac{p_n^t}{p_n^s}\right)} = \hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_s$ したがって，s 期を基準とした $t = 0, 1, \cdots, T$ 期の価格指数は $\widehat{p_n^t/p_n^s} = \exp(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_s)$ となる。多重共線性を避けるために第 0 期の時間ダミー変数を除外し，$\alpha_0 = 0$ とおいたので，0 期を基準とした価格指数を計測することができる。 Bailey, Muth and Nourse (1963) において示された [BMN] 価格指数は

$$I^{\mathrm{BMN}} = \{\exp(0), \exp(\hat{\alpha}_1), \cdots, \exp(\hat{\alpha}_T)\} \tag{64}$$

となる。

3.1.2 ランダムウォーク誤差項

(60) と (61) の誤差項について，

$$E(\epsilon_n^t) = 0,\ E[(\epsilon_n^t)^2] = \sigma_2,\ E(\epsilon_n^t\epsilon_m^s) = 0\ (n \neq m, t \neq s) \tag{65}$$

それぞれのヘドニック回帰式において，誤差項は均一分散で，系列相関がない。 この場合，(60) と (61) の差分である (63) の誤差項 $\boldsymbol{\upsilon} = \{\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_N\}'$ は，

$$E(\upsilon_n) = 0,\ E(\upsilon_n^2) = E\left[(\epsilon_n^t)^2\right] + E\left[(\epsilon_n^s)^2\right] = 2\sigma^2,\ E(\upsilon_n\upsilon_m) = 0\ (n \neq m) \tag{66}$$

であるから，(66) は均一分散，系列相関なしが満たされている。 Bailey, Muth and Nourse (1963) の価格指数もこのような想定のもとで計測されている。

これに対して Case and Shiller (1987, 1989) は，物件の取引間隔が広がるほど不動産固有の構成要素が持つノイズの分散が大きくなり，対数価格変化は均一分散ではないとリピート・セールス回帰モデルを提示した。 同論文において対数価格変動に関する誤差項は次のランダム・ウォークを含む式で仮定されている

$$\epsilon_n^t = h_n^t + \nu_n^t, \quad \nu_n^t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\nu^2) \tag{67}$$

$$h_n^t = h_n^{t-1} + \eta_n^t, \quad \eta_n^t \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma_\eta^2) \tag{68}$$

$$(n = 1, \cdots, N;\ t = 0, 1, \cdots, T)$$

ここで，(67) の右辺第 1 項は (68) に示されるランダム・ウォークであり，(67) の右辺第 2 項は以下のようにホワイト・ノイズを仮定する。

$$E(\nu_n^t) = 0,\ E\left[(\nu_n^t)^2\right] = \sigma^2,\ E(\nu_n^t\nu_m^s) = 0\ (n \neq m, t \neq s),\ E(\epsilon_n^t\nu_m^s) = 0 \tag{69}$$

リピート・セールス回帰モデルの誤差項は $\upsilon_n = \epsilon_n^t - \epsilon_n^s = h_n^t - h_n^s + \nu_n^t - \nu_n^s$ である。ここで，$h_n^t - h_n^s = \sum_{u=1}^{t-s}\eta_n^{s+u}$ であるから (69) より

$$E(\epsilon_n^t - \epsilon_n^s) = 0 \tag{70}$$

$$E\left[(\epsilon_n^t - \epsilon_n^s)^2\right] = \sigma_\nu^2 + (t - s)\sigma_\eta^2 \tag{71}$$

が得られる。 この場合，取引間隔 $t - s$ が大きくなると，リピート・セールス回帰モデルの誤差分散も増大する（分散不均一）ことがわかる。

Case and Shiller (1987, 1989) はこの分散不均一に対して 3 段階での推定方法を提案している (Weighted Repeat Sales [WRS] Method，重み付きリピート・セールス法)。

1. BMN 価格指数を求めた場合と同じく (63) を推定し，対数価格差分を時間ダミーの差分に回帰して，最小 2 乗残差 $\hat{\upsilon}_n$ を求める。

2. (71) の $\sigma_\nu^2, \sigma_\eta^2$ を推定するために，残差 2 乗値 $\hat{\upsilon}_n^2$ を定数項と取引間隔 $A_n = t - s$ に回帰する。($\hat{\upsilon}_n^2 = a + bA_n + \mathrm{error}_n$)

3. 2 段階目の理論値を $\hat{\hat{\upsilon}}_n^2 = \hat{a} + \hat{b}A_n$ とし，その平方根の逆数 $1/\hat{\hat{\upsilon}}_n$ をウェイトとして (63) の重み付き最小 2 乗法を実行する。

3 段階目におけるウェイト（$N \times N$ 対角行列）を

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 1/\hat{\hat{\upsilon}}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\hat{\hat{\upsilon}}_N \end{pmatrix}$$

と定義すると，重み付きリピートセールス回帰モデルは次のように書ける。

$$\boldsymbol{Y}^* = \boldsymbol{D}^*\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\upsilon}^* \tag{72}$$

ただし， $\boldsymbol{Y}^* = \hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{Y}$， $\boldsymbol{D}^* = \hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{\upsilon}^* = \hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\upsilon}$ である。 したがって，実行可能な一般化最小 2 乗推定量は $\tilde{\alpha} = (\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{\omega}}'\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{\omega}}'\hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{Y}$ であり，Case and Shiller による [WRS] 価格指数は

$$I^{\mathrm{WRS}} = \{\exp(0), \exp(\tilde{\alpha}_1), \cdots, \exp(\tilde{\alpha}_T)\} \tag{73}$$

となる。

Hill, Sirmans and Knight (1997)， Knight, Hill and Sirmans (1999) では，ヘドニック価格関数の誤差項を $\epsilon_n^t = \epsilon_n^{t-1} + \nu_n^t$ と定義している。 この場合リピート・セールス回帰モデルの誤差分散は $E\left[(\epsilon_n^t - \epsilon_n^s)^2\right] = (t-s)\sigma_\nu^2$ となる。 したがって，取引間隔を $A_n\ (n = 1, 2, \cdots, N)$ とするとき

$$\upsilon_n \equiv \epsilon_n^t - \epsilon_n^s \sim N(0, A_n\sigma_\nu^2)$$

であり，重み付きリピート・セールス回帰モデルは次のように書ける。

$$\boldsymbol{Y}^{**} = \boldsymbol{D}^{**}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\upsilon}^{**} \tag{74}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sqrt{A_N} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Y}^{**} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{Y}$， $\boldsymbol{D}^{**} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{D}$， $\boldsymbol{\upsilon}^{**} = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\upsilon}$ である。

3.2 集計バイアス

リピートセルース法において，集計バイアスは数多くの文献で指摘されている重要な問題である。集計バイアスとは (59) のリピートセールス回帰モデルにおける二つの仮定 （仮定 1. すべての属性は時間を通じて不変である， 仮定 2. すべての属性パラメタは時間を通じて不変である。） に関する問題である。 たとえば，不動産資本の劣化・陳腐化，修繕やメンテナンス，周辺の地理的環境

の変化などによる属性価値の変化があれば，このような仮定は成立しなくなる。 また，Dombrow, Knight and Sirmans (1997) は属性パラメタが観測時期とともに変化（仮定 2 の検証）するかどうかを検定している。 安定的な価格指数を計測するには十分な長さの観察期間が必要であるが，観察期間が長くなるほど，このような構造変化は生じやすい。 最も大きな問題は，Bailey et al. (1963) や Palmquist (1979) などで指摘されている経年劣化による不動産価格の下落効果である。 以下では，標準的なリピート・セールス価格指数が時間効果と年齢効果を分離できていないことを示し，時間効果と年齢効果を同時に推定する手法について論じる。

3.2.1 年齢効果を除外することによるバイアス

取引間隔が広がると不動産は経年劣化し市場価値が下落する。このことを McMillen (2003) のわかりやすいモデルで説明する。t 期の不動産価格を $p^t = Q^t H^t$ と定義する。ここで $Q^t = \exp(\alpha_t + \gamma_x x)$ は床面積 1 単位あたりの価格であり，立地点（都心からの距離 x）によって異なるものとしよう。α_t は時間効果，$\gamma_x < 0$ とする。 H^t は不動産の床面積であり，土地 L と資本 K^t を用いて生産されるものとする （コブ=ダグラス型生産関数を仮定する：$H^t = L^{1-\xi}K^{\xi}$）。 不動産資材は時間とともに劣化するのでこれを $K^t = K[0]\exp(c\cdot\tau)$ と定義する。 ここで， $K[0]$ は不動産の建築後年数が 0 年のときの不動産資本，$c < 0$ は 1 期間あたりの資本の減衰率，τ 建築後年数である。 以上より t 期の不動産価格は次のように書ける。

$$\ln p^t = \ln Q^t + \ln H^t = \alpha_t + \gamma_x x + (1-\xi)\ln L + \beta K[0] + \beta\cdot c\cdot\tau$$

したがって，s 期と t 期の二度に渡って取引された第 n 物件の対数価格差分は次のようになる。

$$Y_n = \ln p_n^t - \ln p_n^s = (\alpha_t - \alpha_s) + \theta A_n + \upsilon_n \tag{75}$$

ここで，$\theta = \beta\cdot c < 0$，$A_n = t - s > 0$，$\upsilon_n$ は誤差項の差分である。不動産資本の経年劣化がある場合，対数価格差分は時間効果の差分だけでなく年齢効果の差分も考慮する必要がある。

BMN 型のリピートセールス法における時間効果の推定量は $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{Y}$ であるが，もし真のデータ発生プロセスが (75) より $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\theta + \boldsymbol{\upsilon}$ であるならば，$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{A}\theta + (\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\upsilon}$ より，

$$E(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) - \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{A}\theta \neq 0 \tag{76}$$

となり，$\theta < 0$ ならば BMN 型時間効果は下方にバイアスをもつ。つまり，BMN 型時間効果は年齢効果を分離することができない。

しかしながら，(75) において時間効果と年齢効果 θ を同時に推定することはできない。(62) を用いると，第 n 物件の経年差と時間ダミー差分との間には次に示される線型関係が成立する。

$$\begin{aligned} A_n = t - s = \boldsymbol{D}_n'\boldsymbol{u} &= \sum_{u=1}^{T} D_n^u u \\ &= \underbrace{D_n^1}_{0}\cdot 1 + \cdots + \underbrace{D_n^s}_{-1}\cdot s + \cdots + \underbrace{D_n^t}_{+1}\cdot t + \cdots + \underbrace{D_n^T}_{0}\cdot T \end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{u} = (1, 2, \cdots, s, \cdots, t, \cdots, T)'$ である。したがって，年齢効果付きリピートセールス回帰モデルは

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{u}\theta) + \boldsymbol{\upsilon} \tag{77}$$

であるが，$\boldsymbol{\alpha}$ と θ を識別することができない。 以上より，経年劣化の影響を無視すれば価格指数はバイアスをもち， 経年劣化の影響を考慮すると多重共線性により推定ができないという問題が生じる。

3.2.2　年齢効果の推定

リピート・セールス法における時間効果と経年効果が通常の方法では分離できないという問題は Bailey, Muth and Nourseet (1963)， Palmquist (1979)， Hill, Sirmans and Knight (1997)， Hill, Knight and Sirmans (1999)， Chau, Wong and Yiu (2005)， Cannaday, Munneke and Yang (2005) などによって指摘されている。しかし，一般にリピート・セールス価格指数の推定では経年効果は無視されることが多い。(77) を推定する試みとして，Palmquist (1979) は $\boldsymbol{u}\theta$ をリピート・セールス回帰式とは独立に推定した上で，(77) を満たすように時間効果を調整している。Cannaday, Munneke and Yang (2005) は年齢効果を推定するために (75) のような連続的な項の代わりに建築後年数についてのダミー変数を導入した多変量リピート・セールス・モデル（multivariate repeat-sales model）を提案している。 これとは別に，時間ダミー変数と経年の間の線型関係を崩すことによって推定する方法が提案されている。 Chau, Wong and Yiu (2005) は年齢効果に非線型性を仮定（Box-Cox 変換）することで， Hill, Knight and Sirmans (1997) は Case and Quigley (1991) のハイブリッド法（ヘドニックとリピート・セールスのジョイント・モデル推定）を改善することで，時間効果と年齢効果の識別を図っている。

Cannaday, Munneke and Yang (2005) は経年ダミー変数を利用した次のモデルを提案している。

$$Y_n = \boldsymbol{D}_n'\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{B}_n'\boldsymbol{\theta} + \upsilon_n \tag{78}$$

ここで， $\boldsymbol{B}_n = (B_n^1, \cdots, B_n^j, \cdots, B_n^{J-1})'$ は建築後年数に対応するダミー変数であり，次のように定義する。

$$B_n^j = \begin{cases} 1 & j = t^\tau \,(2\text{ 回目の取引時点における建築後年数}) \\ -1 & j = s^\tau \,(1\text{ 回目の取引時点における建築後年数}) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

また， $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_j, \cdots, \theta_{J-1})'$ は経年ダミーの係数である。建築後年数ダミーは新築 $(j = 0)$ とサンプルにおける建築後年数の最大値 $(j = J)$ を取り除いている。

(78) では，0 期の時間ダミー (D_n^0)，建築後年数 0 年のダミー変数 (B_n^0) に加えて，多重共線性を避けて推定を行うために B_n^J を落としている。Cannaday et al. (2005) によると，この理由は一般に扱うデータは観察期間 $[0, T]$ よりも建築後年数 $[0, J]$ の方が幅が広く，自由度低下の影響が少ないと考えられるからである。 建築後年数の最初と最後のダミーを落とすということは，この標本の範囲における価格変化率が 0 であると仮定することに等しい。いま，年あたりの建築後年数に関する価格変化率の平均値が $\bar{\theta}$ であるとしよう。しかし，一般に $\bar{\theta} < 0$ と考えられるので，1 回目と 2 回目の取引間隔 $t - s$ の範囲で変化率が 0 であると仮定することは， 価格変化率の平均値 $\bar{\theta}$ を過大推定していることに他ならなず，結果として時間効果の過小推定につながる。 したがって，時間効果は $-\bar{\theta}(t-s)$ だけ上方に修正され，年齢効果は $\bar{\theta}(t-s)$ だけ下方に修正される必要がある。

以上のことを考慮して (78) より $\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ を最小 2 乗法で推定すると，s 期を基準年，t 期を比較年とし，基準年における建築後年数が j の場合の多変量リピートセールス法建築後年数調整済み価格指数 (Age-Adjusting Multivariate Repeat Sales Price Index: AAMRS 価格指数) が定義できる。

$$\begin{aligned} I_{s,t,j}^{\mathrm{AAMRS}} &= \frac{\exp\left[\hat{\alpha}_t - \bar{\theta}(t-s) + \theta_{j+(t-s)} + \bar{\theta}(t-s)\right]}{\exp(\hat{\alpha}_s - \theta_j)} \\ &= \exp(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_s + \theta_{j+(t-s)} - \theta_j) \end{aligned} \tag{79}$$

ここで，$t - s$ 期間において， 時間効果による価格変化率は $\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_s$， 年齢効果による価格変化率は $\theta_{j+(t-s)} - \theta_j$ である。$\bar{\theta}$ は各期ごとのサンプルで $\ln p_n^t = \mathrm{const.} + \theta_t\tau_n + \mathrm{error}_n$ を推定し，建

築後年数に関する変化率の平均値 $\bar{\theta} = \sum_t \hat{\theta}_t / T$ より求める。ここで，τ_n は建築後年数である。建築後年数を一定にコントロールした価格指数（多変量リピートセールス法建築後年数調一定価格指数，Age-Constant Multivariate Repeat Sales Price Index: ACMRS 価格指数) は次より得られる。

$$I_{s,t}^{\mathrm{ACMRS}} = \exp(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_s - \bar{\theta} t) \tag{80}$$

論文の中ではこれを Pure Time Index とよんでいる。

二つの価格指数を 4 つの都市（オハイオ州クリーブランド，フロリダ州マイアミ，カリフォルニア州サンフランシスコ，イリノイ州シャンペーン）で計測すると，AAMRS 価格指数は建築後年数の初期値を $j = 1$ と $j = 45$ にした場合とで結果が異なっている。伝統的なケース・シラー価格指数と比較して，$j = 1$ の築浅物件の方が価格上昇率は小さく，$j = 45$ の古い物件は価格上昇率が大きい。つまり，基準とすべき建築後年数の水準も価格指数にとって重要であることがわかる。また，伝統的なケース・シラー価格指数に含まれてしまっている年齢効果を分離し，一定においたACMRS 価格指数は (76) で予想されたように，三つの都市においてケース・シラー価格指数よりも高い水準で推移しており，基準年から遠ざかるほど乖離が大きくなる。

Hill, Knight and Sirmans (1997) は Case and Quigley (1991) のハイブリッド法（ヘドニックとリピートセールスのジョイントモデル推定）を改善することで，時間効果と年齢効果の識別を図っている。ヘドニック回帰モデルが次のように定義されているものとする。

$$y_n^t = \boldsymbol{z}_n' \boldsymbol{\gamma} + \tau_n \theta + \boldsymbol{d}_n' \boldsymbol{\alpha} + \epsilon_n^t \quad (n = 1, \cdots, N;\ t = 0, 1, \cdots, T) \tag{81}$$

ここで，y_n^t は第 n 物件の t 期における対数価格，$\boldsymbol{z}_n$ は特性ベクトル， τ_n は建築後年数，$\boldsymbol{d}$ は時間ダミー変数， $\boldsymbol{\gamma}, \theta, \boldsymbol{\alpha}$ は推定すべき未知パラメタ， ϵ_n^t は誤差項である。

$n = 1, \cdots, N$ のサンプルのうち N_R が 2 度以上に渡って取引された物件であるとしよう。第 n 物件の 1 回目の取引時点 s における建築後年数が $\tau_n - (t - s)$，2 回目の取引時点 t における建築後年数が τ_n であるとき， リピートセールス回帰モデルは次のように書ける。

$$Y_n = A_n \theta + \boldsymbol{D}_n' \boldsymbol{\alpha} + \upsilon_n \quad (n = 1, \cdots, N_R) \tag{82}$$

ここで，$A_n = \tau_n - \{\tau_n - (t - s)\}$ は建築後年数の差分， $\boldsymbol{D}_n$ は時間ダミー変数の差分，$\theta, \boldsymbol{\alpha}$ は推定すべき未知パラメタ，υ_n は誤差項である。(81)，(82) におけるサンプル $N + N_R$ をすべてプールすると，次の回帰モデルが得られる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z} & \boldsymbol{\tau} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\upsilon} \end{pmatrix} \tag{83}$$

Case and Quigley (1991) は一般化最小 2 乗法 (GLS) でこれを推定している。 しかし，Hill, Knight and Sirmanset (1997) ではヘドニック回帰モデルの誤差項について AR1 過程 $\epsilon_n^t = \rho \epsilon_n^{t-1} + \nu_n^t$ を想定し，これを最尤法によって推定を行っている。 ここで，$|\rho| < 1$ は自己回帰係数であり，定常な誤差項を想定している。もしも，$\rho = 1$ であれば，モデルは Case and Shiller におけるランダム・ウォーク誤差項になるが，それはパラメタを検定してみなければわからない。 この手法の特徴はヘドニック回帰モデルとリピートセールス回帰モデルをプールすることによって，$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{A}$ の間の線型関係を崩し，年齢効果を推定できるようにしている点にある。

ヘドニック回帰モデル (81) を OLS または GLS で推定した場合の年齢効果とプールされたジョイントモデル (83) の年齢効果はほぼ同一の値であり，誤差項の自己相関係数は有意に 0.540 であ

ることが報告されている。(82) を単独で推定した場合のリピートセールス価格指数は，負の年齢効果を含んでしまっているため，(81) を単独で推定した場合のヘドニック価格指数よりも低い値で推定されている。 ジョイントモデル (83) の最尤法による価格指数はヘドニック価格指数よりも若干高い値で推移している。また，最尤法で求められた系列相関のもとでの推定量は，モンテカルロ実験においても効率的であることが示されている。 誤差項の不均一分散はなんらかの仮定を置かなければ，推定は実行可能でないが，Knight, Hill and Sirmans (1999) はリピート・セールス回帰モデルにおいても，さまざまな分散不均一，系列相関を想定してモンテカルロ実験を行っており，ランダム・ウォークよりも定常な系列相関を想定した誤差項を持つモデルの方がより好ましい結果をもたらすことを示している。

3.3 サンプル・セレクション・バイアス

3.3.1 セレクション・バイアスの除去

リピート・セールス法においては，繰り返し取引が行われるサンプルだけを用いて価格指数が推計されるため，セレクション・バイアスが存在するのではないかと言うことが指摘されている。例えば，Shimizu Nishimura and Watanabe(2010) では，ヘドニック指数とリピートセールス指数を用いて，その両指数の相違を分析している。得られた結論の中でも，リピートセールスサンプルだけを用いてヘドニック指数を推計したところ，リピート・セールス回数が増加するにつれて，価格変動の市場の転換点のラグが大きくなることが示された。つまり，リピートセールスサンプルにおいては，構造的なサンプリングバイアスが存在することを示唆するものであると結論づけている。

不動産が売買される財として市場に登場するかどうかは，販売者にとってのオファー価格が彼の留保価格を凌駕しているという条件に依存している。Gatzlaff and Haurin (1997, 1998) は，もしも不動産市場の変化が，オファー価格と留保価格の決定に影響するならば，実際に販売された不動産サンプルはランダム・サンプリングでない可能性があることを検証している。すなわち，実際に観察される取引価格はオファー価格と留保価格を生ぜしめた確率過程に依存していると考え，Heckman(1979) による 2 段階推定法 (Heckit) を適用したセレクション・バイアスの除去を行っている。

1 回目と 2 回目の販売時点において，販売者のオファー価格が留保価格を上回っている場合においてのみ，ペアになったデータ・セットとして観察されるため，セレクションされたサンプルを利用した分析にならざるを得ない。 Gatzlaff and Haurin (1997) におけるセレクション・バイアスの修正は Bailey et al. (1963) で提案された最もシンプルなリピート・セールス回帰モデルを基本として，Heckit を適用している。 物件が市場で売買されるためには，売り手のオファー価格が留保価格を上回る必要があり，そしてそのときだけ取引価格が観察される。したがって，打ち切られたヘドニック価格の誤差分布の条件付き期待値が 0 でないことにより，ヘドニック価格にはセレクション・バイアスが生じる。

Gatzlaff and Haurin (1998) で示されたヘドニック回帰モデルにおけるセレクション・バイアスの除去は次のような方法で行われている。 売り手の留保（対数）価格を y_n^{tR} ，オファー（対数）価格を y_n^{tO} とすると，次のヘドニック回帰モデルが書ける。

$$y_n^{tR} = \boldsymbol{z}_n' \boldsymbol{\gamma}^R + \boldsymbol{d}_n' \boldsymbol{\alpha} + \epsilon_n^{tR} \tag{84}$$

$$y_n^{tO} = \boldsymbol{z}_n' \boldsymbol{\gamma}^O + \boldsymbol{d}_n' \boldsymbol{\alpha} + \epsilon_n^{tO} \tag{85}$$

ここで，誤差項 ϵ_n^{tR}，ϵ_n^{tO} は平均が 0，分散が

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{RR} & \sigma_{RO} \\ \sigma_{RO} & \sigma_{OO} \end{pmatrix} \tag{86}$$

である。 実際に取引される価格 y_n^t はオファー価格が留保価格以上になったときだけ観察される。すなわち，

$$y_n^t = \begin{cases} y_n^{tO} & \text{if } y_n^{tO} - y_n^{tR} \geqq 0 \\ \text{unobserved} & \text{if } y_n^{tO} - y_n^{tR} < 0 \end{cases} \tag{87}$$

である。したがって，取引価格の期待値は

$$E(y_n^t) = \boldsymbol{z}'_n \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{d}'_n \boldsymbol{\alpha} + E(\epsilon_n^{tO} | y_n^{tO} - y_n^{tR}) \tag{88}$$

となる。 誤差項の期待値は 0 にならずセレクション・バイアスが生じるため，これを修正するために Heckman(1979) の手法を用いている。 すなわち，不動産を売りに出すかどうかを決定するセレクション関数を 1 段階目でプロビット推定し，2 段階目で逆ミルズ比を用いて OLS 推定している。

Gatzlaff and Haurin (1997) は以上のモデルをリピート・セールス回帰モデルに拡張している。いま s 期において，不動産を売りに出すかどうかの選択を表す潜在変数を S_n^{s*} とおき，その選択メカニズムが次の回帰式で書けるものとしよう。

$$S_n^{s*} = \boldsymbol{W}_n^{s\prime} \boldsymbol{\pi} + \phi_n^s \tag{89}$$

ここで，$\boldsymbol{W}_n^s$ は売り手の個人属性，不動産特性および地理的環境などを含む特性ベクトル，$\boldsymbol{\pi}$ は未知パラメタ，ϕ_n^s は誤差項である。 潜在変数 S_n^{s*} は実際には観察できない。 1 回目の取引は $y_n^{1O} - y_n^{1R} \geqq 0$ のときだけ価格が観察されるので，これを $S_n^1 = 1$ とする。 2 回目の取引が観察できるかどうかは，まず 1 回目の取引が実際に生じている必要がある。したがって，これを表現する 2 値変数は次のように定義できる。

$$S_n^2 = 1 \begin{cases} 1 & \text{if } y_n^{1O} - y_n^{1R} \geqq 0 \text{ and if } y_n^{2O} - y_n^{2R} \geqq 0 \\ 0 & \text{if } y_n^{1O} - y_n^{1R} \geqq 0 \text{ and if } y_n^{2O} - y_n^{2R} < 0 \\ \text{unobserved} & \text{if } y_n^{1O} - y_n^{1R} < 0 \end{cases} \tag{90}$$

したがって，リピートセールス価格 y_n^1, y_n^2 は もし $y_n^{1O} - y_n^{1R} \geqq 0$ かつ $y_n^{2O} - y_n^{2R} \geqq 0$ であれば観察される，それ以外のケースでは観察できない。1 回目および 2 回目の販売を決定するセレクション関数の誤差項を ϕ_n^1, ϕ_n^2，ヘドニック回帰モデルの誤差項を $\epsilon_n^1, \epsilon_n^2$ とすると，分散共分散行列は次のように定義できる。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & 1 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_{44} \end{pmatrix} \tag{91}$$

1 回目および 2 回目の取引価格 y_n^1, y_n^2 はどちらも $S_n^1 = 1$ と $S_n^2 = 1$ が同時に成立するときだけ観察されるので，条件付き期待値 $E(y_n^1 | S_n^1 = 1 \text{ and } S_n^2)$ および $E(y_n^2 | S_n^1 = 1 \text{ and } S_n^2)$ より，ヘドニック回帰モデルの誤差項の期待値は $E(\epsilon_n^1 | S_n^1 = 1 \text{ and } S_n^2) = \sigma_{13}\lambda_n^1 + \sigma_{23}\lambda_n^2$ および $E(\epsilon_n^2 | S_n^1 = 1 \text{ and } S_n^2) = \sigma_{14}\lambda_n^1 + \sigma_{24}\lambda_n^2$ である。ここで，λ_n^1, λ_n^2 は逆ミルズ比である。したがって，サンプル・セレクション・バイアスを修正したリピート・セールス回帰モデルは次のように書ける。

$$Y_n = \boldsymbol{D}'_n \boldsymbol{\alpha} + (\sigma_{14} - \sigma_{13})\lambda_n^1 + (\sigma_{24} - \sigma_{23})\lambda_n^2 + \eta_n \tag{92}$$

マイアミの不動産市場データを用いた分析によると，通常のリピートセールス価格指数（I^{BMN}）は (92) によって推定された価格指数よりも上方にバイアスを持つことが示されている。

3.3.2　マッチング推定

複数回取引に出される物件は不動産市場全体でも限られており，通常のリピート・セールス法では 1 度しか取引されていないデータは全く利用されない。 したがって，サンプルサイズが減少することによって，推定の効率性が低下したり，前節で論じたようなセレクションバイアスの問題が生じる。

McMillen (2012) はそのような問題への対処としてマッチング法を利用した価格指数の推定方法を提案している。 ヘドニック回帰モデルにおける時間効果 $\boldsymbol{\alpha}$ は処理効果 (treatment effects) に対応している。簡単な例として $t = 0, 1$ の 2 期間のケースで示すと，

$$
\begin{aligned}
y_n^t &= \alpha_0 + \alpha_1 d_n^1 + \boldsymbol{z}_n' \boldsymbol{\gamma} + \epsilon_n^t \\
&= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0) d_n^1 + \boldsymbol{z}_n' \boldsymbol{\gamma} + \epsilon_n^t
\end{aligned}
\tag{93}
$$

である。 基準時点を $t = 0$ とおくと，d_n^1 の係数推定値から価格変化率を計測することができる。リピート・セールス法の場合には，$y_n^2 - y_n^1$ を d_n^1 に回帰することによって価格変化率が得られる。リピート・セールス法の価格変化率は「処理後」の代表的な値と「処理前」の代表的な値の差を観察していることがわかる。

これらの方法とは別に，プロジェクト評価（project evaluation）の手法を用いてサンプル全体の平均としてどの程度の価格変化が生じたのかを測ることができる。 すなわち，平均処理効果 (Average Treatment Effect) $ATE = \frac{1}{N(1)} \sum_{n=1}^{N(1)} d_n^1 E\left(y_n^1 - y_n^0\right)$ を求める必要がある。 これは，基準の $t = 0$ 期に取引され，$t = 1$ 期において再販売された物件の価格変化期待値の平均が ATE に等しいことを示している。 あるいは,「処理後」の値と「処理前」の値の差の平均を示している。$t = 1, 2, \cdots, T$ に対する価格指数を計測するには次を求める必要がある。

$$
ATE_t = \frac{1}{N(t)} \sum_{n=1}^{N(t)} d_n^t E\left(y_n^t - y_n^0\right) \tag{94}
$$

平均処理効果を「処理群の平均処理効果」として近似するには，どの観察時期のデータもランダム・サンプリングされたものでなければならない。 リピート・セールス法で用いられるデータの場合，処理群のデータは実際に売買された時点でしか観察できない。 したがって，基準年 $t = 0$ の対照群に対応するデータを $t = 1, 2, \cdots, T$ の各時点においてマッチングする必要がある。 マッチングを行うには，まず，時間ダミーをヘドニック回帰モデルで用いられる属性変数にロジット回帰した上で傾向スコア (propensity score) を求める。次に，カーネル・マッチング (Heckman, Ichimura and Todd 1998) により，処理群となる各期のマッチング・データを生成し，最後に価格指数を計測する。

McMillen (2012) はシカゴにおける戸建住宅の 1993 年から 2008 年までの四半期データ（およそ 60 四半期）を利用して，価格指数を計測している。データ・サイズはおよそ 16.9 万件であるが，そのうち少なくとも 2 回は取引されたリピート・セールス・データは 5.2 万件ある。基準時点は 1993 年の第 1 四半期であり，対照群となるデータは 1,651 件ある。リピート・セールス法では，そのデータの性質上，観察時点の初期はサンプルが少なく，観察時点の最後の方においてもサンプルが激減する。しかし，マッチされたサンプルはどの時点でもほぼ同じサイズになる。1993 年第

1 四半期から 2008 年第 4 四半期までの期間におけるマッチされたサンプルの合計は 10.2 万件となり，リピート・セールス・データを上回る。 当初のデータ 16.9 万件およびマッチされたサンプル 10.2 万件を用いてヘドニック・アプローチによる価格指数をそれぞれ計測すると，二つの間に違いはほとんどないことが示されている。 すなわち，マッチング推定量はヘドニック・アプローチによる推定量がきわめてロバストであることを示している。 マッチング推定量が単なる価格変化の平均とは異なっているのは明らかである。 16.9 万件の全サンプルを用いた各期の平均値による価格指数は，分布から外れた値の影響を受けやすい。シカゴの場合，1995 年のデータと比較して，2005 年のデータのばらつきはそれよりも大きいため（特に左袖が重い），各期の平均値による価格指数は下方に引っ張られていることが示されている。

価格指数を推定するためのリピートセールス法はマッチング法による推定の極端なヴァージョンであるといえる。 必ずしも同一ではないが似ている不動産取引データのマッチングは，価格指数推定においてリピートセールス法あるいはヘドニック法のどちらと比べてもいくつかの利点がある。 標準的なリピートセールス法と比較すると，一般的なマッチング法はサンプルサイズを飛躍的に増大させ，より効率的な推定値を得る傾向が高まる。たとえば，小規模な地域，短い観察期間などのサンプルが少ない場合においてさえ，価格指数を作成することを可能にするかもしれない。そのような意味でマッチングによる推定は有用な価格指数の計測手法となりえるかもしれない。

3.4 リピートセールス価格指数の特徴・優位点・問題点

本節ではリピート・セールス法の概要を示し，どのような問題点が生じるのかを中心に整理した。 リピート・セールス法は，同一物件の価格の比較を行うため，もし属性や属性価格に変化がなければ，ヘドニック法で問題となる過少定式化バイアスの問題が解消される。また，推計方法が簡単なことから，再現性が高く，推計効率の高い手法であるというメリットを持つ。

より安定的な価格指数を作成するには，価格データを長期にわたって観察する必要がある。しかし，観察期間が長くなると同一物件の属性や属性価格に変化が生じることによる集計バイアスが生じる。Case, Pollakowski and Wachter (1991) は価格指数ヘドニック法，リピート・セールス法およびハイブリッド法を利用して，価格指数推定の比較を行っているが，リピート・セールス法には上述の問題点が如実になることが示されている。

不動産は経年劣化や修繕投資によって価格が変化（不動産の年齢効果）するので，標準的なリピート・セールス法では，時間効果に年齢効果が含まれてしまう。しかし，時間ダミーと取引間隔を示す変数との間には完全な線型関係が存在するため，通常の方法では時間効果と年齢効果を識別することができない。今までのところ提案されているのは，時間ダミーと取引間隔変数の間の線型関係を意図的に崩してしまう方法や外部のデータを利用して価格指数に外挿する方法である。

また，リピート・セールス法では複数回取引された物件だけを選択的に利用するためサンプル・サイズが減少し，サンプルにセレクション・バイアスが生じることも懸念されている。 不動産市場の経済状況の変化が，オファー価格と留保価格の決定に影響するならば，1 回目と 2 回目の販売時点において，販売者のオファー価格が留保価格を上回っている場合においてのみ，ペアになったデータ・セットとして観察されるため，セレクションされたサンプルを利用した分析にならざるを得ない。 この場合，セレクション関数を推定することによって，バイアスを修正する伝統的な手法が提案されている。

複数回取引に出される物件は不動産市場全体でも限られており，通常のリピート・セールス法では 1 度しか取引されていないデータは全く利用されない。 マッチング法はこの点を改善するのに役立つことが示されている。1 度しか取引されていないデータをマッチング法によって，再販売さ

れたデータとして活用することで，サンプル・サイズを飛躍的に増大させ，より効率的な推定値を得る傾向が高まる。 たとえば，小規模な地域，短い観察期間などのサンプルが少ない場合においてさえ，価格指数を作成することを可能にするかもしれない。

以上の点を要約すると，優位点としては，

- 繰り返し取引された同じ不動産の異時点間の価格比を持って指数を作成することから，不動産の属性に関する情報を必要としない。
- ヘドニック価格法が持つ過小定式化バイアスの問題が回避される。
- 推計方法が簡便であり，再現性が高い。
  - 不均一性が強い不動産の場合でも，指数が推計できる確率が高い。
  - コンセプトが簡単であることから，利用者に説明しやすい。

問題点としては，

- 二回以上取引された情報だけを用いて価格指数が推計されるため (1 回だけしか取引されていない情報は捨ててしまうため)，非効率である。そのため，流動性が低い国 (地域) では利用が困難であったり，地域や用途を限定した指数を推計することが困難になることが少なくない。
- 二つの取引の間に発生した建築後年数の増加に伴う減価部分を無視しているため，それを制御しない場合には，下方バイアスを持つ。
- 二つの取引の間に修繕投資が行われた場合には，それを制御しない場合には，上方バイアスを持つ。
- データベースの構築によっては，同一の取引かどうかを特定する場合に，費用が発生する場合がある (同一取引を特定することが困難な国も少なくない)。
- 価格指数を土地と建物に分離することが不可能である。
- 新しい取引価格情報が発生した場合，常に過去の系列まで変化してしまうため，確定値を出すことが出来ない。

4　不動産鑑定価格に基づく価格指数

4.1　不動産鑑定価格指数

不動産市場は，取引が少なく (thin)，不動産の不均一性が強い場合には，不動産鑑定士といった専門家によって価格調査が行われている。また，財産税を持つ多くの国では，課税評価のための鑑定評価額を持つ国も少なくない。

加えて，近年においては，不動産投資市場が急速に拡大する中では，投資対象となる不動産の投資パフォーマンスを測定する目的から，定期的に調査された不動産鑑定評価額を得ることが出来るようになってきた。そのような中では，この不動産鑑定評価額を利用して，不動産価格指数を作ろうとする試みがなされてきている。

とりわけ，不均一性が強く，取引が少ない市場の動きを捉えようとした場合には，不動産鑑定価格を用いて市場の変化を捉えることは，一つの有力な方法の一つであろう。

しかし，不動産鑑定評価額を巡っては,「鑑定誤差問題 (valuation error problem)」,「情報ラグ問題 (lagging problem)」,「平滑化問題 (smoothing problem)」といった問題が指摘されてきた。第一の問題は，不動産鑑定価格は，不動産鑑定士といった専門家の判断によって決定されるために，その価格決定の絶対値において一定の誤差を伴ってしまうといった問題である。第二の問題は，不動産鑑定士が価格決定において利用可能な情報は，過去の情報であり，その価格決定において一定のラグを持つといった問題である。最後の問題は，第一，第二の問題にも関わる問題であるが，市場の転換点を見誤る可能性が大きいだけでなく，その変化においては平滑化されてしまい，ゆっくりとしか価格変化が発生しないという問題である。

また，不動産鑑定評価制度は，各国によって制度が異なるため，不動産鑑定士が求めている価格の定義が異なる場合もある。また，課税評価のための評価額は，通常の不動産鑑定価格 (Appraisal Value) とは異なり，評価額 (Assessment Value) であることから，より市場の変化を適切に捉えていない可能性も高い。

不動産鑑定価格情報は，取引が少ない市場では有力な情報源であり，それを用いた指数の作成可能性も存在するものの，そのバイアスに関しては，十分に注意していく必要がある。

4.2 不動産鑑定価格と取引価格をプールしたヘドニック法

取引価格情報を用いてヘドニック価格指数を推計しようとした場合に，取引価格情報が不足することで指数の推計が困難な場合に直面することがある。また，不動産価格情報は，前述のように，鑑定誤差問題が存在したり，平滑化問題が存在したりするために，一定のバイアスを持つことが知られている。このようなバイアスを制御し，不足する取引価格情報を補うために，不動産鑑定価格情報と取引価格情報をプールして，ヘドニック価格法で価格指数を推計する試みも提案されている。

Devaney and Diaz (2010) では不動産鑑定価格情報を利用する際の問題点を指摘している。課税評価額 (assessed values) は，取引価格情報に含まれるであろう様々な要素を加味して求められるので，取引価格を説明する助けになる。評価額を利用した回帰式を次のように書く。

$$\ln p_n^t = \alpha_t + \zeta \ln a_n^t + \epsilon_n^t \tag{95}$$

ここで，p_n^t は取引価格，a_n^t は評価額である。 ただし，真の不動産市場価値を正しく評価できる保証はなく，評価額には必ず誤差が生じている。たとえば，真の不動産市場価値を V_n^t とすると，評価額 a_n^t は，次のような確率誤差を伴う観測値であるかもしれない。

$$\ln a_n^t = \ln V_n^t + \eta_n^t \tag{96}$$

すなわち，評価額は真の不動産市場価値に確率誤差 η_n^t が加わった値になる。 (95) における評価額が，真の不動産市場価値を代理したものであるならば， (96) より $\ln V_n^t = \ln a_n^t - \eta_n^t$ なので，(95) は次のように書き直すことができる。

$$\ln p_n^t = \alpha_t + \zeta(\ln a_n^t - \eta_n^t) + \epsilon_n^t = \alpha_t + \zeta \ln a_n^t + (\epsilon_n^t - \zeta\eta_n^t) \tag{97}$$

説明変数 $\ln a_n^t$ は明らかに誤差項と相関を持つため，係数の最小 2 乗推定量はバイアスを持つ。

この推計方法は，現在，欧州中央銀行において実用化に向けて研究開発が実施されているところである。

4.3 SPAR 法

リピート・セールス価格指数の推計においても，複数回取引された価格情報が不足することで，価格指数が推計できない問題に直面する。そのような中で，前述のマッチング法のような形でリピートセールスサンプルを擬似的に増加させる方法と合わせて，第一回目の価格を不動産鑑定価格に求める SPAR 法 (sale price appraisal ratio method) と呼ばれる推計方法も提案されると共に，実用化されている。

RPPI Handbook (Chapter 7, pp. 74–79) にしたがって，SPAR 法の概要を示そう。物件 n の比較時点 t における販売価格を p_n^t $(n = 1, 2, \cdots, N(t))$ とする。また，当該物件の基準時点 0 における鑑定価格を a_n^0 $(n = 1, 2, \cdots, N(0))$ とおく。このとき，販売・鑑定価格比は p_n^t / a_n^0 である。数量をすべて 1 に基準化すると，鑑定価格ベースの算術平均価格指数は次の式で定義できる。

$$P_{AP}^{0t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} p_n^t}{\sum_{n=1}^{N(t)} a_n^0} = \sum_{n=1}^{N(t)} w_n^0(t) \left(\frac{p_n^t}{a_n^0} \right) \tag{98}$$

ここで，(98) 右辺の二つ目の等式における $w_n^0(t)$ は鑑定価格に基づくウェイトであり， $w_n^0(t) = a_n^0 / \sum_{n=1}^{N(t)} a_n^0$ である。比較時点のサンプル $N(t)$ の（1 に基準化された）数量によってこのウェイトは定義されているので，$w_n^0(t)$ は基準時点の価格と比較時点の数量で計算された支出ウェイトである。したがって，(98) は販売・鑑定価格比 p_n^t / a_n^0 の $w_n^0(t)$ による加重平均であるから，パーシェ (Paasche) 型の指数であることがわかる。 ただし，一般的には基準時点のサンプルサイズ $N(0)$ と比較時点のサンプルサイズ $N(t)$ は等しくない。

(98) の問題は基準時点の価格を鑑定値としている点である。基準時点の販売価格ではないので，価格指数は基準時点において 1 にはならない。算術平均販売・鑑定価格比法 (arithmetic SPAR) 指数は，次のように基準時点販売・鑑定価格比で割ることによって，この問題を克服している。

$$P_{SPAR}^{0t} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} p_n^t}{\sum_{n=1}^{N(t)} a_n^0} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N(0)} p_n^0}{\sum_{n=1}^{N(0)} a_n^0} \right)^{-1} = \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} p_n^t / N(t)}{\sum_{n=1}^{N(0)} p_n^0 / N(0)} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N(0)} a_n^0 / N(0)}{\sum_{n=1}^{N(t)} a_n^0 / N(t)} \right) \tag{99}$$

(99) は販売価格の算術平均の比と鑑定価格の算術平均の比の逆数の乗算になっている。鑑定価格の算術平均の比の逆数は，基準時点から比較時点にかけて生じた構造変化を調整する役目を果たしている。

4.4 不動産鑑定評価額指数の特徴・優位点・問題点

不動産鑑定価格情報は，不動産価格指数の推計において極めて重要な情報源であることは言うまでもない。とりわけ，取引が少ない地方都市，物流施設，ホテル，病院などのような不均一性が強い市場では，不動産鑑定価格情報に頼らざるを得ないケースも少なくないものと考える。

そのような中で，不動産鑑定価格を直接に用いた価格指数だけでなく，SPAR 法のように不動産鑑定価格を用いてリピート・セールス価格法を修正した方法や，ヘドニック価格法の推計において，不動産鑑定価格と取引価格を混ぜて推計する方法など，多くの工夫がなされてきている。それぞれの優位点と問題点を整理する。まず，SPAR 法については，

- リピート・セールス価格法の優位性をそのまま引き継ぐ。
- リピート・セールス価格法よりも多くの情報を用いることが出来るため，効率性が高い。

- 伝統的な指数理論に基づく方法であり，理解しやすく，推計方法も簡便であることから再現性が高い。

その一方で，問題点として次が揚げられる。

- リピート・セールス法が持つ問題点をそのまま引き継ぐ。
- 最初の取引を不動産鑑定価格に求めることから，不動産鑑定価格が持つ誤差や歪みの影響を受ける。
- 不動産価格指数を取り巻く品質調整の課題

ヘドニック法の中で，不動産鑑定価格情報と取引価格情報を用いて推計する場合においては，擬似的にサンプル数を増加させて，ヘドニック関数の推計における効率性を上昇させるものの，取引が発生する確率をどの様に設定するのかといった問題など，推計論上で残された課題は多いものと考える。

5　まとめ：不動産価格指数はどのように推計すべきか

不動産価格指数は，どの様に推計すべきであろうか。不動産価格指数の推計においては，利用可能な情報の制限によって，その推計方法は大きく変化してくることとなる。もし，このような制限がないものとした場合においては，経済理論的な背景や他の経済統計との整合性や国民経済計算への応用などを考えたときに，ヘドニック法が優位性を持つ。しかし，現実においては，取引量が相対的に大きな住宅市場やオフィス市場などでは有効かもしれないものの，不均一性が強い市場では，そのヘドニック価格法の適用が困難な場合も少なくないであろう。

不動産の不均一性が強くても，取引量も十分存在する市場では，リピートセールス価格法が有力であろう。しかし，取引量が制限されるような市場に至っては，リピート・セールス価格法の適用も困難となる。このような場合には，不動産鑑定価格情報を用いた指数が作成できるかもしれない。SPAR 法や不動産鑑定評価額と取引価格を用いたヘドニック法による推計方法や，不動産鑑定価格そのものを使った鑑定価格指数など，いくつかの可能性はある。しかし，取引が少ない中で，不動産鑑定士がどの様な不動産価格を決定していくのか，そのような中で決定された不動産鑑定価格の信頼性はどの程度あるのかといった問題に直面することも確かであろう。

さらに，不動産の取引価格情報が不足する場合においては，不動産の収益情報を用いた指数の作成なども，検討の余地を残すところである。不動産市場の動向を適切に捕捉しようとした場合には，様々な情報源とそれに合わせた適切な推計方法を組み合わせて，複数の指標を作成していく必要がある。

参考文献

[1] Anglin, P. M. and R. Gencay (1996), “Semiparametric Estimation of Hedonic Price Function,” *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 11, No. 6, pp. 633–648.

[2] Bailey, M. J., R. F. Muth and H. O. Nourse (1963), “A Regression Model for Real Estate Price Index Construction,” *Journal of American Statistical Association*, Vol. 58, pp. 933–942.

[3] Barten, A. P (1964), “Consumer Demand Functions under Conditions of Almost Additive Preferences,” *Econometrica*, Vol. 32, No. 1/2, pp. 1–38.

[4] Berndt, E. R., Z. Griliches and N. J. Rappaport (1995), “Econometric Estimates of Price Indexes for Personal Computers in the 1990s?,” *Journal of Econometrics* Vol. 68, pp. 243–268.

[5] Box, G. E. P. and D. R. Cox (1964), “Ananalysis of Transformations,” *Journal of the Royal Statistical Society*. SeriesB (Methodological), Vol. 26, No. 2, pp. 211–252, .

[6] Brown, J. N. and H. S. Rosen (1982), “On the Estimation of Structural Hedonic Price Models,” *Econometrica*, Vol. 50, No. 3, pp. 765–768.

[7] Case, B., H. O. Pollakowski and S. M. Wachter (1991), “On Choosing Among House Price Index Methodologies,” *Real Estate Economics* Vol. 19(3), pp. 286–307.

[8] Case, B. and J. M. Quigley (1991), “The Dynamics of Real Estate Prices,” *Review of Economics and Statistics*, Vol. 73, No. 1, pp.50–58.

[9] Case, K. E. and R. J. Shiller (1987), “Prices of Single Family Homes Since 1970: New Indexes for Four cities,” *New England Economic Review*, Vol. (Sept./Oct.), pp. 45–56.

[10] Case, K. E. and R. J. Shiller (1989), “The Effciency of the Market for Single-Family Homes,” *The American Economic review*, Vol. 79, No. 1, pp.125–137.

[11] Cassel, E. and R. Mendelsohn (1985), “The Choice of Functional Forms for Hedonic Price Equations: Comment,” *Journal of Urban Economics*, Vol. 18, No. 2, pp. 135–142.

[12] Clayton, J., D. Geltner and S. W. Hamilton (2001), “Smoothing in Commercial Property Valuations: Evidence from Individual Appraisals,”” *Real Estate Economics*, Vol. 29, issue 3, pp. 337–360.

[13] Cropper, M. L., L. B. Deck and K. E. McConnell (1988), “On the Choice of Functional Form for Hedonic Price Functions,” *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 70, No. 4, pp. 668–675.

[14] Court, A. T (1939), “Hedonic Price Indexes with Automotive Examples,” in *The Dynamics of Automobile Demand*, General Motors, New York.

[15] Devaney, S. and R. M. Diaz (2010), “Transaction Based Indices for the UK Commercial Property Market: Exploration and Evaluation Using IPD Data,” *Discussion Paper* 2010-02, University of Aberdeen Buisiness school, pp. 1-19.

[16] de Haan, J. (2004), “Direct and Indirect Time Dummy Approaches to Hedonic Price Measurement,” *Journal of Economic and Social Measurement*, Vol. 29(4), pp. 427–443.

[17] de Haan, J. (2010), “Hedonic Price Indexes: A Comparison of Imputation, Time Dummy and Re-Pricing methods,” *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Vol. 230(6), pp. 772–791.

[18] Diamond, D. Jr. and B. A. Smith (1985), "Simultaneity in the Market for Housing Characteristics," *Journal of Urban Economics*, Vol. 17, No. 3, pp. 280–292.

[19] Diewert, W. E. (1971), "An Application of the Shepherd Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function," *Journal of Political Economy*, Vol. 79, No. 3, pp. 481–507.

[20] Diewert, W. E. (1973), "Functional Forms for Profit and Transformation functions," *Journal of Economic Theory*, Vol. 6, No. 3, pp. 284–316.

[21] Diewert, W. E. (1976), "Exact and Superlative Index Numbers," *Journal of Econometrics*, Vol. 4, No. 2, pp. 114–145.

[22] Diewert, W. E. (1983), "The Theory of the Output Price Index and the Measurement of Real Output Change," in *Price Level Measurement*, W.E. Diewert and C.Montmarquette (eds.), Ottawa: Statistics Canada, pp. 1049–1113 .

[23] Diewert, W. E. (1997), "Commentary on Mathew D. Shapiro and David W. Wilcox: Alternative Strategies for Aggregating Price in the CPI," *The Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, Vol. 79:3, pp. 127–137.

[24] Diewert, W. E. (2002), "Hedonic Producer Price Indexes and Quality Adjustment," *Discussion Paper* 02-14, Department of Economics, University of British Columbia, pp. 1–11.

[25] Diewert, W.E. (2003), "Hedonic Regressions: A Review of Some Unresolved Issues," *Mimeo*, Department of Economics, University of British Colombia.

[26] Diewert, W. E., S. Heravi and M. Silver (2007), "Hedonic Imputation Versus Time Dummy Hedonic Indexes," *Discussion Paper* 007-07, Department of Economics, University of British Columbia, pp. 1–29.

[27] Dulberger, E.R. (1989), "The Application of a Hedonic Model to a Quality-Adjusted Price Index for Computer Processors," In D. W. Jorgenson and R. Landau (eds.), *Technology and Capital Formation* (pp. 37–75), Cambridge, MA: MIT Press.

[28] Ekeland, I., J. J. Heckman and L. Nesheim (2004), "Identification and Estimation of Hedonic Models," *Journal of Political Economy*, Vol. 112, No. S1, pp. S60–S109.

[29] Eurostat (2013) *Handbook on Residential Property Price Indices* (RPPIs), Methodologies & Working papers, 2013 edition.

[30] Gatzlaff, D. H. and D. R. Haurin (1997), "Sample Selection Bias and Repeat-Sales Index Estimates," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 14, No. 1/2, pp. 33–50.

[31] Gatzlaff, D. H. and D. R. Haurin (1998), "Sample Selection and Biases in Local House Value Indices," *Journal of Urban Economics*, Vol. 43, No. 2, pp. 199–222.

[32] Griliches, Z (1961), "Hedonic Price Indexes for Automobiles: An Econometric Analysis of Quality Change," In G. Stigler (chairman), *The Price Statistics of the Federal Government*, Washington D.C.: Government Printing Office.

[33] Griliches, Z. (1967), "Hedonic Price Indexes Revisited: A Note on the State of the Art," *Proceedings of the Business and Economics Section of the American Statistical Association*, pp. 332–334.

[34] Griliches, Z (1971), "Introduction: Hedonic Price Indexes Revisited," In Z. Griliches (ed.) *Price Indexes and Quality Change*, (pp. 3–15), Cambridge MA: Harvard University Press.

[35] Halvorsen, R. and H. O. Pollakowski (1981), "Choice of Functional Form for Hedonic Price Equations," *Journal of Urban Economics*, Vol. 10, No. 1, pp. 37–49.

[36] Heckman, J. J. (1979), "Sample Selection Bias as a Specification Error," *Econometrica*, Vol. 47, No. 1, pp. 153–161.

[37] Heckman, J. J., H. Ichimura and P. Todd (1998), "Matching as an Econometric Evaluation Estimator," *Review of Economic Studies*, Vol. 65, No. 2, pp. 261–294.

[38] Heckman, J. J., R. L. Matzkin and L. Nesheim (2010), "Nonparametric Identification and Estimation of Nonadditive Hedonic Models," *Econometrica*, Vol. 78, No. 5, pp. 1569–1591.

[39] Hill, R. C., J. R. Knight and C. F. Sirmans (1993), "Estimation of Hedonic Housing Price Models Using non Sample Information: A Montecarlo Study," *Journal of Urban Economics*, Vol. 34, No. 3, pp. 319–346.

[40] Knight, J. R., J. Dombrow and C. F. Sirmans (1997), "Aggregation Bias in Repeat-Sales Indices," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 14, No. 1/2, pp. 75–88.

[41] Knight, J. R., R. C. Hill and C. F. Sirmans (1999), "A Random Walk Down Main Street?," *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 29, No. 1, pp. 89–103.

[42] Lancaster, K. J. (1996), "A New Approach to Consumer Theory," *Journal of Political Economy*, Vol. 74, No. 2, pp. 132–157.

[43] Linneman, P. (1980), "Some Empirical Results on the Nature of the Hedonic Price Function for the Urban Housing Market," *Journal of Urban Economics*, Vol. 8, No. 1, pp. 47–68.

[44] Malpezzi, S. (2003), "Hedonic Pricing Models: a Selective and Applied Review," In A. O ' Sullivan and K. Gibb (eds.), *Housing Economics: Essays in Honor of Duncan Maclennan*, (pp. 67–89). Blackwell: Malder, MA.

[45] McMillen, D. P. (2003), "The Return of Centralization to Chicago: Using Repeat Sales to Identify Changes in House Price Distance Gradients," *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 33, No. 3, pp. 287–304.

[46] McMillen, D. P. (2012), "Repeat Sales as a Matching Estimator," *Real Estate Economics*, Vol. 40, No. 4, pp. 745–773.

[47] Mendelsohn, R. (1985), "Identifying Structural Equations with Single Market Data," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 67, No. 3, pp. 525–529.

[48] Cannaday, R. E., H. J. Munneke and T. T. Yang (2005), "A Multivariate Repeat-Sales Model for Estimating House Price Indices *Journal of Urban Economics*, Vol. 57, No. 2, pp. 320–342.

[49] Chau, K.W., S. K. Wong and C.U. Yiu (2005), "Adjusting for Non-linear Age Effects in the Repeat Sales Index," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 31, No. 2, pp. 137–153.

[50] Pace, R. K (1995), "Appraisal Using Generalized Additive Models," *Journal of Real Estate Research*, Vol. 15, No. 1, pp. 77–99.

[51] Pace, R. K (1995), "Parametric, Semiparametric, and Nonparametric Estimation of Characteristic Values with in Mass Assessment and Hedonic Pricing Models," *Journal of Real Estate Finance and Economics*, Vol. 11, No. 3, pp. 195–217.

[52] Palmquist, R. B. (1979), "Hedonic Price Depreciation Indexes for Residential Housing: A Comment," *Journal of Urban Economics*, Vol. 6, No. 2, pp. 267–271.

[53] Rosen, S. (1974), "Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition," *Journal of Political Economy*, Vol. 82, No. 1, pp. 34–55.

[54] Sheppard, S. (1999), "Hedonic Analysis of Housing Markets," In *Handbook of Regional and Urban Economics* Vol.3, Cheshire, P. C. and E. S. Mills (eds.), chapter 41, pp. 1595–1635.

[55] Shimizu, C., K. G. Nishimura and T. Watanabe (2010), "House Prices in Tokyo –A Comparison of Repeat-sales and Hedonic Measures–," *Journal of Economics and Statistics*, Vol. 230 (6), pp.792–813.

[56] Silver, M. and S. Heravi (2007), "The Difference Hedonic Imputation Indexes and Time Dummy Hedonic Indexes," *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 25:2, pp. 239–246.

[57] Sirmans, C. F., R. C. Hill and J. R. Knight (1997), "Estimating Capital Asset Price Indexes," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 79, No. 2, pp. 226–233.

[58] Witte, A. D., H. Sumka and J. Erekson (1979), "An Estimate of a Structural Hedonic Price Model of the Housing Market: Anapplication of Rosen's Theory of Implicit Markets," *Econometrica*, Vol. 47, No. 5, pp. 1151–1172.

[59] 金本良嗣・中村良平・矢沢則彦 (1989),「ヘドニック・アプローチによる環境の価値の測定」環境科学会誌 2(4) , pp. 251–266.

[60] 清水千弘・唐渡広志 (2007),『不動産市場の計量経済分析』, 朝倉書店.

[61] 中村良平 (1992),「ヘドニックアプローチにおける実証分析の諸問題」,『土木学会論文集』, NO. 449/IV-17, pp. 57–66.

[62] 肥田野登 (1997),『環境と社会資本の経済評価–ヘドニック・アプローチの理論と実際』, 勁草書房.