学位論文内容の要旨

学位論文題目
Contact metric structures on 3-dimensional manifolds
（３次元多様体上の接触計量構造）

数理・ヒューマンシステム科学専攻
氏名　山本明夫

A differentiable manifold M^{2n+1} is said to have a contact structure or to be a contact manifold if there exists a 1-form η over M^{2n+1} such that $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$. The condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ means that a contact manifold is orientable. It is known that a smooth hypersurface satisfying some conditions has a contact structure. As a special case S^{2n+1} is a contact manifold. When a contact form η is given on M^{2n+1}, there exists a system (ξ, φ, g) of a vector field ξ, a tensor field φ of type (1,1) and a Riemannian metric g, which called a contact metric structure.

On the other hand the notion of almost contact metric structures is a generalization of the notion of contact metric structures. An almost contact metric structure does not assume the condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$. From the point of view of the Riemannian geometry of contact metric manifolds we consider K-contact structures.

This paper consists of three chapters. In Chapter 1 we mention the notion of an almost contact metric structure (φ, ξ, η, g) on M^{2n+1} and give its examples. Next we show that on an almost contact metric manifold M^{2n+1} we can construct a useful orthonormal basis called φ-basis. And we explain that on the almost contact metric manifold $\mathbf{R}^{2n+1}$ the sectional curvature of a vector X orthogonal to ξ and φX is equal to -3. Finally we show that on the Heisenberg group $H_{\mathbf{R}}$ identified with $\mathbf{R}^3$

left translation preserves η and g is a left invariant metric.

Chapter 2 we mention the notion of a contact metric structure (φ, ξ, η, g) and give its examples. Remark that for a contact form η, ξ is unique but g and φ are not necessarily unique. Next we show that in Hopf's mapping $\pi : S^3 \longrightarrow S^2$ the value of $d\pi(\xi)$ is equal to 0. Moreower we mention the notion of K-contact structure. We consider the sectional curvature of K-contact manifold M^{2n+1}. Finally we check that the almost contact metric structure on $M^{2n} \times \mathbf{R}$ is not a contact metric structure.

It is known that every compact orientable 3-dimensional manifold has a contact structure. In Chapter 3 we consider 3-dimensional contact manifolds, especially S^3, $\mathbf{R^3}$ and T^3. We give a typical contact form η on S^3, $\mathbf{R^3}$ and T^3 respectively. Then we completely determine their contact metric structures. Next, we check that such contact metric structures are η-Einstein or not. If $M^3 = S^3$, (φ, ξ, η, g) is η-Einstein if and only if g is the standard metric. If $M^3 = \mathbf{R^3}$, all (φ, ξ, η, g) are η-Einstein. If $M^3 = T^3$, one parameter family of (φ, ξ, η, g) are η-Einstein. We check that such contact metric structures are Sasakian or not. If $M^3 = S^3$, (φ, ξ, η, g) is Sasakian if and only if g is the standard metric. If $M^3 = \mathbf{R^3}$, all (φ, ξ, η, g) are Sasakian. If $M^3 = T^3$, all (φ, ξ, η, g) are not Sasakian. We check that such contact metric structures are K-contact or not. If $M^3 = S^3$, (φ, ξ, η, g) is K-contact if and only if g is the standard metric. If $M^3 = \mathbf{R^3}$, all (φ, ξ, η, g) are K-contact. If $M^3 = T^3$, all (φ, ξ, η, g) are not K-contact.

【博士学位論文審査結果の要旨】

当博士論文審査委員会は、当該論文を詳細に査読するとともに、令和４年１月２８日（金）に学位論文公聴会を開催し、詳細な質疑応答により、慎重に審査した。以下に審査結果の要旨を記す。

本論文において、３次元微分可能多様体M上の接触形式ηを与えたとき、ηと両立する接触計量構造の（ξ，ϕ，g）の存在と構成、およびそれぞれの接触計量多様体（M，η，ξ，ϕ，g）の幾何学的性質の研究について、Mが典型的な接触形式ηをもつ３次元球面、３次元ユークリッド空間、３次元トーラスの３つの場合に調べた。本論文で用いている手法は、すべての３次元微分可能多様体Mに適用することが可能であり、接触形式ηが具体的に与えられた場合に、様々な接触計量構造を持つM上の幾何学を展開する方策が提示されている。

本論文は３つの章から構成されている。各章の概要は次の通りである。

第１章では、一般の奇数次元微分可能多様体上の概接触計量構造の概念についてまとめている。第１章第１節では、接触構造の一般化である概接触構造の定義と例を紹介している。第１章第２節では、概接触構造に許容的なリーマン計量を合わせた概接触計量構造の定義と、その例として、奇数次元ユークリッド空間と３次元ハイゼンベルグ群上の概接触計量構造を紹介している。

第２章では、奇数次元微分可能多様体上の接触構造の概念についてまとめている。第２章第１節では、奇数次元微分可能多様体上の接触構造の定義を述べ、その例として、奇数次元ユークリッド空間、奇数次元球面、奇数次元実射影空間上の接触構造について紹介している。第２章第２節では接触構造と両立するリーマン計量を合わせた接触計量構造の定義と例を紹介し、接触計量多様体上の幾何学的性質を調べる際に重要となる公式を準備している。第２章第３節では、接触計量多様体の中でもとくにK-接触多様体についてまとめ、さらに接触計量構造でない概接触計量構造を持つ例を紹介している。

第３章では、３つの３次元微分可能多様体上の接触計量構造とその幾何学的性質についてそれぞれ調べている。第３章第１節では、３次元球面上に典型的な接触形式ηを考えたとき、それと両立する接触計量構造の（ξ，ϕ，g）を決定している。ここで求められた接触計量構造は２つの関数をパラメーターとする自由度があり、そのパラメーターが定数である場合に得られる接触計量構造のリーマン曲率テンソルを具体的に計算し、η-アインシュタイン多様体やK-接触多様体、佐々木多様体になる場合をそれぞれ決定している。第３章第２節では、３次元ユークリッド空間に典型的な接触形式ηを与えて、球面と同様に、接触計量構造を決定し、２つの関数が自由度のパラメーターであることを導き、そのパラメーターが定数の場合に幾何学的性質を決定している。第３章第３節では、３次元トーラスに典型的な接触形式ηとして自然数nをパラメーターとする接触形式の族を考える。先の２つの節と同様に３次元トーラスの接触計量構造を決定し、２つの関数が自由度のパラメーターであることを導き、そのパラメーターが定数の場合に幾何学的性質を決定している。

本論文の主結果は英文論文としてまとめられ、既に学術誌に掲載されている。

以上を総合して判断した結果、本審査委員会は、本論文を博士（理学）の学位を授与するに十分値する論文であると認め、合格と判定した。