Excelによる高次の一対比較行列の重要度の計算法

白石　俊輔・小畑　経史

富 山 大 学 紀 要. 富 大 経 済 論 集　　第67巻第３号抜刷（2022年3月）

富山大学経済学部

Excel による高次の一対比較行列の重要度の計算法

白石　俊輔・小畑　経史

キーワード：一対比較行列，重要度，固有値，ニュートン法，フレーム法，
Excel，Solver

概要

AHP（Analytic Hierarchy Process, 階層分析法）では, 一対比較行列を基に, 評価基準や代替案の重要度が求められる。重要度の算出には，通常，固有値法または幾何平均法を用いる。表計算ソフトを用いる場合は，幾何平均法が簡便であるが，固有値を求めないので，AHP の最大の特長とも言える整合度の計算が行われない。そこで本論文では比較項目が５つを超える場合にも，フレーム法により固有多項式の係数が計算されることから，Microsoft 社の Excel による固有値および重要度の求め方が有効であることを示す。

1　はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process，階層分析法）では，重要度の計算に幾何平均法を用いることにより，その手順を表計算ソフトで簡単に実行することができる。ウエイトの計算に GEOMEAN 関数が使え，総合重要度の計算に SUMPRODUCT 関数が使えるからだ。ただし, 幾何平均法で問題になるのは, 整合度の計算である。幾何平均法による整合度の計算法も提唱されてはいるが，あまり一般的ではない [13]。整合度は通常固有値法によって求められる。AHP の固有値法においては，n次の一対比較行列Aに対し，固有値問題

$$Aw = \lambda_{max} w$$

を解き，重要度wと求められた最大固有値λ_{max}により整合度

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

を計算し，評価の一貫性を判断する [2][5][13]。固有値問題を数値的に解くためには，一般にべき乗法が用いられる [5][13]。Excel によるべき乗法の適用は高萩他 [11] に詳しい。行列演算さえできれば，どのような表計算ソフトでも実行可能なのがこの方法の利点である。ただし Apple 社の Numbers では，行列やベクトルの積を求める Excel の MMULT 関数が非対応であるので [14]，仕込みがやや煩雑になる。

本論文で扱うのは$n \geq 5$の時である。この場合でも，固有多項式の係数がフレーム法 [4] を使えば，簡便な形で書けることから，ニュートン法が適用可能になり，簡単に固有値を求めることができる。その結果を基にすれば最小二乗法の考え方を用いて [1]，最適化問題の解を探索する Excel の強力なアドイン機能である Solver を利用して，重要度の計算ができる。

尚，本論文は [7][8] の継続研究であるので，記述内容はこれらに従う。

2　ニュートン法による固有値

2.1　ヒューリスティック解法の試み

一般にn次の一対比較行列$A = \left(a_{ij}\right)$は，逆数性（reciprocal）

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

を満たすことから，その固有多項式は，

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \mathrm{det}A$$

であることが示されている [9]。λ^{n-2}の係数は 0 であることに注目されたい。したがって，高次の，例えば 5 次の一対比較行列に対する固有多項式は，

$$P_A(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4\lambda - \mathrm{det}A$$

となる。ここで，

$$c_3 = \sum_{i<j<k}\left(2 - \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right)$$

であるため [9]，c_3の計算は容易であるが，問題はc_4の計算である。c_4の計算を回避するために，固有多項式の代わりに

$$Q_A(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + c_3\lambda^2 - \mathrm{det}A$$

を使い，その零点を求めることで，固有値のヒューリスティック値としてみた。数値例として用いる一対比較行列は次の行列とする [13]。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 1/2 & 1/5 & 1 & 5 & 5 \\ 1/3 & 1/7 & 1/5 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/8 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

初期解は$\lambda_1 = 5$とし，反復を以下の漸化式で行った。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{Q_A(\lambda_k)}{Q_A'(\lambda_k)}$$

ここで,

$$Q_A'(\lambda) = 5\lambda^4 - 20\lambda^3 + 2c_3\lambda$$

である。c_3の計算は${}_5C_3 = 10$個の

$$\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}}$$

とその逆数との和を計算すればよいので, Excel への入力は簡便である（図１）。

	A	B	C	D	E	F
1	A	1	0.333333333	2	3	5
2		3	1	5	7	8
3		0.5	0.2	1	5	5
4		0.333333333	0.142857143	0.2	1	2
5		0.2	0.125	0.2	0.5	1
6						
7	a12a23/a13	=C1*D2/D1	1.2	2.033333333		
8	a12a24/a14	0.777777778	1.285714286	2.063492063		
9	a12a25/a15	0.533333333	1.875	2.408333333		
10	a13a34/a14	3.333333333	0.3	3.633333333		
11	a13a35/a15	2	0.5	2.5		
12	a14a45/a15	1.2	0.833333333	2.033333333		
13	a23a34/a24	3.571428571	0.28	3.851428571		
14	a23a35/a25	3.125	0.32	3.445		
15	a24a45/a25	1.75	0.571428571	2.321428571		
16	a34a45/a35	2	0.5	2.5		

図 1

反復の結果が次図２である。

λ1	5
λ2	5.305539026996220
λ3	5.249605154112670
λ4	5.247228703973910
λ5	5.247224533144620
λ6	5.247224533131790
λ7	5.247224533131790
λ8	5.247224533131790
λ9	5.247224533131790
λ10	5.247224533131790

図 2

5 回の反復で収束したことがわかる。注意すべきなのは，この値は

$$Q_A(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + c_3\lambda^2 - \det A = 0$$

の解であり，

$$P_A(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4\lambda - \det A = 0$$

の解ではないことである。$Q_A(\lambda) = 0$の解，$\lambda = 5.2472$を用いて重要度のウエイトベクトルを最小二乗法の考え方に基づいて Solver で求めたところ，$\lambda = 5.2471, w_1 = 0.2100, w_2 = 0.5219, w_3 = 0.1677, w_4 = 0.0604, w_5 = 0.0398$となった。これを，固有値法を実装した「好きメーター」[3] で求めると正確な固有値は$\lambda_{max} = 5.253$，固有値法による重要度ウェイトは$w_1 = 0.21, w_2 = 0.521, w_3 = 0.168, w_4 = 0.061, w_5 = 0.04$となる。ヒューリスティック解としては十分ではないだろうか。

尚，幾何平均法では，$\lambda = 5.251, w_1 = 0.214, w_2 = 0.521, w_3 = 0.163, w_4 = 0.061, w_5 = 0.04$となる。幾何平均法と比較しても，十分に有効な性

能を持っていると言えよう。

2.2　フレーム法と正確なニュートン法

一般にn次の一対比較行列$A = \left(a_{ij}\right)$の固有多項式,

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + c_n$$

の係数c_kはフレーム法で求めることができる [4]。$c_0 = 1, A_0 = E$とおき,

$$c_1 = -\mathrm{Tr}(AA_0), A_1 = AA_0 + c_1E$$

$$c_2 = -\frac{\mathrm{Tr}(AA_1)}{2}, A_2 = AA_1 + c_2E$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$c_k = -\frac{\mathrm{Tr}(AA_{k-1})}{k}, A_k = AA_{k-1} + c_kE$$

とすれば，逐次，固有多項式の係数が得られる。

$$P_A'(\lambda) = n\lambda^{n-1} + (n-1)c_1\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}$$

であるので，固有方程式

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + c_n = 0$$

の解をニュートン法 [12] で求めることができる。一般に$\lambda_{max} \geq n$であることが知られているので [2][5][13]，本論の数値例の初期解は$\lambda_1 = 5$とした。反復は以下の漸化式で与えられる。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}$$

フレーム法の実行が下図３である。MMULT 関数を用いた。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	A	1	0.33333333	2	3	5							
2		3	1	5	7	8							
3		0.5	0.2	1	5	5							
4		0.33333333	0.14285714	0.2	1	2							
5		0.2	0.125	0.2	0.5	1							
6													
7	A0	1	0	0	0	0		AA0	=MMULT(B1:F5,B7:F11)		2	3	5
8		0	1	0	0	0			3	1	5	7	8
9		0	0	1	0	0			0.5	0.2	1	5	5
10		0	0	0	1	0			0.33333333	0.14285714	0.2	1	2
11		0	0	0	0	1			0.2	0.125	0.2	0.5	1

図 3

ニュートン法を Excel に組み込み，実行したものが下図４となる。フレーム法により，c_1~c_5の計算ができているので数式入力は容易である。図４に見るように，５回の反復で収束したことが分かる。

50	C1	-5	
51	C2	0	
52	C3	-6.78968254	-6.7896825
53	C4	-0.968214286	
54	C5=-detA	-0.474698413	0.47469841
55			
56	λ1	5	
57	λ2	=B56-(B56^5+$B$50*B56^4+$B$51*B56^3+$B$52*B56^2+$B$53*B56+$B$54)/(5*B56^4+4*$B$50*B56^3+3*$B$51*B56^2+2*$B$52*B56+$B$53)	
58	λ3	5.255956763622230	
59	λ4	5.253332419090660	
60	λ5	5.253327345945750	
61	λ6	5.253327345926820	
62	λ7	5.253327345926820	
63	λ8	5.253327345926820	
64	λ9	5.253327345926820	
65	λ10	5.253327345926820	

図 4

３　Solver による重要度

表計算ソフトウエアによる，固有ベクトルと重要度の計算は，高萩ら [11] によるべき乗法による実現が有用であるが，ここではあえて Excel の Solver を用いた方法を提案したい。

重要度の初期値として$w_1 = \frac{1}{5}, w_2 = \frac{1}{5}, w_3 = \frac{1}{5}, w_4 = \frac{1}{5}, w_5 = \frac{1}{5}$を用いた。これに対し積$Aw$を入力したものが図５となる。MMULT 関数を用いた。

λ max	5.2533273				重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	0.33333333	2	3	5	0.2	=MMULT(P57:T61,U57:U61)		
3	1	5	7	8	0.2	4.8	1.05066547	14.0575094
0.5	0.2	1	5	5	0.2	2.34	1.05066547	1.66238353
0.33333333	0.14285714	0.2	1	2	0.2	0.7352381	1.05066547	0.09949443
0.2	0.125	0.2	0.5	1	0.2	0.405	1.05066547	0.4168839
					1			17.7149302

図５

またニュートン法で計算した固有値を使って$\lambda_{max} w$を入力したものが図６となる。

λ max	5.2533273				重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	0.33333333	2	3	5	0.2	2.26666667	=$Q$56*U57	
3	1	5	7	8	0.2	4.8	1.05066547	14.0575094
0.5	0.2	1	5	5	0.2	2.34	1.05066547	1.66238353
0.33333333	0.14285714	0.2	1	2	0.2	0.7352381	1.05066547	0.09949443
0.2	0.125	0.2	0.5	1	0.2	0.405	1.05066547	0.4168839
					1			17.7149302

図６

wが固有ベクトル（重要度）であれば，$Aw - \lambda_{max} \mathrm{w} = 0$となるので，最小二乗法の考え方に倣い，$\|Aw - \lambda_{max} w\|^2$の最小二乗和を入力したものが順に，図 7,8 となる。

λ max	5.2533273				重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	0.33333333	2	3	5	0.2	2.26666667	1.05066547	=(V57-W57)^2
3	1	5	7	8	0.2	4.8	1.05066547	14.0575094
0.5	0.2	1	5	5	0.2	2.34	1.05066547	1.66238353
0.33333333	0.14285714	0.2	1	2	0.2	0.7352381	1.05066547	0.09949443
0.2	0.125	0.2	0.5	1	0.2	0.405	1.05066547	0.4168839
					1			17.7149302

図７

λ max	5.2533273				重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	0.33333333	2	3	5	0.2	2.26666667	1.05066547	1.47865891
3	1	5	7	8	0.2	4.8	1.05066547	14.0575094
0.5	0.2	1	5	5	0.2	2.34	1.05066547	1.66238353
0.33333333	0.14285714	0.2	1	2	0.2	0.7352381	1.05066547	0.09949443
0.2	0.125	0.2	0.5	1	0.2	0.405	1.05066547	0.4168839
					1			=SUM(X57:X61)

図 8

あとは重要度の合計が 1 となるように制約を置き（図 9），$\|Aw - \lambda_{max} w\|^2$ の最小値を求めるようにして（理論上最小値は 0 である），Solver に解かせればよい [1]（図 10）。

λ max	5.2533273				重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	0.33333333	2	3	5	0.2	2.26666667	1.05066547	1.47865891
3	1	5	7	8	0.2	4.8	1.05066547	14.0575094
0.5	0.2	1	5	5	0.2	2.34	1.05066547	1.66238353
0.33333333	0.14285714	0.2	1	2	0.2	0.7352381	1.05066547	0.09949443
0.2	0.125	0.2	0.5	1	0.2	0.405	1.05066547	0.4168839
					=SUM(U57:U61)			17.7149302

図 9

図 10

図 11 が計算結果となる。

λ max	5.2533273				重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	0.33333333	2	3	5	0.2099484	1.10292726	1.10292765	1.497E-13
3	1	5	7	8	0.52114459	2.7377434	2.73774312	7.4948E-14
0.5	0.2	1	5	5	0.16791131	0.88209296	0.88209306	8.6756E-15
0.33333333	0.14285714	0.2	1	2	0.06076858	0.31923713	0.31923722	8.9414E-15
0.2	0.125	0.2	0.5	1	0.04022713	0.21132643	0.21132629	1.9641E-14
					1			2.6191E-13

図 11

４　まとめ

固有値および重要度は，たとえば Web アプリの「好きメーター」[3] で計算できる。それによると, $\lambda_{max} = 5.253, w_1 = 0.21, w_2 = 0.521, w_3 = 0.168$, $w_4 = 0.061, w_5 = 0.04$が得られる。

本論での結果が$\lambda_{max} = 5.2533, w_1 = 0.2099, w_2 = 0.5211, w_3 = 0.1679, w_4 = 0.0607, w_5 = 0.0402$であるので，固有値も重要度も実用的な精度で計算が行えたものと考えることができる。この例では整合度はC.I.=0.063<0.1であるので，整合的と判定してよい [5][13]．固有多項式が簡単な$n = 3,4$に比べると [6][7][8]，固有多項式が複雑になる$n \geq 5$の場合も，本論で示したフレーム法の活用により，固有値および重要度を求めることができた。

尚，ニュートン法において，初期値をうまくとらないと，収束しないことがある（下図 12）[8]。

λ1	4
λ2	-2.674106427007200
λ3	-2.022471667335580
λ4	-1.500770505032270
λ5	-1.079948537707630
λ6	-0.738114070402021
λ7	-0.460295363575603
λ8	-0.230627211963883
λ9	0.028277248245595
λ10	-0.346918799840157

図 12

参考文献

[1] S. Boyd and L. Vandenberghe, Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares, Cambridge University Press, (2018)

[2] M. Brunelli, Introduction to the Analytic Hierarchy Process, Springer, (2015)

[3] 小畑経史，HTML5 による AHP Web アプリケーションの構築，大分大学工学部研究報告，62，(2015), 1-7

[4] 齊藤正彦，線型代数演習，東京大学出版会（1985）

[5] T.L. Saaty, Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill(1980)

[6] 白石俊輔，小畑経史，AHPにおける３次と４次の一対比較行列に関する考察，大分大学理工学部研究報告，68，(2021)，7-12

[7] 白石俊輔，小畑経史，Excelによる３次の一対比較行列の重要度の計算法，富大経済論集，67，1，(2021)，115-121

[8] 白石俊輔，小畑経史，Excelによる４次の一対比較行列の重要度の計算法，富大経済論集，67，2，(2021)，109-117

[9] S.Shiraishi , T. Obata and M. Daigo, Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, JORSJ, 41, 3,(1998), 404-414

[10] 杉原正顯，室田一雄，線形計算の数理，岩波書店（2009）

[11] 高萩栄一郎，中島信之，Excelで学ぶAHP入門 第２版，オーム社（2018）

[12] 高橋大輔，数値計算，岩波書店（1996）

[13] 刀根薫，ゲーム感覚意思決定法 AHP入門，日科技連（1986）

[14] https://www.apple.com/jp/mac/numbers/compatibility/

提出年月日：2021 年 12 月 9 日