Excelによる４次の一対比較行列の重要度の計算法

白石　俊輔・小畑　経史

富 山 大 学 紀 要. 富 大 経 済 論 集　　第67巻第２号抜刷（2021年12月）

富山大学経済学部

Excelによる4次の一対比較行列の重要度の計算法

白石　俊輔・小畑　経史

キーワード：4次の一対比較行列，重要度，固有値，ニュートン法，Excel，Solver

概要

AHP（Analytic Hierarchy Process，階層分析法）では，一対比較行列を基に，評価基準や代替案の重要度が求められる。重要度の算出には，通常，固有値法または幾何平均法を用いる。表計算ソフトを用いる場合は，幾何平均法が簡便であるが，固有値を求めないので，AHPの最大の特長とも言える整合度の計算が行われない。そこで本論文では比較項目が4つの場合に限るが，Microsoft社のExcelによる固有値および重要度の求め方を提案する。

1　はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process，階層分析法）は，重要度の計算に幾何平均法を用いることにより，AHPの手順を表計算ソフトで簡単に実行することができる。ウエイトの計算にGEOMEAN関数が使え，総合重要度の計算にSUMPRODUCT関数が使えるからだ[1]。ただし，幾何平均法で問題になるのは，整合度の計算である。幾何平均法による整合度の計算法も提唱されてはいるが，あまり一般的ではない[11]。整合度は通常固有値法によって求められる。AHPの固有値法においては，n次の一対比較行列Aに対し，固有値問題

$$Aw = \lambda_{max} w$$

を解き，重要度wと求められた最大固有値λ_{max}により整合度

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

を計算し，評価の一貫性を判断する [2][4][11]。固有値問題を数値的に解くためには，一般にべき乗法が用いられる [8][11]。Excel によるべき乗法の適用は高萩他 [9] に詳しい。行列演算さえできれば，どのような表計算ソフトでも実行可能なのがこの方法の利点である。ただし Apple 社の Numbers では，行列やベクトルの積を求める Excel の MMULT 関数に非対応であるので，仕込みがやや煩雑になる [12]。

本論文で扱うのは$n = 4$の時である。この場合，固有多項式が簡便な形で書けることから，ニュートン法を使えば簡単に固有値を求めることができる。そこでその結果を基にして，最適化問題の解を探索する Excel のアドイン機能である Solver を利用して，最小二乗解として重要度を求める計算法を提案する。

尚，本論文は [6] の継続研究であるので，記述内容はこれに従う。

２　ニュートン法による固有値

一般にn次の一対比較行列$A = (a_{ij})$は，逆数性（reciprocal）

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

を満たすことから，その固有多項式は，

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \mathrm{det} A$$

であることが示されている [7]。λ^{n-2} の係数は 0 であることに注目されたい。したがって，4 次の一対比較行列に対する固有多項式は，

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + c_3\lambda + \mathrm{det}A$$

となる。ここで，

$$c_3 = \sum_{i<j<k}\left(2 - \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right)$$

である [7]。

$$P_A'(\lambda) = 4\lambda^3 - 12\lambda^2 + c_3$$

であるので，固有方程式

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + c_3\lambda + \mathrm{det}A = 0$$

の解をニュートン法 [10] で求めることができる。一般に$\lambda_{max} \geq 4$であることが知られているので [2][4][11]，初期解は$\lambda_1 = 4$とした。反復は以下の漸化式で与えられる。

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P_A'(\lambda_k)}$$

一対比較行列には，次の数値例を用いる [11]。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1/3 & 1 & 5 & 7 \\ 1/5 & 1/5 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/7 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

この数値例に対し，ニュートン法を Excel に組み込み，実行したものが下図 1 となる。

$$c_3 = -3.885714286$$
$$\mathrm{detA} = -0.812698413$$

$$P_A(\lambda_k) = \lambda_k^4 - 4\lambda_k^3 + c_3\lambda_k + \mathrm{detA}$$
$$P_A'(\lambda_k) = 4\lambda_k^3 - 12\lambda_k^2 + c_3$$

なので，数式入力は容易である。c_3も高々${}_4C_3 = 4$項目の入力を行えばよい。図 1 に見るように，5 回の反復で$\lambda_{max} = 4.2281112 \ldots$に収束したことが分かる。

C3	-3.885714286
detA	-0.812698413
λ1	4
λ2	=B14-(B14^4-4*B14^3+$B$11*B14+$B$12)/(4*B14^3-12*B14^2+$B$11)
λ3	4.229363816108630
λ4	4.228112292650730
λ5	4.228111237233530
λ6	4.228111237232780
λ7	4.228111237232780
λ8	4.228111237232780
λ9	4.228111237232780
λ10	4.228111237232780

図 1

３　Solver による重要度

表計算ソフトウエアによる，固有ベクトルと重要度の計算は，高萩ら [9] によるべき乗法による実現が有用であるが，ここではあえて Excel の Solver を用いた方法を提案したい。

重要度の初期値として$w_1 = \frac{1}{4}, w_2 = \frac{1}{4}, w_3 = \frac{1}{4}, w_4 = \frac{1}{4}$を用いた。これに対し積$Aw$を入力したものが図２となる。MMULT 関数を用いた。

λ max	4.2281112			重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	3	5	7	0.25	=MMULT(F15:I18,J15:J18)		8.66108532
0.33333333	1	5	7	0.25	3.33333333	1.057027809	5.18156684
0.2	0.2	1	3	0.25	1.1	1.057027809	0.00184661
0.14285714	0.14285714	0.33333333	1	0.25	0.4047619	1.057027809	0.42545081
				1			14.2699496

図 2

またニュートン法で計算した固有値を使って$\lambda_{max} w$を入力したものが図３となる。

λ max	4.2281112			重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	3	5	7	0.25	4	=$G$14*J15	8.66108532
0.33333333	1	5	7	0.25	3.33333333	1.057027809	5.18156684
0.2	0.2	1	3	0.25	1.1	1.057027809	0.00184661
0.14285714	0.14285714	0.33333333	1	0.25	0.4047619	1.057027809	0.42545081
				1			14.2699496

図 3

wが固有ベクトル（重要度）であれば，$Aw - \lambda_{max} \mathrm{w} = 0$となるので，最小二乗法の考え方 [1] に従い，$\|Aw - \lambda_{max} w\|^2$の最小二乗和を入力したものが順に，図 4,5 となる。

λ max	4.2281112			重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	3	5	7	0.25	4	1.057027809	=(K15-L15)^2
0.33333333	1	5	7	0.25	3.33333333	1.057027809	5.18156684
0.2	0.2	1	3	0.25	1.1	1.057027809	0.00184661
0.14285714	0.14285714	0.33333333	1	0.25	0.4047619	1.057027809	0.42545081
				1			14.2699496

図 4

λ max	4.2281112			重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	3	5	7	0.25	4	1.057027809	8.66108532
0.33333333	1	5	7	0.25	3.33333333	1.057027809	5.18156684
0.2	0.2	1	3	0.25	1.1	1.057027809	0.00184661
0.14285714	0.14285714	0.33333333	1	0.25	0.4047619	1.057027809	0.42545081
				1			=SUM(M15:M18)

図 5

あとは重要度の合計が 1 となるように制約を置き（図 6），$\|Aw - \lambda_{max} w\|^2$ の最小値を求めるようにして（理論上最小値は 0 である），Solver に解かせればよい（図 7）。

λ max	4.2281112			重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	3	5	7	0.25	4	1.057027809	8.66108532
0.33333333	1	5	7	0.25	3.33333333	1.057027809	5.18156684
0.2	0.2	1	3	0.25	1.1	1.057027809	0.00184661
0.14285714	0.14285714	0.33333333	1	0.25	0.4047619	1.057027809	0.42545081
				=SUM(J15:J18)			14.2699496

図 6

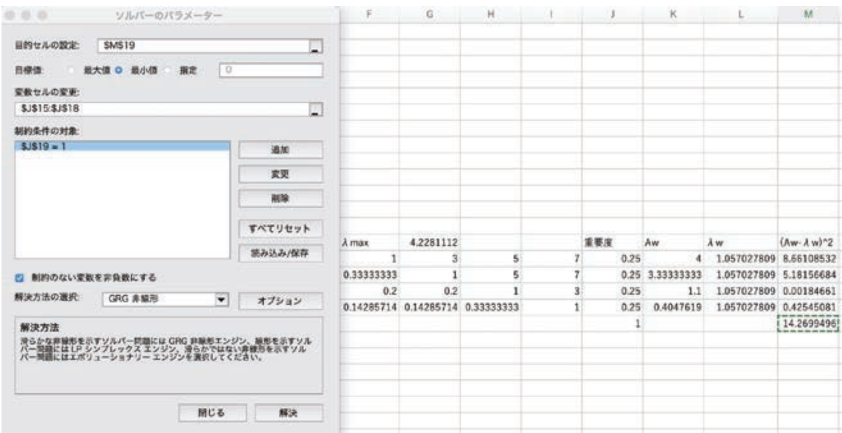

図 7

図 8 が計算結果となる。

λ max	4.2281112			重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	3	5	7	0.54373561	2.29897484	2.298974634	4.0743E-14
0.33333333	1	5	7	0.31092651	1.31463141	1.31463187	2.1084E-13
0.2	0.2	1	3	0.09745274	0.41204059	0.412041022	1.8426E-13
0.14285714	0.14285714	0.33333333	1	0.04788514	0.20246398	0.202463712	7.0608E-14
				1			5.0645E-13

図 8

４　まとめ

固有値および重要度は，たとえば Web アプリの「好きメーター」[3] で計算できる。それによると，$\lambda_{max} = 4.228, w_1 = 0.544, w_2 = 0.311, w_3 = 0.097,$ $w_4 = 0.048$が得られる。本論での結果が$\lambda_{max} = 4.2281, w_1 = 0.5437,$ $w_2 = 0.3109, w_3 = 0.0974, w_4 = 0.0478$であるので，固有値も重要度も実用的な精度で計算が行えたものと考えることができる。この例では整合度は C.I.=0.076<0.1 であるので，整合的と判定してよい．固有多項式が簡単な$n = 3,4$に比べると [5]，固有多項式が複雑になる$n \geq 5$の場合は，今後の課題としたい。

一方，$n = 4$の場合も，次のような例を考えると，Newton 法の初期解を無自覚に$\lambda_1 = 4$としてよいわけではないことが分かる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1/8 & 8 \\ 1/8 & 1 & 7 & 8 \\ 8 & 1/7 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

この一対比較行列の固有多項式に対して，Newton 法の反復は，以下の通りとなる．

初期解を$\lambda_1 = 4$とした場合。

k	λ_k
1	4
2	-0.223698387552739
3	0.335916364839731
4	0.336278037953792
5	0.336278037046490
6	0.336278037046490

初期解を$\lambda_1 = 7$とした場合。

k	λ_k
1	7
2	14.249840836239000
3	11.598715594278600
4	10.048988345204200
5	9.434868757280800
6	9.338234707707280
7	9.335978296973030
8	9.335977084712800
9	9.335977084712450
10	9.335977084712450

初期解$\lambda_1 = 4$では最大固有値$\lambda_{max} = 9.335977\ldots$に収束せず，最大固有値に収束させるためには，初期解をかなり大きな値にとらなければならないことが分かる。初期解についての，Newton 法での収束判定条件は今後の研究課題である。

1 Microsoft社のExcelと互換性のあるApple社のNumbersの関数については，[12]を見よ。Numbersには MMULT 関数は無いし，Solver も使えない。

参考文献

[1] S. Boyd and L. Vandenberghe, Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares, Cambridge University Press, (2018)

[2] M. Brunelli, Introduction to the Analytic Hierarchy Process, Springer, (2015)

[3] 小畑経史，HTML5 による AHP Web アプリケーションの構築，大分大学工学部研究報告，62,(2015), 1-7

[4] T.L. Saaty, Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill(1980)

[5] 白石俊輔，小畑経史，AHPにおける３次と４次の一対比較行列に関する考察，大分大学理工学部研究報告，68,(2021), 7-12

[6] 白石俊輔，小畑経史，Excelによる３次の一対比較行列の重要度の計算法，富大経済論集，67，1(2021)，115-121

[7] S.Shiraishi , T. Obata and M. Daigo, Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, JORSJ, 41, (1998), 404-414

[8] 杉原正顯，室田一雄，線形計算の数理，岩波書店（2009）

[9] 高萩栄一郎，中島信之，Excelで学ぶAHP入門 第２版，オーム社（2018）

[10] 高橋大輔，数値計算，岩波書店（1996）

[11] 刀根薫，ゲーム感覚意思決定法 AHP入門，日科技連（1986）

[12] https://www.apple.com/jp/mac/numbers/compatibility/

提出年月日：2021 年９月８日