Excelによる3次の一対比較行列の重要度の計算法

白石　俊輔・小畑　経史

富 山 大 学 紀 要. 富 大 経 済 論 集　　第67巻第1号抜刷（2021年8月）

富山大学経済学部

Excel による 3 次の一対比較行列の重要度の計算法

白石　俊輔・小畑　経史

キーワード：3次の一対比較行列，重要度，固有値，ニュートン法，Excel, Solver

概要

AHP（Analytic Hierarchy Process，階層分析法）においては，一対比較を基に，評価基準や代替案の重要度が求められる。重要度の算出には，通常，固有値法または幾何平均法を用いる。Excel を用いる場合は，幾何平均法が簡便であるが，固有値を求めないので，整合度の計算が行われない。そこで本論文では比較項目が 3 つの場合に限って，Microsoft 社の Excel による固有値および重要度の求め方を提案する。

1　はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process，階層分析法）は，その性質上 Excel を始めとする表計算ソフトウエアとの相性がよい。実際，重要度の計算に幾何平均法を用いることにより, AHP の手順を簡単に実行することができる。ただし，幾何平均法で問題になるのは，整合度の計算である。AHP の固有値法においては, n 次の一対比較行列 A に対し，固有値問題

$$Aw = \lambda_{max} w$$

を解き，重要度 w と求められた最大固有値 λ_{max} により整合度

$$\mathrm{C.I.} = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

を計算し，評価の一貫性を判断する [2][6][12]。固有値問題を数値的に解くためには，一般にべき乗法が用いられる [9][12]。Excel によるべき乗法の適用は高萩他 [10] に詳しい。

本論文では$n = 3$の時に限れば，固有多項式が簡便な形で書けることから，簡単にニュートン法により固有値を求めることができるので，その結果を基にして最適化問題の解を探索する Excel のアドイン機能である Solver を利用して重要度の計算法を提案する。

２　ニュートン法による固有値

一般にn次の一対比較行列$A = (a_{ij})$は，逆数性

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

を満たすことから，その固有多項式は，

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \mathrm{det}A$$

であることが示されている [8]。λ^{n-2}の係数は 0 であることに注目されたい。したがって，3 次の一対比較行列に対する固有多項式は，

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \mathrm{det}A$$

となる。また簡単な計算により，

$$\det A = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}} - 2$$

であることも分かる。

$$P_A'(\lambda) = 3\lambda^2 - 6\lambda$$

であるので，固有方程式

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \det A = 0$$

の解をニュートン法 [11] で求めることができる。一般に$\lambda_{max} \geq 3$であることが知られているので [2][6][12]，初期解は$\lambda_1 = 3$とした。反復は以下の漸化式で与えられる。

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{P_A(\lambda_n)}{P_A'(\lambda_n)}$$

一対比較行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，ニュートン法を Excel に組み込み実行したものが下図 1 となる。

$$\det A = \frac{1}{6}$$

$$P_A(\lambda_n) = \lambda_n^3 - 3\lambda_n^2 - \frac{1}{6}$$

$$P_A'(\lambda_n) = 3\lambda_n^2 - 6\lambda_n$$

なので，数式入力は容易である。4 回の反復で収束したことが分かる。

7	detA	1/6	λ max
8			
9	λ 1	3	
10	λ 2	=B9-(B9^3-3*B9^2-B7)/(3*B9^2-6*B9)	
11	λ 3	3.01829474017613000	
12	λ 4	3.01829470728963000	
13	λ 5	3.01829470728963000	

図 1

尚，3 次の一対比較行列に対する一般論から，

$$\lambda_{max} = \sqrt[3]{\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}} + \sqrt[3]{\frac{a_{13}}{a_{12}a_{23}}} + 1$$

であることも知られているが [3][4][7]，これにより検算すると，

$$\lambda_{max} = 3.01829470728963$$

が確かめられる。

３　Solver による重要度

表計算ソフトウエアによる，固有ベクトルと重要度の計算は，高萩ら [10] によるべき乗法の実現が有用であるが，ここではあえて Excel の Solver を用いた方法を提案したい。

重要度の初期値として$w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3}$を用いた。これに対し積$Aw$を入力したものが図２となる。

λ max	3.0182947		重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	2	4	0.33333333	=MMULT(F10:H12,I10:I12)		
0.5	1	3	0.33333333	1.5	1.00609824	0.243938953
0.25	0.33333333	1	0.33333333	0.52777778	1.00609824	0.228790461
			1			2.234282417

図 2

またニュートン法で計算した固有値を使って$\lambda_{max}w$を入力したものが図 3 となる。

λ max	3.0182947		重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	2	4	0.33333333	2.33333333	=G9*I10	1.761553004
0.5	1	3	0.33333333	1.5	1.00609824	0.243938953
0.25	0.33333333	1	0.33333333	0.52777778	1.00609824	0.228790461
			1			2.234282417

図 3

wが固有ベクトル（重要度）であれば，$Aw = \lambda_{max}w$となるように計算させるために，最小二乗法の考え方に倣い [1], $\|Aw - \lambda_{max}w\|^2$を入力したものが順に，図 4,5 となる。

λ max	3.0182947		重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	2	4	0.33333333	2.33333333	1.00609824	=(J10-K10)^2
0.5	1	3	0.33333333	1.5	1.00609824	0.243938953
0.25	0.33333333	1	0.33333333	0.52777778	1.00609824	0.228790461
			1			2.234282417

図 4

λ max	3.0182947		重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	2	4	0.33333333	2.33333333	1.00609824	1.761553004
0.5	1	3	0.33333333	1.5	1.00609824	0.243938953
0.25	0.33333333	1	0.33333333	0.52777778	1.00609824	0.228790461
			1			=SUM(L10:L12)

図 5

あとは重要度の合計が 1 となるように制約を置き, $\|Aw - \lambda_{max}w\|^2$の最小値を，Solver に解かせればよい（図 7)。

λ max	3.0182947		重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	2	4	0.33333333	2.33333333	1.00609824	1.761553004
0.5	1	3	0.33333333	1.5	1.00609824	0.243938953
0.25	0.33333333	1	0.33333333	0.52777778	1.00609824	0.228790461
			=SUM(I10:I12)			2.234282417

図 6

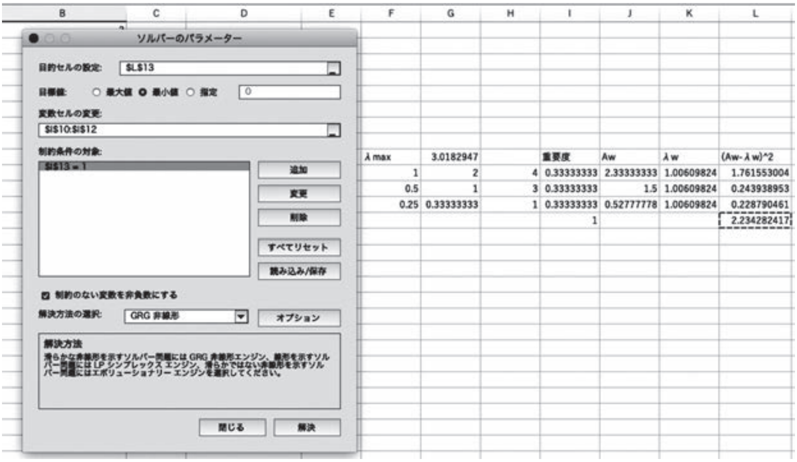

図 7

図 8 が計算結果となる。

λ max	3.0182947		重要度	Aw	λ w	(Aw- λ w)^2
1	2	4	0.55842462	1.68548965	1.68549008	1.78473E-13
0.5	1	3	0.31961824	0.96470196	0.96470205	7.05645E-15
0.25	0.33333333	1	0.12195714	0.36810271	0.36810258	1.54545E-14
			1			2.00984E-13

図 8

4　まとめ

固有値および重要度は，たとえば Web アプリの「好きメーター」[5] で計算できる。それによると，$\lambda_{max} = 3.018, w_1 = 0.558, w_2 = 0.32, w_3 = 0.122$

が得られる。本論での結果が$\lambda_{max} = 3.0182, w_1 = 0.5584, w_2 = 0.3196,$ $w_3 = 0.1219$であるので，固有値も重要度も実用的な精度で計算が行えたものと考えることができる。この例では整合度はC.I.=0.009<0.1であるので，整合的と判定してよい [2][6][12]．$n = 4$の場合も同様の計算が可能であると考えられるので，今後の課題としたい。

参考文献

[1] S. Boyd and L. Vandenberghe, Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares, Cambridge University Press, (2018)

[2] M. Brunelli, Introduction to the Analytic Hierarchy Process, Springer, (2015)

[3] G. Crowford and C. Williams, A note on the Analysis of Surjective Judgement Matrices, Journal of Mathematical Psychology, 29, (1985), 387-405

[4] P.C. Morris, Weighting Inconsistent Judgement, Pi Mu Epsilon Journal, 6, (1979), 576-581

[5] 小畑経史，HTML5 による AHP Web アプリケーションの構築，大分大学工学部研究報告年報，62,(2015), 1-7

[6] T.L. Saaty, Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill(1980)

[7] S.Shiraishi and T.Obata, Some Remarks on the Maximum Eigenvalue of 3rd Order Pairwise Comparison Matrix in AHP, Bulletin of Informatics and Cybernetics, 53, (2021), 1-13

[8] S.Shiraishi , T. Obata and M. Daigo, Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, JORSJ, 41, (1998), 404-414

[9] 杉原正顯，室田一雄，線形計算の数理，岩波書店（2009）

[10] 高萩栄一郎，中島信之，Excelで学ぶAHP入門 第２版，オーム社（2018）

[11] 高橋大輔，数値計算，岩波書店（1996）

[12] 刀根薫，ゲーム感覚意思決定法 AHP入門，日科技連（1986）

提出年月日：2021 年 5 月 10 日