

独立的支出と景気循環の安定性
—回廊安定的な内生的循環をめぐって—
Working Paper No.243

大坂 洋*

2009年6月

概要

われわれは、独立的支出を伴うハロッド＝置塩型投資関数をもつマクロ動学システムのふるまいを検討する。パラメータにおうじて、この体系はおおくの同じ型の投資関数をもつシステムと同様の単調な不安定性を示す一方で、安定的な内生的循環をもつことを示す。この循環パターンは3つの意味で特異なものである。第一にこのサイクルは、回廊安定である。回廊安定な均衡を導くモデルはいくつかあるが、回廊安定なサイクルを導くモデルは知られていない。第二に、不安定性の強いとされるハロッド＝置塩型投資関数をもつ動学体系において、明示的な天井の存在なしに、好況から不況の反転を導かれることである。第三にこの内生的循環のパターンは、投資の非負制約に起因するものであり、よくある Hopf 分岐によるものではない点である。

* 富山大学経済学部 <mailto:osaka@eco.u-toyama.ac.jp>

1 はじめに

われわれはハロッド置塩型投資関数^{*1}と独立的支出をとまなうマクロ動学モデルの振舞いを検討する。独立的支出は、その一形態である基礎消費の検討もふくめて、景気循環における不況から好況への転換（以降、上方への反転と呼ぶ）の重要な契機の一つと見做されてきた。本論文は、この観点にとどまらず、システム全体の安定性においても、独立的支出が重要な役割を演じうることを示すものである。なぜならば、独立的支出は、上方への転換のみでなく、好況から不況への転換（以降、下方への反転と呼ぶ）も生じさせる要因になりうるからである。

われわれは、われわれのモデルの大域的分析において、通常のリミット・サイクルとは異なる理路から導かれる安定的な閉軌道を見いだす。このサイクルの存在には投資の非負性がかかわっている。このことは、通常のリミット・サイクルが変数の範囲の制約に関係なく発生することと対称的である。このようなサイクルの存在はこの論文の重要な貢献の一つである。

た、このサイクルはいわゆる回廊安定性 (corridor stability) をしめす^{*2}。回廊安定性とは、均衡の周辺では安定的だが、その領域をはずれると不安定性を示すことを意味する。回廊安定性を示す多くのモデルでは安定的な領域内にある均衡点が安定となる。しかし、このモデルでは安定な領域内でリミット・サイクルが発生する。このサイクルが発生しているとき、ハロッド=置塩型の投資関数がしばしば示す単調な不安定性が景気循環の山と谷において、反転させられていることがわかる。

このことからの直接的な経済学的・あるいは政策的な含意は、独立的支出のコントロールによる安定的な景気循環システムの設計可能性である。独立的支出は所得と独立した一定率で成長する消費と輸出、あるいは、一定率で成長する景気に非感応的な政府支出ある。したがって、政府は独立的な消費と輸出をみながら、政府支出をコントロールすることによって、独立的支出の成長率をコントロールすることが可能だからである。

また、回廊安定性が生じる場合であっても、その安定領域からのいったんはずれると、景気の単調な過熱が発生する。つまり、景気循環の安定性をしめす経済も、経済を安定領域から外へおしやるようなショックに対しては安定ではない。つまり、景気循環が安定的な経済も大きなショックに対しては、構造変化にうつるような様相の変化を見せる可能性がある。

本論文でのモデルは、結果の独自性にもかかわらず、モデルの設定は比較的単純なものである。現時点での貢献がえられた理由のひとつは、ハロッド=置塩型投資関数についての研究が盛んであった 1990 年代までに、十分に強力な計算機環境が簡単には手にはいらなかったことかもしれない。われわれのモデルをふくめ、多くのマクロ動学モデルは非線形であり、厳密な証明は困難である。推論の確認には数値計算が不可欠である場合が多い。逆にいえば、かつての研究は厳密な証明可能性、数値計算の計算量によって制約されてきたといえる。われわれの結果が現時点でえられたことは、現時点で入手が容易な計算機環境に位相図を併用することによって、多くの新しい成果をえられうる可能性を示していると思う^{*3}。

論文の構成は以下のとおりである。まず、われわれはモデルの設定を説明する。つぎに、均衡点近傍でのふ

*1 たとえば、置塩 (1976)、置塩編 (1988) などを参照。

*2 回廊安定性を持つ経済システムの可能性は、Leijonhufvud(1973) によって最初に指摘された。

*3 ハロッド=置塩型投資関数にかんして、コンピュータ・シミュレーションを主体にした先駆的業績である置塩編 (1988) も多くの分析はモデルごとにせいぜいの数個の特定のパラメータによる例示にとどまり、包括的な分析にはほど遠い。これらの分析は NEC PC-9801 の N88Basic が用いられており、分析はおそらく 20Mhz 程度の演算スピードの Intel 286CPU、もしくは 10Mhz 程度の V30(Intel 8086 互換 CPU) などの 16bit のパーソナルコンピュータでなされたと思われる。2009 年時点の平均的なパーソナルコンピュータの 10000 分の 1 をこえない程度の計算速度であると推測される。

るまいと、位相図の分析によって、われわれのモデルの振舞のパターンが、ほぼ単調な発散と内生的な景気循環をもつパターンの二つに分類されることを示す。つぎにコンピュータ・シミュレーションによって、独立の支出の成長率と投資関数の不安定性指数の二つのパラメータと動学的振舞いの関係を検討する。この分析は、特定のパラメータにおいて、われわれの位相図による分析が妥当であることも示している。最後に、このモデルの結果の経済政策的含意を検討し、のこされた課題を提起する。

2 モデル

2.1 独立の支出

独立の支出とは有効需要の一部を構成し、(1) 一定の成長率で成長し、なおかつ、(2) 資本ストックの増加に影響をあたえないものを呼ぶ。(2) より、需要と独立に成長する粗投資はわれわれのいう意味での独立の支出ではない。通常のマクロ・モデルでおかれる支出の他の項目は消費、純輸出、政府支出である。したがって、一定率で成長する基礎消費、一定率で成長する純輸出、一定率で成長する政府支出は、ここでのいうところの独立の支出である。

独立の支出は一定率で成長すると仮定する。独立の支出を B と、その成長率を γ と、それぞれおけば、

$$\frac{\dot{B}}{B} = \gamma,$$

もしくは、 $t = 0$ における B を B_0 とおいて、

$$B = B_0 \exp \gamma t \tag{1}$$

である。

2.2 ハロッド＝置塩型投資関数

ハロッド置塩型投資関数は、稼働率によって、粗投資率が調整されることを前提にしている。

稼働率 δ の定義は以下のとおりである。

$$\delta = \frac{Y}{\sigma K}$$

ここで、 Y は国民所得、 K は資本ストック、 σ は正常資本ストック本投入係数をあらわす。

国民所得はケインズの有効需要原理によって決定されると仮定する。有効需要の構成は国民所得に比例する従属的消費、独立の支出、粗投資であるとする。すなわち、独立でない政府支出、輸出は捨象する。1 から従属的消費の限界消費性向ひいたものを s 、粗投資を I 、独立の支出を B とおけば、

$$Y = \frac{1}{s} \{I + B\}$$

となる。

これより、これより、粗投資率を $g = I/K$ 、資本ストックあたりの独立の支出を $b = B/K$ とおけば、稼働率は $(b + g)/(s\sigma)$ となる。われわれのモデルは、資本減耗を仮定するので、 g は資本ストックの成長率とは一致しないことに注意しよう。

線形に特定化されたハロッド置塩型投資関数は、粗投資の稼働率への感応係数を α としたとき、以下の関係がなりたつ。

$$\dot{g} = \alpha \{ \delta - 1 \}$$

われわれは以上にくわえて、粗投資に非負制約をおく。粗投資がゼロのとき、粗投資の時間微分が負になることはないことを仮定する。それ以外は上の式にしたがう。つまり、 $\delta = (b + g)/(s\sigma)$ を考慮すれば、

$$\dot{g} = \begin{cases} 0 & (g + b \leq s\sigma \text{ かつ } g = 0) \\ \alpha \left\{ \frac{b+g}{s\sigma} - 1 \right\} & (\text{上記以外}) \end{cases} \quad (2)$$

となる。

2.3 動学体系全体

資本ストックは減耗をとめない、その減耗率を d とおく。 $\dot{K} = I - dK$ となる。したがって、

$$\frac{\dot{K}}{K} = g - d.$$

$$\frac{\dot{b}}{b} = \left(\frac{\dot{B}}{K} \right) / \left(\frac{B}{K} \right) = \{\gamma - g + d\}.$$

したがって、

$$\dot{b} = b\{\gamma - g + d\} \quad (3)$$

(2) 式と (3) 式によって、我々のモデルの動学システムが得られる。

われわれは以下では、 $s\sigma > \gamma + d$ のケースにパラメータを限定して分析を行なう。この条件は、のちに示す安定的なサイクルが発生する必要条件であり、そのサイクルの発生に分析の焦点を置くからである。

また、経済的に意味のあるのは $g \geq 0, b > 0$ のケースであり、内生変数がこの範囲にあるケースが分析の対象である。 g に非負制約をつけたこと、および、(1) 式より、この範囲から出発するいすべての軌道は、この範囲の中に入る。

3 位相図による分析

3.1 均衡点、および、その近傍のふるまい

以下では、均衡における線形近似の固有値および、固有ベクトルについての計算結果を用いる。計算の詳細は付録 A にまとめる。

われわれのモデルは二つの均衡点をもつ。一つ目を (b^*, g^*) とおくと、 $g^* = \gamma + d, b^* = s\sigma - (\gamma + d)$ となる。この均衡点を均衡点 I と呼ぶ。もうひとつは、それを (g^{**}, b^{**}) とおくと、 $g^{**} = s\sigma, b^{**} = 0$ を満す点である。この均衡点を均衡点 II と呼ぶ。 $g \geq 0, b > 0$ から出発する軌道は有限時間内に均衡点 II に到達しない。しかし、この点が均衡点であることを確認しておくことは、モデルの振舞いを分析する上で重要である。

$b-g$ 平面のグラフは $\dot{g} = 0$ を満す点の集合、すなわち、直線 $g + b = s\sigma$ と、 $\dot{b} = 0$ を満す点の集合、すなわち、直線 $g = \gamma + d$ によって、4つの領域に分けられる(図1の領域 A, B, C, D)。いずれの領域にあるかが \dot{g}, \dot{b} の正負をさだめる。このことを図示したのが、図1である。

さて、われわれの動学システムを線形近似すれば、以下ようになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{s\sigma} & \frac{\alpha}{s\sigma} \\ -b & \gamma + d - g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dg \\ db \end{pmatrix}$$

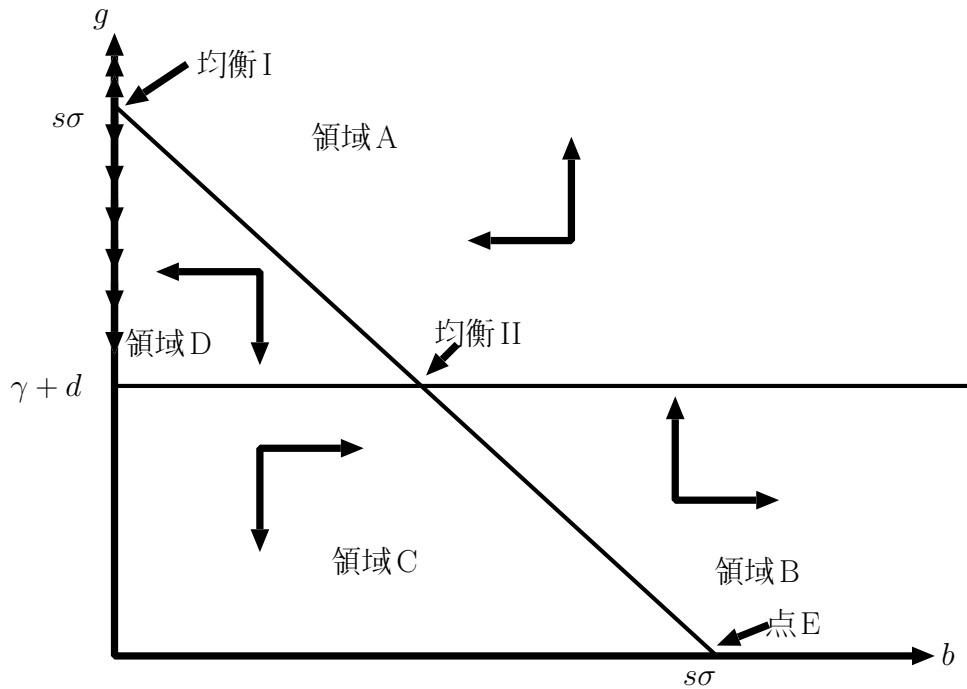


図 1 二つの均衡と 4 つの領域

3.1.1 均衡点 II の近傍での振舞い

均衡点 II 近傍での線形近似は以下のとおり。

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{s\sigma} & \frac{\alpha}{s\sigma} \\ 0 & \gamma + d - s\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - g^{**} \\ b - b^{**} \end{pmatrix}$$

この均衡点における固有値の固有方程式は、

$$\left(\lambda - \frac{\alpha}{s\sigma}\right)(\lambda - \gamma - d + s\sigma) = 0$$

となる。したがって、固有値は $\alpha/s\sigma > 0$ 、および、 $\gamma + d - s\sigma < 0$ である。つまり、均衡 II は鞍点である。ポントリャーギン (1968), §22, 定理 22*⁴により、 $g-b$ 平面の全領域について、この均衡点は $t \rightarrow \infty$ において、均衡点にいきつく二つの軌道と、 $t \rightarrow -\infty$ において、均衡点にいきつく二つの軌道をもつ。それらの軌道は、均衡点において、それぞれ、均衡点でのマイナスの固有値に対応する固有ベクトルと均衡点でのプラスの固有値に対応する固有ベクトルに接する。前者を均衡 II の安定接触線、後者を均衡 II の不安定接触線と呼ぶ。二つの安定接触線と不安定接触線はそれぞれ、一意である。均衡点のまわりで、これらの接触線からはずれ、かつ、均衡の近くにある領域を通る経路は、 $t \rightarrow \infty$ にしたがって、不安定接触線に漸近し、 $t \rightarrow -\infty$ にしたがって、安定接触線に漸近する。

均衡点の線形近似により、 $b-g$ 平面において、正の固有値に対応する固有ベクトルの方向は、垂直であり、負の固有値に対応する固有ベクトルの方向は傾きは $0 > -\alpha/\{s\sigma(\gamma + d - s\sigma) + \alpha\} > -1$ である。直線

*4 邦訳 244 ページ

$g + b = s\sigma$ の傾きが -1 であることに注意すれば、 $g \geq 0, b > 0$ で均衡 II へ漸近する経路は、均衡点の近傍で、図 1 の領域 A にあり、かつ、マイナスの傾きをもつことがわかる。このことは位相図からも確認できる。

均衡点の近くで、安定接触線上にない領域をとる経路は、 $t \rightarrow \infty$ にしたがって、不安定接触線である $b-g$ 平面の縦軸に漸近する。それらは、均衡点の上方に行くものと下方に行くものにわけられるが、これを分割は、経路が通る領域が安定接触線の上方にあるか、下方にあるかによる。

以上の均衡点 II 付近のシステムの振舞いは図 2 に示されている。

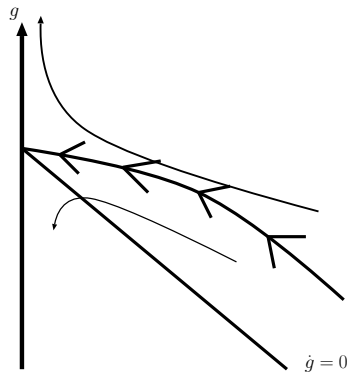


図 2 均衡 II 近傍の振舞い

3.1.2 均衡点 I の近傍での振舞い

均衡点 I 近傍での線形近似は以下のとおり。

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{s\sigma} & \frac{\alpha}{s\sigma} \\ (\gamma + d) - s\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - g^* \\ b - b^* \end{pmatrix}$$

均衡点 I の固有値の実部はかならず正である。したがって、均衡点に十分に近い領域において、均衡点 I は不安定である。固有値のとりうるパターンは、異なる二つの正の実数、正の実数の重根、正の実部をもつ共役複素数の 3 つである。いずれのパターンをとるかは、投資関数の調整係数 α の s, σ, γ, d への相対的大きさによって決められる。 α が $4s\sigma(s\sigma - (\gamma + d))$ より、大きければ、異なる二つの正の実数、等しければ、正の実数の重根、小ければ、正の実部をもつ共役複素数となる。

固有値 λ に対応する $b-g$ 平面上の固有ベクトルを (x_b, x_g) とおく。重根のケースでは、 $x_g/x_b = -2$ となる。異なる正の実根のケースでは、大きな固有値に対応する固有ベクトルの傾き -2 より小さく、小さな固有ベクトルの傾きは 0 と -2 の間の値をとる。つまり、二つの固有ベクトルは -2 をはさんでマイナスの値をとる。

これらのおおのの固有ベクトルに対して、2 本の不安定接触線が存在する。つまり、 $t \rightarrow -\infty$ において、均衡の近傍の経路はこれらの固有ベクトルに接しつつ、均衡点に漸近する。二つの固有ベクトルの向きから、均衡近傍にある経路は、 $t \rightarrow \infty$ のとき、図 1 の領域 A あるいは C にはいることがわかる。直感的に言えば、固有値が重根ならば、均衡への入口は -2 の傾きの固有ベクトルに対応する安定接触線のみであり、固有値が異なる二つの正の実数ならば、均衡への入口は、 -2 をはさんだ二つのマイナスの固有ベクトルに対応する安定接触線である。均衡の近傍で、この入口の外部から出発する経路は $t \rightarrow -\infty$ において、いずれかの固有ベクトルの安定接触線に入口の外から漸近する。図 3、図 4 を参照。

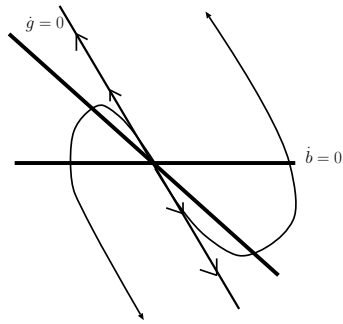


図3 均衡 I(正の重根)

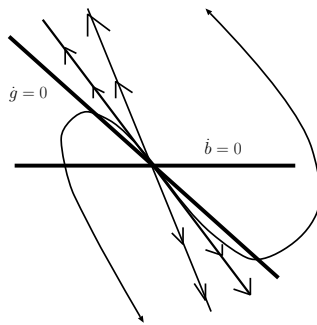


図4 均衡 I(正の異なる根)

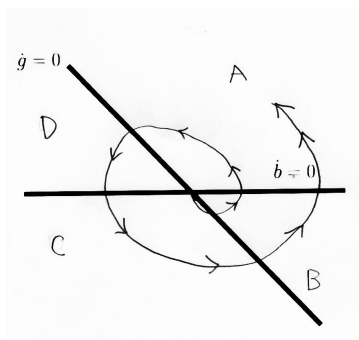


図5 均衡 I(虚根)

固有値が虚数の場合は均衡の近くでは、経路は渦巻き状に均衡から発散していく。位相図から、渦巻きの向きは逆時計まわりになる。図5 参照。

3.2 粗投資の非負制約なしのシステム

以上は二つの均衡点の近傍での振舞いである。われわれの体系は非線形なので、大域的な振舞いは均衡点の線形近似からの推測からかけはなれる可能性は否定できない。それでも、均衡点からはなれた領域でも線形近

似による推測がそれほどうらぎられないとすれば、位相図の助力とともに、大域的な振舞いへの予想をたてることできる。しばらくは、このような種類の的大域的な振舞いの検討を行なう。その予想が正しいかどうかは、パラメータを特定化したもとの、数値シミュレーションによって確認できる。

まず、粗投資の非負制約のとりぞいたもとの、大域的な振舞いを考察しよう。近傍での固有値のパターンによって、モデルの大域的な振舞いは2つのパターンに分類できる。第一のパターンは固有値が実数の正の値をとるときである。均衡 I は単調な不安定性を示す。均衡 I 近傍からの経路は均衡 II の安定接触線にのる経路をのぞいて、 $t \rightarrow \infty$ にしたがって、 g は ∞ か、 $-\infty$ に発散する。均衡 I の近傍から、均衡 II の安定接触線に乗る経路は一意である。したがって、この経路をのぞいたすべての経路は大域的に不安定である。

$b-g$ 平面において、領域 D をとおる経路は均衡 II の安定接触線より上側をとるならば、 ∞ に発散し、それより下側をとるならば、領域 D, C をとおって $-\infty$ に発散する。領域 D をとおる経路はすべて、領域 C をとおって $-\infty$ に発散する。領域 C をとおる経路のうち、いずれかの不安定接触線よりも左側を通る領域はすべて、 $-\infty$ に発散する。いずれの不安定接触線よりも右側にある領域は、領域 B を経て、 ∞ に発散する。領域 B をとおる経路はすべて、領域 B のまま、 ∞ に発散する。(図 6)

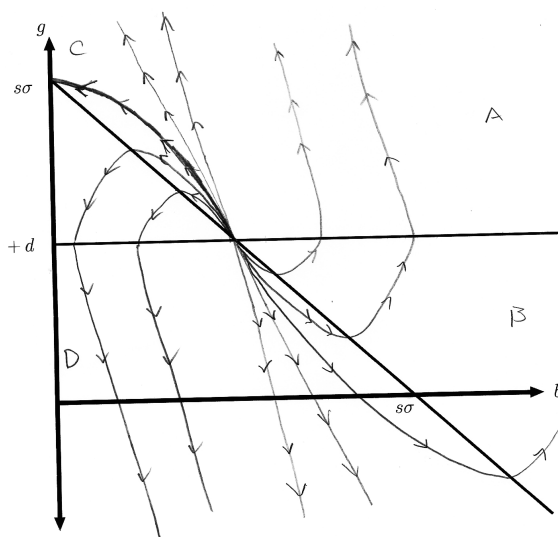


図 6 実根のケース (粗投資の非負制約なし)

第二のパターンは固有値が共役の複素数をとるときである。均衡 I の近傍から出発する経路は渦巻き状に均衡からはなれていく。このため、均衡点の近傍の領域 D, C, B から出発した経路はいずれも、時間がたてば、領域 A にいたる。領域 A の安定接触線より上方にある経路はすべて、 ∞ に発散する。ここで、安定接触線は領域 A と領域 B の境界と交わることがわかる。なぜならば、渦巻き状の運動が生じるならば、領域 B から出発し、領域 A, D, C を経て再び領域 B にいたる経路がなければならない。このことから、領域 B から領域 A の安定接触線の下側に入る経路の存在が確認される。これは、安定接触線は領域 A と領域 B の境界と交わることを意味する。

領域 A の安定接触線より下側を通る経路は領域 D, C, B を通り、再び領域 A にいたる。そのとき、安定接触線の下側にいたる可能性はあるが、回数をへるごとに経路は外側に移動する。したがって、十分時間がたつと、それらの経路は、領域 A の安定接触線より上方の領域にいたり、 ∞ に発散するか、安定接触線にいたる

経路にのる．いずれの領域も，時間が領域 A に至る．したがって，安定接触線にいたる一意の経路をのぞいて，すべての経路は g が ∞ に発散する．

その経路が十分に b - g 平面グラフの縦軸に近づくと，均衡 II の安定接触線に乗る経路は均衡 II に漸近し，をのぞいて， g は ∞ ないし， $-\infty$ に単調に発散しはじめる．どちらに発散するかは，縦軸の近くで，安定接触線より上側にあるか，下側にあるかで決まる．上方への反転の役割をはたしうことを示している．均衡 II での固有値が共役複素数であれば，時間をつうじて，不況が永遠に持続しつづけることはない．そこでは，いったん不況になった経済もかならず，好況に反転し，十分に時間がたてば，景気が過熱しつづける局面にいたる．図 7 参照．

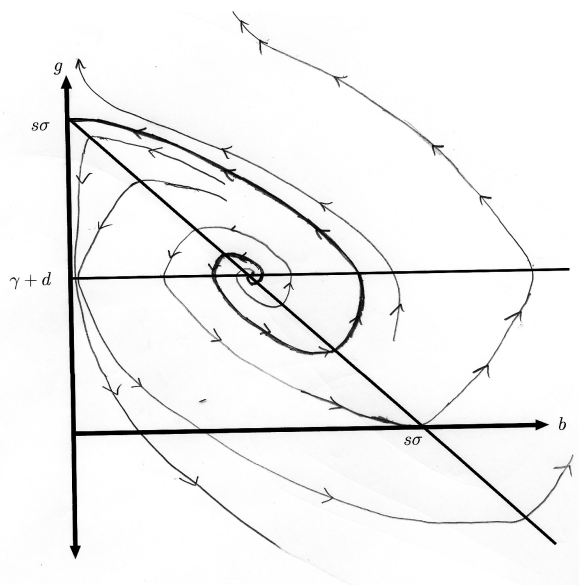


図 7 虚根のケース (粗投資の非負制約なし)

固有値が共役複素数である条件は $\alpha < 4s\sigma(s\sigma - (\gamma + d))$ であった．このことが起るためには，粗投資の稼働率への感応係数 α ，限界貯蓄率 s ，資本ストックの投入係数 σ が相対的に小さいこと，独立的支出の成長率と資本の減耗率の和 $\gamma + d$ が相対的に大きいことが条件となる．このことの経済学的な含意はつぎのとおりである．粗投資が減退している側面では，そのことが稼働率を押し上げる要因がはたらく．他方，資本が減耗するもとで粗投資の減退は独立的支出の資本ストックに対する比率を増加させる．つまり，稼働率の運動に与える独立的支出の影響を大きくする．つまり，粗投資の減退の局面で，粗投資の減退自体が直接的にさらなる粗投資の減退を加速する要因と，独立的支出が粗投資を引き上げる要因の両方がはたらくことになる．うえの条件は，そのいずれが他方より大きくなるかを決定するものと解釈できる．

相対的に粗投資の稼働率への感応係数が大きいとき，粗投資の非負性がないもとでは，独立的支出は上方への反転をおこさないことに注意が必要である．のちに粗投資の非負性があるもとでは，これのいかんにかかわらず，独立的支出が上方への反転をかならず生じさせることを示す．

3.3 粗投資の非負制約の導入

つぎに粗投資の非負性を考慮にいれよう．この制約は，制約のない体系において，粗投資が正から負に転じる経路に影響をあたえる．このことが生じるのは，固有値のパターンにかかわらず，領域 C の一部である．これらの経路は $g = 0$ にいたるが，そこで，領域 C の下方の境界線において， \dot{b} は正であるので，この境界線上において， $g = 0$ のまま， b は増加しつづける．そして，十分に時間がたてば，経路は $g = 0, b = s\sigma$ (図 1 の点 E) にいたる．この点は領域 B と領域 C の境界であり，この点にいたると， \dot{g} は正に転じる．領域 C から $g = 0$ にいたる経路は時間がたてば，点 E を出発する経路に乗る．

均衡 I 近傍の固有値が正の重根あるいは，正の異なる実根である場合は，領域 C のいずれかの不安定接触線より左側を通過する経路は $g = 0$ にいたる．これら経路は時間がたつと，点 E から出発する経路に乗る．この経路は，領域 A にいたり，それ以降は g は ∞ に単調に発散する．領域 D を通過するすべての経路および領域 A のうち，その内部のいずれの不安定接触線よりも左側にある領域は，領域 C のこの部分にいたりつく．したがって，これらの領域はすべて，時間が十分にたてば，点 E を経て，単調に g が ∞ に発散する経路に乗る．他方，粗投資の非負制約のないケースでの分析によって，他のそれらの領域にたどりつかない経路はすべて，時間がたてば， g が ∞ に発散することがわかっている．したがって，いずれの点から出発した経路も時間がたてば， g は ∞ に発散する．

均衡 I 近傍の固有値が共役の複素数である場合，領域 C のうち，その領域内で $g = 0$ いたらず，直接，点 E にいたる経路より下側の領域はすべて $g = 0$ にいたる．それらの経路は $g = 0$ にいたると， $g = 0$ のまま， b は成長をつづけ，領域 C の下側の境界線上を右方向に移動し，点 E にいたり，そこを出発点とする領域 B 上の経路にのる．

領域 C を通過する経路のうち，上記以外の経路は領域 B を点 E を通過する経路の均衡 II に近い側を通過し，領域 A に至る．これらの経路は，領域 A において，均衡 II の安定接触線よりも下の領域にいたれば，ふたたび，領域 D を経て，領域 C にいたる．その場合，経路は渦巻き状に発散しているために，領域 C を通過するごとに，経路は左下側に移動していく．回数を十分に経れば，経路は，点 E に $g = 0$ を経ないで至る経路^{*5}か，ほとんどの場合がこうなるのだが，それより下方にある経路に乗る．点 E を経ないで領域 C から領域 A にいたる経路で，なおかつ，領域 A において，均衡 II の安定接触点より上側にいたる経路は，そこから領域 A にとどまりつづけ， g の単調な ∞ への発散をはじめ．

したがって，領域 C を通過する経路は，時間が十分にたてば，点 E を出発点とする経路にのるか，領域 A の均衡 II の安定接触線の上側の領域で単調な g の発散にいたるかいずれかになることがわかった．図

次に固有根が虚根のケースを考察する．このケースの振舞いは，点 E から出発する経路と領域 A における均衡 II の安定接触線の位置関係で二つに分類できる．すでに，粗投資の非負制約のない分析で，均衡 II の安定接触線が，領域 B と領域 A の境界線と交わることをしめた．点 E から出発する経路もかならず，この境界線と交わる．したがって，体系は点 E からの経路が (α) 均衡 II の安定接触線の下側にくるケース，(β) 均衡 II の安定接触線に乗るケース，(γ) 均衡 II の安定接触線の上側にくるケースの三つに分類できる．

(α) のケースでは，点 E から出発する経路は，領域 B, D, C を経て， $g = 0$ にいたる．経路は，いったん $g = 0$ いたれば，ふたたび点 E にたどりつく．つまり，均衡 E から出発する経路は，そこから永遠に同じ循環をくりかえす．

*5 領域 C と領域 B の境界において，この経路に正確に乗るの出発点となる点は測度ゼロであり，これが起る確率はゼロと見做してよい．

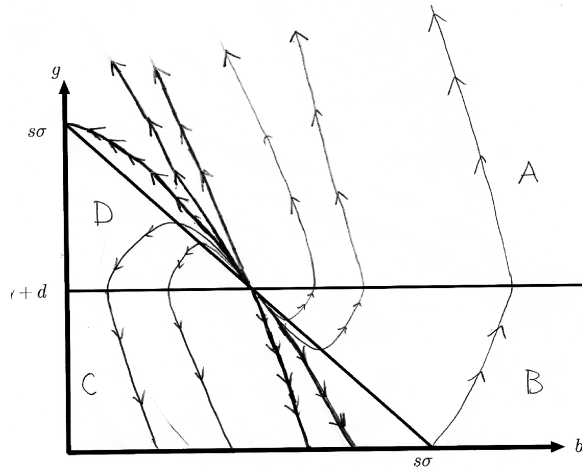


図8 実根のケース

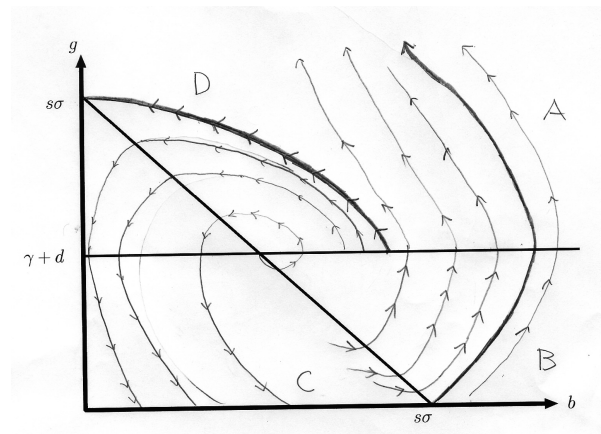


図9 虚根 (サイクルなし)

領域 B, 領域 C を通るすべての経路は十分時間がたてば, かならず $g = 0$ にいたり, 点 E を通るこのサイクルにたどりつく.

この経路にたどりつかない領域は, 領域 A, B において, 均衡 II の安定接触線よりも, 右側にある領域である. その領域にある点は領域 A の安定接触線より上側にいたり, 単調に g の発散にいたる. 図 9 参照.

(β) のケースでは, 点 E から出発する経路は, 均衡 II における安定接触線にいたる. したがって, 領域 B, C を通るすべての経路は十分時間がたてば, 点 E から出発し均衡 II に漸近していく経路にのる. ただし, この経路は有限時間では均衡 II にたどりつかない. ただし, このケースは, モデルのパラメータの空間上で測度ゼロであり, 実際には起らないと見做してよい.

(γ) のケースにおいて, 点 E から出発する経路は, 領域 A における均衡 II の安定接触線より上側の領域にいたり, そこから単調な g の発散が生じる. すべての経路は直接, この領域にいたるか, 点 E を経てこの領域にいたるので, 十分時間がたてば, かならず, g は単調に発散をはじめ. 図 10 参照.

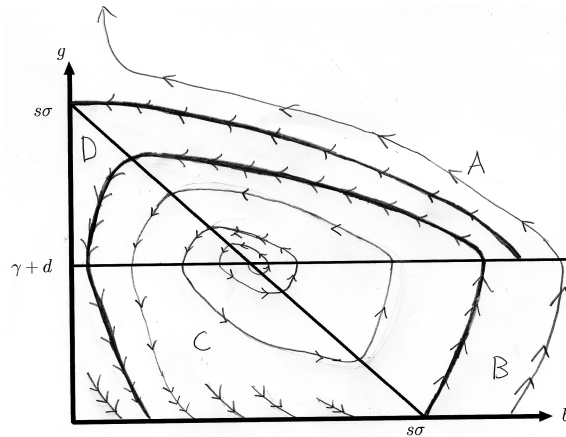


図 10 回廊安定的なサイクルの発生

(α) のケースはレイヨンフートのいう回廊安定性の一つのパターンといえる．レイヨンフートはシステムが単調に安定的な経済と単調に不安定な経済のモデルのほかに，均衡の近くで安定性をしめし，その領域の外側で不安定性を示す回廊安定的な経済の可能性を指摘した．われわれのモデルでは，十分時間がたてば，点 E にいたる領域が回廊安定における安定的な領域とみなせる．

ただし，レイヨンフートは回廊の安定性の議論は安定性領域から出発する経路は均衡点にいきつくことを想定しているが，われわれのモデルでは，安定的は閉軌道にいきつく．いままで回廊安定性をしめすモデルの多く*6は回廊安定性は，不安定な閉軌道によって，もたらされている．われわれのモデルは一定の領域内における安定的な閉軌道によって，それがもたらされている．このような形での回廊安定性が発生することはこの分析の重要な貢献の一つである．

なお，いずれのパターンにおいても，不景気が好景気に転換する領域が存在する．いずれのパターンにおいても，領域 C から出発する経路は，領域 B を経て，領域 B にいたり．領域 B から出発する経路は領域 A にいたる．つまり， $\gamma + d$ が正であり，投資の非負制約があれば，経済は不況にとどまり続けることはなく，不況を反転するメカニズムが働くことが確認された．

4 パラメータの変化と回廊安定性

われわれは， $s\gamma = 1$ とおいたもとで， α と $\gamma + d$ を動かし，サイクルの発生する領域を確かめた．サイクルが発生するパラメータに関する条件は解析的にもとめることが困難である．

α を 0.125 から 1.5 まで， γ を 0.0375 から 0.375 まで，それぞれの範囲で動かし，サイクルの発生を確認した．これらの範囲において，固有値は虚根であり，サイクルが発生する可能性がある．

以下の表で， \checkmark はサイクルの発生したパラメータ， \times はサイクルが発生しなかったパラメータを示す．ここでは，近似的な安定接触線と，点 E から出発する経路を計算し，目視によって，サイクルの発生を確認した．サイクルが発生する場合，均衡 II の安定接触線より，サイクルは均衡 I に対して内側にあり，かつ，点 E を通ることと，サイクルが発生しない場合，点 E から出発する経路は，安定接触線より，均衡 I に対して外側を通り発散することが，いずれの場合にも確認できた．

*6 たとえば，Dotani, inaba, at. el を参照．

	$\gamma + d$					
α	0.03	0.03125	0.0625	0.125	0.25	0.375
0.125						×
0.25						×
0.375					×	×
0.5					×	×
0.625					×	×
0.75					×	×
0.875					×	×
1.0				×	×	×
1.25			×	×	×	×
1.5			×	×	×	×

傾向として、 α と $\gamma + \delta$ がともに十分に小さいとき、サイクルが発生することがわかる。われわれが調べた範囲では、いずれの α についても、十分に $\gamma + d$ が小さければ、サイクルが発生する。このことが、より広い範囲のパラメータの組合せについてもいえるとすれば、政府支出によって、独立的支出をコントロールすることで、単調な不安定性を排除し、安定的な景気循環をつくりだすことが可能であることになる。

これまでの分析では、 $\gamma + \delta$ を正と想定することで、経済システムにおいて、かならず、不況から好況へ反転する領域が存在し、なおかつ、安定的なサイクルが発生しうることが示された。このことから、 $\gamma + \delta$ が大きいことが、経済の安定のために必要だという推論がなされる可能性がある。しかし、このことはあやまりである。なぜならば、うへのシミュレーションの結果は $\gamma + \delta$ が正であれば、できるだけ小さいほうが、経済が安定的な可能性が高まることを示唆しているからである。

5 残された課題

本論文は、独立的支出と資本減耗が、経済システムの安定性において、重要な位置をしめていることを示した。われわれの分析は、独立的支出と資本減耗率の和が正であることは、不況からの脱出を経済システムがもつための必要条件である一方、そのもとでは、その値は小さいほど、経済がサイクルを発生させる可能性が高くなることを示した。

独立的支出には政府支出もふくまれ、政府が独立的支出の成長率をコントロールすることが可能である。すくなくとも、中期・短期的には、輸出・消費の減退によって独立的支出と減耗率の和がマイナスになることがありうる。そのようなときに政府支出によって、独立的支出と減耗率の和をプラスにすることによって、安定的な景気循環システムをつくりだすことが可能になる。

その一方で、すでに安定的なサイクルが実現されているもとでの政府支出の一定以上の成長率の増加はそのサイクルを破壊する可能性がある。

以上は安定的なサイクルの発生の面からの議論であった。のこされている課題として、サイクルの変動の幅の問題がある。通常、景気循環は変動が小さいほうが、のぞましいと考えられる。われわれのモデルにおいてパラメータはサイクルの安定・不安定のみではなく、サイクルの振幅にも影響をあたえる。したがって、安定的なサイクルが発生している状況でも、その振幅によって、どのようなパラメータが経済の安定の観点からのぞましいかの議論が可能である。今回はこの方向での議論ができなかった。これはのこされた課題である。

われわれの分析は、粗投資の非負制約によってリミットサイクルが発生しうることを示した．このような状態変数についての制約は粗投資以外についてもありうる．例えば、雇用率、稼働率などは上限がありうる．われわれのモデルと類似のサイクルは他の状態変数についての制約があるモデルでも発生するかもしれない．

また、われわれのモデルは天井の存在なしに、安定的な景気循環が存在することを示した．このことは、本論文の重要な新規性の一つである．その一方で、われわれの想定を天井があるモデルにくみこんだ場合にどのようなことが起きるかも興味深い問題である．

最後に、われわれのモデルが現実の景気循環に対して、どれだけの説明力をもっているかは、現実経済におけるパラメータの値をあてはめ、現実の経済の景気循環の動きと比較することで議論できる．この点に関しては、本論文はまったく議論をすることができなかった．この点は機会をあらためて議論したい．

付録 A 均衡における固有値と固有ベクトルの計算

ここでは、本文中で結果だけ示した均衡における固有値と固有ベクトルの計算を示す．

A.1 均衡 I の固有値と固有ベクトル

均衡点 I 近傍での線形近似を再掲する．

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{s\sigma} & \frac{\alpha}{s\sigma} \\ (\gamma + d) - s\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - g^* \\ b - b^* \end{pmatrix}$$

このシステムの固有値方程式は

$$\lambda^2 - \frac{\alpha}{s\sigma}\lambda + \frac{\alpha}{s\sigma}\{s\sigma - (\gamma + d)\} = 0.$$

したがって、固有値は、

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha}{s\sigma} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{s\sigma}\right)^2 - \frac{4\alpha}{s\sigma}(s\sigma - (\gamma + d))} \right\}.$$

これより、解の実部は正であることが確認できた．また、この解は、

$$\begin{cases} \alpha > 4s\sigma(s\sigma - (\gamma + d)) & \implies & \text{異なる正の実根} \\ \alpha = 4s\sigma(s\sigma - (\gamma + d)) & & \text{正の重根} \\ \alpha < 4s\sigma(s\sigma - (\gamma + d)) & & \text{実部が正の虚根} \end{cases}$$

となる．

次に固有値が実数である場合の固有ベクトルをもとめる．まず、固有値が正の重根である場合は、 $\lambda = \frac{\alpha}{2s\sigma}$ かつ、 $\frac{\alpha}{s\sigma} = 4\{s\sigma - (\gamma + d)\}$ が成り立つ．これより、固有ベクトルを (x_g, x_b) とおくと、以下を満す．

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2s\sigma} & -\frac{\alpha}{s\sigma} \\ \frac{\alpha}{4s\sigma} & \frac{\alpha}{2s\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより、固有ベクトルは、 $x_g/x_b = -2$ を満すことがわかる．

固有値が異なる正の実根である場合は、固有ベクトルは以下を満す．ここで、 $D = \left(\frac{\alpha}{s\sigma}\right)^2 - \frac{4\alpha}{s\sigma}(s\sigma - (\gamma + d))$ である．固有ベクトルは以下を満す．

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2s\sigma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D} & -\frac{\alpha}{s\sigma} \\ (\gamma + d) - s\sigma & \frac{\alpha}{2s\sigma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

したがって、 $x_b/x_g = -1/2 \mp (1/2)(s\sigma/\alpha)\sqrt{D}$ ．ゆえに、異なる固有ベクトルの傾きが、 $b-g$ 平面で -2 をまたぐ．

A.2 均衡 II の固有値と固有ベクトル

均衡 II の均衡点における線形近似を再掲する .

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{s\sigma} & \frac{\alpha}{s\sigma} \\ 0 & \gamma + d - s\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g - g^{**} \\ b - b^{**} \end{pmatrix} .$$

固有方程式は ,

$$\left(\lambda - \frac{\alpha}{s\sigma} \right) (\lambda + s\sigma - (\gamma + d)) = 0 .$$

したがって , 固有値は $\alpha/(s\sigma) > 0$ と $(\gamma + d) - s\sigma < 0$ である .

固有値 $\alpha/(s\sigma)$ に対応する固有ベクトルは , 以下を満す .

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{s\sigma} \\ 0 & \frac{\alpha}{s\sigma} + s\sigma - (\gamma + d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

ゆえに , 固有ベクトルは $b-g$ 平面で , 縦軸の方向である .

固有値 $(\gamma + d) - s\sigma$ に対応する固有ベクトルは以下を満す .

$$\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{s\sigma} - s\sigma + (\gamma + d) & -\frac{\alpha}{s\sigma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

したがって , この固有ベクトルは

$$\frac{x_g}{x_b} = -\frac{1}{1 + \frac{s\sigma}{\alpha}(s\sigma - (\gamma + d))}$$

を満す . $s\sigma - (\gamma + d) > 0$ より , この値は -1 よりも大きくなる . したがって , このベクトルは , 均衡 II を傾き -1 で横切る $\dot{b} = 0$ となる直線に対して , 右上方向に位置することがわかる .

付録 B シミュレーションの手続きについて

B.1 近似的な安定接触線の近似計算

厳密な安定接触線を求めることは困難である . しかし , 均衡 II は鞍点であるために , 均衡の十分近くを通り , 不安定接触線に漸近する経路は , 均衡 II に漸近する局面で , 安定接触線に近い経路をとる . このことを考慮にいれ , われわれは時間を逆方向にとった微分方程式を組みたて , 均衡 II の不安定接触線終点である , $g = 0, b = 0$ の第一象限の近傍から出発する経路をプロットした . これによって , 近似的に安定接触線をもとめることができる .

B.2 点 E から出発する経路

$g = 0$ で b がわずかに $s\sigma$ を下回る点から出発する経路によって求めた .

B.3 計算機環境

シミュレーションは debian linux etch 上で R version 2.4.0(Ihaka and Gentlement(1996)) および R 上の deSolve パッケージ version 1.2-2 を用いた . deSolve パッケージは , 微分方程式のシミュレーションで広く用いられている ODEPACK ルーチン (Hindmarsh(1983) , Radhakrishnan and Hindmarsh(1993)) を用いている .

参考文献

- [1] Dohtani, A, T. Inaba, H. Osaka (2007) ‘Corridar Stability of the Neoclassical Steady State.’ in T. Asada, T. Ishikawa ed. *Time and Space in Economics*, Springer.
- [2] Hindmarsh , A. C.(1983) ‘ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers.’ in R. S. Stepleman et al. ed. *Scientific Computing*, North-Holland. もしくは , <https://computation.llnl.gov/casc/nsde/pubs/u88007.pdf>
- [3] Ihaka, R., and R. Gentleman (1996) ‘R: a Language for Data Analysis and Graphics.’ *Journal of Computational and Graphical Statistics*.
- [4] Leijonhufvud , A.(1973) ‘Effective Demand Failures.’, *The Scandinavian Journal of Economics*.
- [5] Radhakrishnan, K and A. C. Hindmarsh(1993) ‘Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations.’ *LLNL report*. もしくは , <https://computation.llnl.gov/casc/nsde/pubs/u113855.pdf>
- [6] 置塩信雄 (1976) 『蓄積論 (第二版)』 . 筑摩書房 .
- [7] 置塩信雄編 (1988) 『景気循環—その理論と数値解析』 . 青木書店 .
- [8] ポントリャーギン, レフ . C(1968) 『常微分方程式』 . 千葉克裕訳 , 共立出版 . (ロシア語からの翻訳 , 原題 *Obyknovennye Differentsial'nye Uravneniya*. 1962, Nauka, Moskow.)