越中の和算家　石黒信由 6

狐塚 佳子

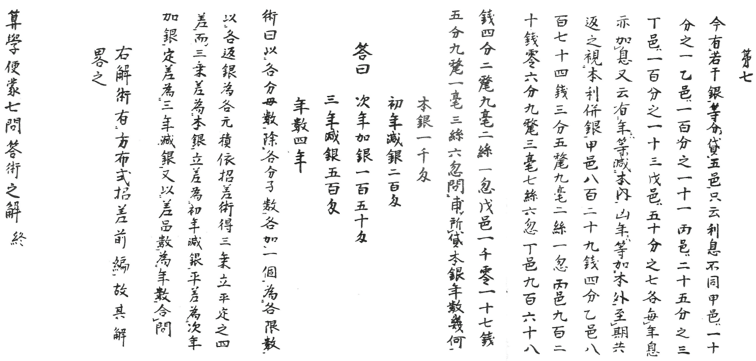
1. はじめに

江戸時代末期の和算家であり測量家であった石黒信由の著書を現代数学に直しています。石黒信由の「算学鉤致」(1819) は遺題承継第 4 系に属する遺題のほとんどに答えているのですが、今回はそのうち中尾斉政著「算学便蒙」(1738) に答えたものを取り上げます。

2. 「算学便蒙」遺題　第七

中尾斉政著「算学便蒙」は東北大学　和算資料データベースで公開されています。

https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc


第七
今有若干銀等分貸五邑只云利息不同甲邑一十
分之一乙邑一百分之一十一丙邑二十五分之三
丁邑一百分之一十三戊邑五十分之七各毎年息
亦加息又云有年等減本内凶年等加本外至期共
返之視本利併銀甲邑八百二十九銭四分乙邑八
百七十四銭三分五釐九毫二絲一忽丙邑九百二
十銭零六分九釐三毫七絲六忽丁邑九百六十八
銭四分二釐九毫二絲一忽戊邑一千零一十七銭
五分九釐一毫三絲六忽問甫所貸本銀年數幾何
答曰
本銀一千匁
初年減銀二百匁
次年加銀一百五十匁
三年減銀五百匁
年數四年
術曰以各分母數除各分子數各加一個為各限數
以各返銀為各元積依招差術得三乗立平定之四
差而三乗差為本銀立差為初年減銀平差為次年
加銀定差為三年減銀又以差品數為年數合問
右解術有方布式招差前編故其解
略之
算學便蒙七問答術之解　終

	利子	返済額 (円[a])
A	$\frac{1}{10}$	82,940,000
B	$\frac{11}{100}$	87,435,921
C	$\frac{3}{25}$	92,069,376
D	$\frac{13}{100}$	96,842,921
E	$\frac{7}{50}$	101,759,136

[a]原文では匁(もんめ)（江戸時代の銀の通貨単位）を用いている。

算学鉤致 (1819 石黒信由)
この問題を現代風に書くとこうなります。

> 同額の資金を 5 つの農業法人 (A, B, C, D, E) に貸す。
> 豊作の年にはそれぞれから同じ金額を徴収し、
> 不作の年にはそれぞれに同じ金額をさらに提供する。
> 利子と返済額は右の表の通りであった。
> 初めに貸した金額と年数を答えよ。

3. 答え

元の金額を a、年数を k とおきます。 利子の分母を 100 に統一とすると、それぞれの利子は $A: \frac{10}{100}, B: \frac{11}{100}, C: \frac{12}{100}, D: \frac{13}{100}, E: \frac{14}{100}$ であり、$A \to B \to C \to D \to E$ と $\frac{1}{100}$ ずつ増えていることがわかります。

利子に 1 を足した数を p、 元の金額 $a = a_0$、1 年目に加える金額を a_1、2 年目に加える金額を a_2、$\cdots$、k 年目に加える金額を a_k とおくと
返済額$= a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \cdots + a_{k-1} p^2 + a_k p$ とあらわすことができます。

●$k = 1$ のとき

翌年返済した (つまり $k = 1$) するとき、A,B,C の利子に 1 を加えたものをそれぞれ p_1, p_2, p_3 とおくと、以下の式が成り立ちます。

$$A : a_0 p_1 + a_1 = 1.10 a_0 + a_1 = 82,940,000 \tag{1}$$

$$B : a_0 p_2 + a_1 = 1.11 a_0 + a_1 = 87,435,921 \tag{2}$$

$$C : a_0 p_3 + a_1 = 1.12 a_0 + a_1 = \underline{92,069,376} \tag{3}$$

$$\begin{array}{lrr} (2)-(1): & 0.01a_0 = & 4,495,921 \\ \text{よって} & a_0 = & 4,449,592,100 \\ a_0\text{の値を}(1)\text{に代入すると} & a_1 = & -411,611,310 \end{array}$$

a_0, a_1 の値を (3) の左辺に代入すると$\underline{91,931,842}$ となり (3) の右辺の値と異なり矛盾します。よって 1 年目の返済ではありません。

●$k = 2$ のとき

2 年で返済した (つまり $k = 2$) するとき、A,B,C,D の利子に 1 を加えたものをそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4 とおくと、以下の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} A: a_0{p_1}^2 + a_1p_1 + a_2 &= 1.10^2a_0 + 1.10a_1 + a_2 = 82,940,000 \quad (4) \\ B: a_0{p_2}^2 + a_1p_2 + a_2 &= 1.11^2a_0 + 1.11a_1 + a_2 = 87,435,921 \quad (5) \\ C: a_0{p_3}^2 + a_1p_3 + a_2 &= 1.12^2a_0 + 1.12a_1 + a_2 = 92,069,376 \quad (6) \\ D: a_0{p_4}^2 + a_1p_4 + a_2 &= 1.13^2a_0 + 1.13a_1 + a_2 = \underline{96,842,921} \quad (7) \\ (5)-(4): \quad 0.0221a_0 + 0.01a_1 &= 4,495,921 \quad (8) \\ (6)-(5): \quad 0.0223a_0 + 0.01a_1 &= 4,633,455 \quad (9) \\ (9)-(8): \quad 0.0002a_0 &= 137,534 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrr} \text{よって} & a_0 = & 687,670,000 \\ a_0\text{の値を}(8)\text{に代入すると} & a_1 = & -1,070,158,600 \\ a_0, a_1\text{の値を}(4)\text{に代入すると} & a_2 = & 428,033,760 \end{array}$$

a_0, a_1, a_2 を (7) の左辺に代入すると $\underline{96,840,365}$ となり (7) の右辺の値と異なり、矛盾します。よって 2 年目の返済ではありません。

●$k = 3$ のとき

3 年で返済した (つまり $k = 3$) するとき、A,B,C,D,E の利子に 1 を加えたものをそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 とおくと、以下の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} A: a_0{p_1}^3 + a_1{p_1}^2 + a_2p_1 + a_3 &= 1.10^3a_0 + 1.10^2a_1 + 1.10a_2 + a_3 = 82,940,000 \quad (10) \\ B: a_0{p_2}^3 + a_1{p_2}^2 + a_2p_2 + a_3 &= 1.11^3a_0 + 1.11^2a_1 + 1.11a_2 + a_3 = 87,435,921 \quad (11) \\ C: a_0{p_3}^3 + a_1{p_3}^2 + a_2p_3 + a_3 &= 1.12^3a_0 + 1.12^2a_1 + 1.12a_2 + a_3 = 92,069,376 \quad (12) \\ D: a_0{p_4}^3 + a_1{p_4}^2 + a_2p_4 + a_3 &= 1.13^3a_0 + 1.13^2a_1 + 1.13a_2 + a_3 = 96,842,921 \quad (13) \\ E: a_0{p_5}^3 + a_1{p_5}^2 + a_2p_5 + a_3 &= 1.14^3a_0 + 1.14^2a_1 + 1.14a_2 + a_3 = \underline{101,759,136} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11)-(10) &: 0.036631a_0 + 0.0221a_1 + 0.01a_2 = 4,495,921 \quad (15) \\ (12)-(11) &: 0.037297a_0 + 0.0223a_1 + 0.01a_2 = 4,633,455 \quad (16) \\ (13)-(12) &: 0.037969a_0 + 0.0225a_1 + 0.01a_2 = 4,773,545 \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (16)-(15) &: 0.000666a_0 + 0.0002a_1 = 137,534 \quad (18) \\ (17)-(16) &: 0.000672a_0 + 0.0002a_1 = 140,090 \quad (19) \\ (19)-(18) &: 0.000006a_0 \qquad = 2,556 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{よって} & a_0 & = & 426,000,000 \\ a_0\text{の値を(18)に代入すると} & a_1 & = & -730,910,000.327285 \\ a_0,a_1\text{の値を(15)に代入すると} & a_2 & = & 504,422,599.640633 \\ a_0,a_1,a_2\text{の値を(10)に代入すると} & a_3 & = & -154,529,759.339261 \end{array}$$

a_0, a_1, a_2, a_3 を (14) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & 1.14^3 a_0 + 1.14^2 a_1 + 1.14 a_2 + a_3 \\ = \ & 631,137,744.145349 - 949,890,636 + 575,041,763.590322 - 154,529,759.339261 \\ = \ & \underline{101,759,112.396409} \end{aligned}$$

となり (14) の右辺の値と異なり、矛盾します。よって3年目の返済ではありません。

●$k = 4$ のとき

4年で返済した (つまり $k = 4$) するとき、A,B,C,D,E の利子に 1 を加えたものをそれぞれ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 とおくと、以下の式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} A : \ & a_0 {p_1}^4 + a_1 {p_1}^3 + a_2 {p_1}^2 + a_3 p_1 + a_4 \\ & = 1.10^4 a_0 + 1.10^3 a_1 + 1.10^2 a_2 + 1.10 a_3 + a_4 = 82,940,000 \qquad (20) \\ B : \ & a_0 {p_2}^4 + a_1 {p_2}^3 + a_2 {p_2}^2 + a_3 p_2 + a_4 \\ & = 1.11^4 a_0 + 1.11^3 a_1 + 1.11^2 a_2 + 1.11 a_3 + a_4 = 87,435,921 \qquad (21) \\ C : \ & a_0 {p_3}^4 + a_1 {p_3}^3 + a_2 {p_3}^2 + a_3 p_3 + a_4 \\ & = 1.12^4 a_0 + 1.12^3 a_1 + 1.12^2 a_2 + 1.12 a_3 + a_4 = 92,069,376 \qquad (22) \\ D : \ & a_0 {p_4}^4 + a_1 {p_4}^3 + a_2 {p_4}^2 + a_3 p_4 + a_4 \\ & = 1.13^4 a_0 + 1.13^3 a_1 + 1.13^2 a_2 + 1.13 a_3 + a_4 = 96,842,921 \qquad (23) \\ E : \ & a_0 {p_5}^4 + a_1 {p_5}^3 + a_2 {p_5}^2 + a_3 p_5 + a_4 \\ & = 1.14^4 a_0 + 1.14^3 a_1 + 1.14^2 a_2 + 1.14 a_3 + a_4 = \underline{101,759,136} \qquad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcll} (21)-(20) & : & 0.05397041 a_0 + 0.036631 a_1 + 0.0221 a_2 + 0.01 a_3 = 4,495,921 & (25) \\ (22)-(21) & : & 0.05544895 a_0 + 0.037297 a_1 + 0.0223 a_2 + 0.01 a_3 = 4,633,455 & (26) \\ (23)-(22) & : & 0.05695425 a_0 + 0.037969 a_1 + 0.0225 a_2 + 0.01 a_3 = 4,773,545 & (27) \\ (24)-(23) & : & 0.05848655 a_0 + 0.038647 a_1 + 0.0227 a_2 + 0.01 a_3 = 4,916,215 & (28) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} (26)-(25) & : & 0.00147854 a_0 + 0.000666 a_1 + 0.0002 a_2 = 137,534 & (29) \\ (27)-(26) & : & 0.00150530 a_0 + 0.000672 a_1 + 0.0002 a_2 = 140,090 & (30) \\ (28)-(27) & : & 0.00153230 a_0 + 0.000678 a_1 + 0.0002 a_2 = 142,670 & (31) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} (30)-(29) & : & 0.00002676 a_0 + 0.000006 a_1 = 2,556 & (32) \\ (31)-(30) & : & 0.000027 \quad a_0 + 0.000006 a_1 = 2,580 & (33) \\ (33)-(32) & : & 0.00000024 a_0 \qquad = 24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcr} \text{よって} & a_0 & = & 100,000,000 \\ a_0\text{の値を(32)に代入すると} & 2676 + 0.000006 a_1 & = & 2556 \\ & a_1 & = & -20,000,000 \end{array}$$

a_0, a_1の値を (29) に代入すると $\quad 147,854 - 13,320 + 0.0002a_2 = 137,534$

$$a_2 = 15,000,000$$

a_0, a_1, a_2を (25) に代入すると $\quad 5,397,041 - 732,620 + 331,500 + 0.01a_3 = 4,495,921$

$$a_3 = -50,000,000$$

a_0, a_1, a_2, a_3を (20) に代入すると

$$146,410,000 - 26,620,000 + 18,150,000 - 55,000,000 + a_4 = 82,940,000$$

$$a_4 = 0$$

よって4年目に返済したと考えられます。(24) の左辺に代入して検算してみましょう。

$$\begin{aligned} & a_0{p_5}^4 + a_1{p_5}^3 + a_2{p_5}^2 + a_3p_5 + a_4 \\ = \ & 168,896,016 - 29,630,880 + 19,494,000 - 57,000,000 \\ = \ & \underline{101,759,136} \end{aligned}$$

右辺に一致するので正しいことがわかりました。

答え　初めに貸した金額は100,000,000円、年数は4年
（1年目20,000,000円徴収、2年目15,000,000円加算、3年目50,000,000円徴収）

4. まとめ

原書にはごく簡単に解法が綴られていますが、私は1年から順番に計算していって、矛盾を導くという解法で解いてみました。今回もコンピュータの力を借りました。

原書では「銀を等分にして5村に貸す。利息は同じでなく、甲(こう)村は10分の1、乙(おつ)村は100分の11、丙(へい)村は25分の3、丁(てい)村は100分の13、戊(ぼ)村は50分の7である。†毎年利息が掛けられ、また豊年には同じだけ減じ、凶年には同じだけ加える。期日に返された銀は甲村829銭4分(ぶ)、乙村874銭3分5厘(りん)9毛(もう)2糸(し)1忽(こつ)、丙村920銭6分9厘3毛7糸6忽、丁村968銭4分2厘9毛2糸1忽、戊村1017銭5分9厘1毛3糸6忽。はじめに貸した銀、年数はいくらかを問う。答えて曰く、本銀1000匁(もんめ)、初年減銀200匁、次年加銀150匁、3年減銀500匁、年数4年」とあります。‡

5. 参考文献

[1] 石黒信由著・吉田柳二訳注, 算學鉤致解術 (復刻版＋翻訳版), 桂書房, 2000.

[2] ウィキペディア, 干支 (https://ja.wikipedia.org/wiki/干支), 2021/2/18 アクセス

[3] ウィキペディア, 尺貫法 (https://ja.wikipedia.org/wiki/尺貫法), 2021/2/18 アクセス

†十干(じっかん)：甲・乙・丙・丁・戊・己(き)・庚(こう)・辛(しん)・壬(じん)・癸(き) の10の要素からなる集合。
‡漢数字としての小数を表す文字:分:0.1(10^{-1}), 厘:0.01(10^{-2}), 毛:0.001(10^{-3}), 糸:0.0001(10^{-4}), 忽 0.00001(10^{-5})