短期と長期の積立に関する一考察

白　石　俊　輔

富 山 大 学 紀 要. 富 大 経 済 論 集　　第66巻第1･2･3合併号（2020年12月）

富山大学経済学部

短期と長期の積立に関する一考察

白　石　俊　輔

キーワード：積立，複利，エクセル，ゴールシーク，等比数列の和，金融リテラシー

概要

金融広報中央委員会による「金融に関する消費者アンケート調査」において，単利と複利の理解度を調べる設問があるが，金融リテラシーとして十分な理解度が得られていないものとされている。これは「積立額を倍にすれば半分の期間で同額を貯蓄することができるか？」という問であるが，複利運用のことを知っていれば「できない」と答えるべきである。ただし，「絶対に無理」な話ではないことを，高校数学でおなじみの等比数列の和の公式を使って示してみたい。

1　はじめに

金融広報中央委員会による「金融に関する消費者アンケート調査」では，過去 3 回にわたり全国の 20 歳以上の男女に対して，金融リテラシーについてのアンケートを行っている [1]。その中で，ここでは第 2 回（平成 15 年）および第 3 回（平成 20 年）に調査された「貯蓄の積み立てに関する理解度」の項目に注目しよう。

同じ年のAさんとBさんがいます。Aさんは25歳のとき，銀行に毎年20万円ずつ預入し始めましたが，Bさんはしていません。50歳になったとき，Bさんは退職後の生活に備えてお金が必要だと気付き，銀行に毎年40万円ずつ預入し始めましたが，Aさんの預入は相変わらず毎年20万円ずつのままです。さて，2人が75歳になったとき，どちらが多くのお金（預金残高）をもっているでしょうか。

第2回調査の集計結果は以下の通りである。

第2回調査選択肢	回答比率
1.　2人とも同額を預入したので，同額を保有している。	8.7%
2.　Aさん。長期にわたって貯蓄して運用されているから。	71.3%
3.　Bさん。1年間の貯蓄額がAさんより多いから。	2.9%
4.　よくわからない。	16.7%

この結果に対し，[6]では「これくらいなら簡単と思える」はずのこの設問に対し，「正解の2と回答した人の比率が71.3%でしかなく，よくわからないと答えた人が16.7%もいる」こと，さらに「確定拠出型年金」になると格段にリテラシーのレベルが落ちる[1]ことに対し，金融リテラシーに対する懸念が示されている。

「貯蓄の積み立てに関する理解度」は，平たくいうと「倍の金額を積み立てれば，半分の期間で取り戻せるのか？」という問題であり，積立期間に関して以下のように常識的な解釈をすれば，答は「選択肢2」に対応する「NO」となる。

最終年非運用	25才	‥	49才	50才	‥	74才	75才	積立年数
Aさん	20万	‥	20万	20万	‥	20万	−	50年
Bさん	−	‥	−	40万	‥	40万	−	25年

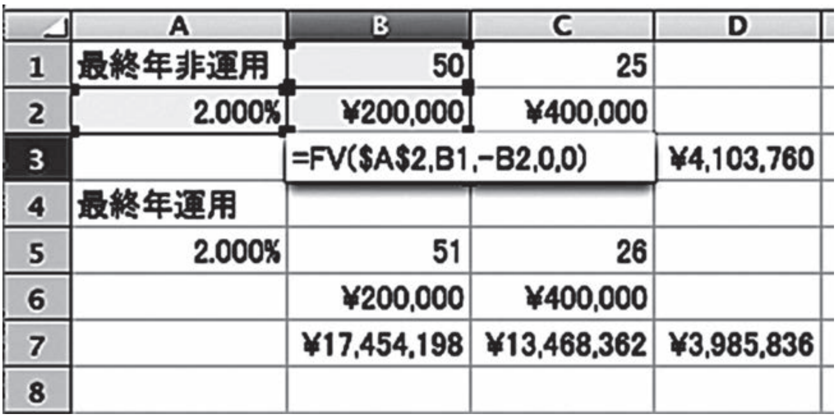
一方，75歳になったときというのを，75歳が終わったとき[2]と考えると，次のような解釈も可能である。

最終年運用	25才	‥	49才	50才	‥	74才	75才	積立年数
Aさん	20万	‥	20万	20万	‥	20万	20万	51年
Bさん	−	‥	−	40万	‥	40万	40万	26年

「BさんがAさんを逆転することがあるのか？」というのが本論文のリサーチ・クエスションである。結論をいえば，後者の解釈をした場合，非常に低金利であればその可能性がある。本論文では2節でエクセルを用いた試算によってその結果を確認する。次に3節でリサーチ・クエスションに対する主要結果を述べる。またまとめとして，4節では，人気映画を題材に [8,9,10]，ややくだけたまとめも行いたい。

2　エクセルとゴールシーク

ここではエクセルのＦＶ関数[3]を用いて，最終年非運用・運用の双方の最終運用結果を仕込んだ。



	A	B	C	D
1	最終年非運用	50	25	
2	2.000%	¥200,000	¥400,000	
3		=FV(A2,B1,-B2,0,0)		¥4,103,760
4	最終年運用			
5	2.000%	51	26	
6		¥200,000	¥400,000	
7		¥17,454,198	¥13,468,362	¥3,985,836
8				

図1　FV関数の入力

	A	B	C	D
1	最終年非運用	50	25	
2	0.000%	¥200,000	¥400,000	
3		¥10,000,083	¥10,000,083	¥0
4	最終年運用			
5	0.000%	51	26	
6		¥200,000	¥400,000	
7		¥10,200,000	¥10,400,000	¥-200,000
8				

図 2　利率 0% の計算結果

図 1 は利率 2% での計算結果を示しているが，最終年非運用・運用にかかわらず，逆転現象は起きていない。一方，図 2 は利率 0% での極端な計算結果を示している。当然ながら，利息からの運用収益がゼロであることに加え，最終年が 1 年プラスされることにより，逆転現象が生じている。

このワークシートをそのまま使ってゴールシーク機能を活用することにより，次の二点の確認ができる。

1．最終年非運用の場合に，逆転現象が起こりうる利率の上限値 =0%（逆転現象は起こりえない）

2．最終年運用の場合に逆転現象が起こりうる利率の上限値 > 0%（逆転現象の生起）

実際の【ゴールシーク】ダイアログの入力例が図 3 である。ワークシートの D3 セルには最終年非運用の場合の長期運用と短期運用の差額を仕込んである。また D7 セルには最終年運用の場合の長期運用と短期運用の差額を仕込んである。各々のセルを数式入力セルとして目標値 0 となるようターゲットとし，利率を変化させることで，逆転がなければ利率 =0% として，逆転があれば利率

の閾値（上限値）> 0% として現れるはずである。実際図 4 では，最終年非運用に相当する A2 セルが 0.000%，最終年運用に相当する A5 セルが 0.154% となっていることで確認できる。

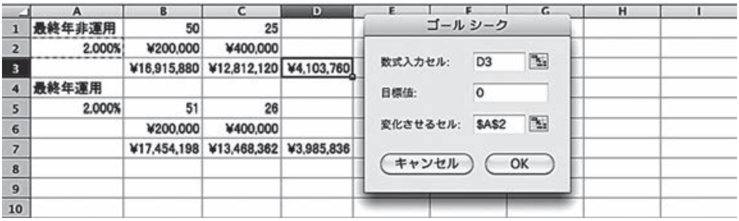


図 3　ゴールシーク入力

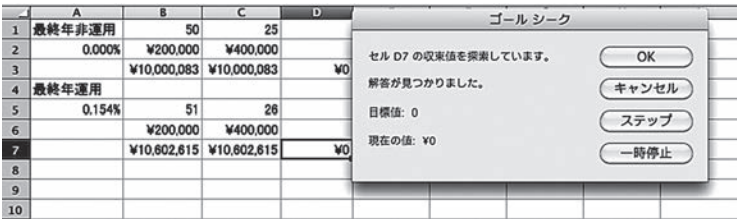


図 4　ゴールシーク計算結果

エクセルで確認した結果をまとめよう。

最終年非運用	1	‥	n	$n+1$	‥	$2n$	$2n+1$	積立年数
A	a	‥	a	a	‥	a	−	$2n$ 年
B	−	‥	−	$2a$	‥	$2a$	−	n 年

最終年運用	1	‥	n	$n+1$	‥	$2n$	$2n+1$	積立年数
A	a	‥	a	a	‥	a	a	$2n+1$ 年
B	−	‥	−	$2a$	‥	$2a$	$2a$	$n+1$ 年

最終年非運用の場合，

$$A = a + (1+r)a + \cdots + (1+r)^{2n-1}a$$
$$(1+r)A = (1+r)a + \cdots + (1+r)^{2n}a$$

だから，

$$A = \frac{a}{r}\left\{(1+r)^{2n} - 1\right\}$$

であり，

$$B = 2a + (1+r)2a + \cdots + (1+r)^{n-1}2a$$
$$(1+r)B = (1+r)2a + \cdots + (1+r)^{n}2a$$

だから，

$$B = \frac{2a}{r}\left\{(1+r)^{n} - 1\right\}$$

となる。したがって，A，B の大小は

$$A \geq B \leftrightarrow (1+r)^{2n} - 1 \geq 2(1+r)^{n} - 2$$
$$\leftrightarrow (1+r)^{2n} + 1 \geq 2(1+r)^{n}$$
$$\leftrightarrow (1+r)^{n} + \frac{1}{(1+r)^{n}} \geq 2.$$

最後の式は，相加相乗平均から直ちに従う。等号成立は，

$$(1+r)^{n} = \frac{1}{(1+r)^{n}} \rightarrow r = 0$$

であることも分かる。

最終年運用の場合，

$$A = a + (1+r)a + \cdots + (1+r)^{2n}a$$
$$(1+r)A = (1+r)a + \cdots + (1+r)^{2n+1}a$$

だから，

$$A = \frac{a}{r}\left\{(1+r)^{2n+1} - 1\right\}$$

であり，

$$B = 2a + (1+r)2a + \cdots + (1+r)^n 2a$$

$$(1+r)B = (1+r)2a + \cdots + (1+r)^{n+1} 2a$$

だから，

$$B = \frac{2a}{r}\left\{(1+r)^{n+1} - 1\right\}$$

となる。したがって，A, Bの大小は

$$A \geq B \leftrightarrow (1+r)^n + \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \geq 2$$

が成立するかどうかを調べればよい。ここで$x > 0$に対し，関数

$$f(x) = x^n + \frac{1}{x^{n+1}}$$

を考える。

$$f'(x) = nx^{n-1} - \frac{n+1}{x^{n+2}}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} + \frac{(n+1)(n+2)}{x^{n+3}} > 0$$

となるので，$f(x)$は狭義凸関数である。したがって，1 階条件から，

$$\bar{x} = \sqrt[2n+1]{\frac{n+1}{n}} > 1$$

で最小値をとる。$x \neq 1$で，$f(1) = 2 > f(\bar{x})$なので，$0 < r < \sqrt[2n+1]{\frac{n+1}{n}} - 1$ に対して，A と B の逆転現象が起きることがわかる。nが大きいと，この値は非常に小さい（ほぼ 0）。

３　主定理

次のような一般的な設定を行う。A の積立年数は B のk倍であり，B の積立金額は A のα倍であるとする。最終年の積立を想定しないものがケース 1，最

終年の積立を想定したものがケース 2 である。

ケース 1	積立年数	積立金額
A	kn年	a円／年
B	n年	αa円／年

ケース 2	積立年数	積立金額
A	kn+1 年	a円／年
B	n+1 年	αa円／年

3.1　最終年の積立を想定しないケース

ケース 1 の A の総積立額（元利合計額）を$S_A(kn,a)$，B の総積立額（元利合計額）を$S_B(n,\alpha a)$とすると，通常の等比数列の和の公式から 1 式 2 式を得る。

$$S_A(kn,a)=\frac{a}{r}\{(1+r)^{kn}-1\} \qquad 1$$

$$S_B(n,\alpha a)=\frac{\alpha a}{r}\{(1+r)^{n}-1\} \qquad 2$$

A と B の積立額の逆転現象を調べるためには，次の不等式を確認すればよい。

$$S_A(kn,a)\geq S_B(n,\alpha a)\leftrightarrow (1+r)^{kn}-1\geq \alpha(1+r)^n-\alpha$$

$$\leftrightarrow (1+\mathrm{r})^{(\mathrm{k}-1)\mathrm{n}}+\frac{\alpha-1}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{n}}}\geq \alpha \qquad 3$$

3 式の左辺に対応して，次の関数を考える。

$$f_{k,\alpha}(x)=x^{(k-1)n}+\frac{\alpha-1}{x^n}$$

利率$r\geq 0$なので，定義域は$x\geq 1$とするのが自然であるが,$x>0$に定義域を広げれば，$f_{k,\alpha}(1)=\alpha$であることから，次の大小関係が導かれる。

$$S_A(kn,a)\geq S_B(n,\alpha a)\leftrightarrow \mathrm{argmin}_{x>0}f_{k,\alpha}(x)\leq 1 \qquad 4$$

$$S_A(kn,a)< S_B(n,\alpha a)\leftrightarrow \mathrm{argmin}_{x>0}f_{k,\alpha}(x)> 1 \qquad 5$$

補題 1　最小化問題

$$\min_{x>0} f_{k,\alpha}(x)$$

の狭義最適解$\bar{x} = \mathrm{argmin}_{x>0} f_{k,\alpha}(x)$は

$$\bar{x} = \sqrt[kn]{\frac{\alpha-1}{k-1}}$$

である。

証明　$f_{k,\alpha}(x)$はふたつの狭義凸関数$x^{(k-1)n}$と$(\alpha-1)/x^n$の和であることから，1 階条件を満たす$\bar{x}$が狭義大域解となる [2]。$f_{k,\alpha}(x)$の微分，

$$f'_{k,\alpha}(x) = (k-1)x^{(k-1)n-1} - \frac{\alpha-1}{x^{n+1}} = \frac{(k-1)n}{x^{n+1}}\left\{x^{kn} - \frac{\alpha-1}{k-1}\right\}$$

より，直ちに従う。

□

定理 1　最終年の積立を行わない場合，長期積立 A と短期積立 B の逆転現象が起きるのは，

$$\alpha > k$$

となるときである。逆に

$$\alpha \le k$$

の場合に逆転現象は決して起きない。

証明　逆転現象が起きるのは 5 式に対応する場合なので，補題 1 から

$$\bar{x} = \sqrt[kn]{\frac{\alpha-1}{k-1}} > 1$$

すなわち，

$$\frac{\alpha-1}{k-1} > 1$$

のときである。

□

3.2　最終年の積立を想定するケース

ケース 2 の A の総積立額（元利合計額）を$S_A(kn+1,a)$, B の総積立額（元利合計額）を$S_B(n+1,\alpha a)$とすると，通常の等比数列の和の公式から 6 式 7 式を得る。

$$S_A(kn+1,a)=\frac{a}{r}\{(1+r)^{kn+1}-1\} \quad 6$$

$$S_B(n+1,\alpha a)=\frac{\alpha a}{r}\{(1+r)^{n+1}-1\} \quad 7$$

ケース 1 の場合と同様に，A と B の積立額の逆転現象を調べるためには，次の不等式を確認すればよい。

$$S_A(kn+1,a)\geq S_B(n+1,\alpha a)\leftrightarrow(1+r)^{kn+1}-1\geq\alpha(1+r)^{n+1}-\alpha$$

$$\boldsymbol{(1+r)^{(k-1)n}+\frac{\alpha-1}{(1+r)^{n+1}}\geq\alpha} \quad 8$$

不等式 8 の左辺に対応して，次の関数を考える

$$g_{k,\alpha}(x)=x^{(k-1)n}+\frac{\alpha-1}{x^{n+1}}$$

$f_{k,\alpha}(x)$と同様に，定義域を$x>0$に広げて考えれば, $g_{k,\alpha}(1)=\alpha$であることから，8 の大小関係について，次のことが分かる。

$$S_A(kn+1,a)\geq S_B(n+1,\alpha a)\leftrightarrow \mathrm{argmin}_{x>0}g_{k,\alpha}(x)\leq 1 \quad 9$$

$$S_A(kn+1,a)<S_B(n+1,\alpha a)\leftrightarrow \mathrm{argmin}_{x>0}g_{k,\alpha}(x)>1 \quad 10$$

補題 2　最小化問題

$$\min_{x>0} g_{k,\alpha}(x)$$

の大域的最適解$\bar{x}=\mathrm{argmin}_{x>0}g_{k,\alpha}(x)$は,

$$\bar{x} = \sqrt[kn+1]{\frac{(\alpha-1)(n+1)}{(k-1)n}}$$

である。

証明　補題１と同様に，$g_{k,\alpha}(x)$はふたつの狭義凸関数$x^{(k-1)n}$と$(\alpha-1)/x^{n+1}$の和であることから，１階条件を満たす$\bar{x}$が狭義大域解となる。$g_{k,\alpha}(x)$の微分

$$g'_{k,\alpha}(x) = (k-1)nx^{(k-1)n-1} - \frac{(\alpha-1)(n+1)}{x^{n+2}}$$

$$= \frac{(k-1)n}{x^{n+2}}\left\{x^{kn+1} - \frac{(\alpha-1)(n+1)}{(k-1)n}\right\}$$

より，直ちに従う。

□

定理２　最終年の積立を行う場合，

$$\alpha \geq k$$

ならば，長期積立Ａと短期積立Ｂの逆転現象が起きる。

証明　$\alpha \geq k$のとき，$\alpha - 1 \geq k - 1$なので，

$$\alpha - 1 \geq k - 1 \rightarrow \bar{x} = \frac{(\alpha-1)(n+1)}{(k-1)n} \geq \frac{n+1}{n} > 1$$

である。これは逆転現象が起きる10式に対応する。

□

註　定理２で$\alpha < k$の場合は，定理１と異なり，ただちに逆転現象の有無を断じることはできない。実際，$\alpha < k$であっても，nが極端に小さい（例えば$n = 1$）場合は，$\bar{x} > 1$となり，逆転現象が生じるが，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-1)(n+1)}{(k-1)n} = \frac{\alpha-1}{k-1} < 1$$

であることから，十分に大きいnに対しての逆転現象は起きないことになる。

４　まとめ

目先の利得にとらわれ，将来を顧みない行動は，行動経済学の分野において，異時点間の選好における先延ばしと後悔のアノマリーとして指摘されている[4,5,6,7]。それは，学問に頼るまでもなく，人気映画においても描かれてきた。[9] では，バイト先の親父に向かって主人公は，「今夜が未来だ」と盾つき貯蓄を先延ばしする様子が，[10] では，積み上げた退職年金を一瞬のうちに消されてしまう理不尽さが描かれている。明日のために，貯金をすることは躊躇われるものの，せっかく貯めたものは，失いたくないものである。

本論文では，先に貯蓄を始めたひとに勝つための条件を示すことにより，「始めるのは今からでも遅くない (Never too late to mend[8])」という，ナッジを発することができたのではないだろうか。

参考文献

[1] 金融広報中央委員会「金融に関する消費者アンケート調査」,（平成13年・平成15年・平成20年）http://www.shiruporuto.jp/finance/chosa/enqu/index.html

[2] J.-P. Hiriart-Urruty and C.Lemaréchal, `Convex Analysis and Minimization Algorithms I', Springer-Verlag（1993）

[3] C.W. Holden, `Spreadsheet Modeling in the Fundamentals of Corporate Finance Third Edition', Prentice Hall（2002）

[4] 池田新介，『自滅する選択』，東洋経済新報社（2012）

[5] シーナ・アイエンガー，『選択の科学』, 文藝春秋（2010）

[6] 大竹文雄，『競争と公平感 市場経済の本当のメリット』，中公新書2045，中央公論新社，(2010)

[7] 筒井義郎，佐々木俊一郎，山根承子，グレッグ・マルデワ『行動経済学入門』東洋経済新報社（2017）

[8] J.Belushi and D.Aykroid, `The Blues Brothers', Universal Pictures（1980）

[9] J.Travolta, `Saturday Night Fever', Paramount Pictures（1977）

[10] B.Willis, `Live Free or Die Hard', Twentieth Century Fox（2007）

提出年月日　2020 年 9 月 7 日

1 第2回調査では「聞いたことはあるが，内容は知らない」と「聞いたことがない」という人の割合は45.2%である。

2 この設定は強引なようだが，一例として多くの国立大学法人の停年は65歳になった年の3月末であることから，このような積立になる可能性のある人は多い。

3 ＦＶ関数の構文は：FV（利率,期間,定期支払額,現在価値,支払期日）となる。学習上の観点からいえば，財務関数にたよらずTime Line Technique[3]により，将来価値が積み上がる様子を実感する方がよいが，Time Line Techniqueはエクセルで使用するセル数が多くなり，図解には適さないため，本論では財務関数を用いた。