

# Vlasov コードによる接触不連続に関する シミュレーション研究

辻根 成

富山大学大学院  
理工学教育部  
数理・ヒューマンシステム科学専攻

## 要旨

接触不連続は磁気流体力学において、異なるプラズマ密度と温度を分ける不連続面（境界層）であり、不連続面の法線方向の速度変化および磁場変化がなく、圧力が一定である。境界層を挟んだ領域 1 と 2 における物理量の関係は磁気流体方程式から導かれるジャンプ条件により記述される。接触不連続は運動論における安定性が長らく議論されている。ここで、接触不連続が維持するとは、その数密度の不連続面が崩れず長時間残り続けることである。本研究は、磁気流体方程式により導出される接触不連続を運動論方程式が用いられる Vlasov コードによってシミュレーションするものである。

第一に、運動論方程式から流体方程式を経由して接触不連続の導出を行う。本研究において、運動論方程式によるシミュレーション手法を用いて、流体方程式の不連続解として知られる接触不連続の研究を行うため、これらの関係性を明らかにした。運動論における接触不連続のシミュレーション研究では、これまで full-Particle-In-Cell (PIC) 法、hybrid-PIC 法と full-Vlasov 法が用いられてきた。運動論シミュレーションの研究において、しばしば PIC 法が用いられるが、粒子に起因するノイズが含まれる。本研究において、接触不連続の構造を高精度に観測するために粒子によるノイズがない Vlasov 法を用いた。特に、静電 hybrid-Vlasov シミュレーションは計算例が少ないため、静電 hybrid-Vlasov シミュレーションに用いる方程式の分散関係より、コードの性能を確かめた。

第二に、衛星観測により得られたデータに基づく初期値を用いて、full-Vlasov シミュレーションを行い、初期の電子とイオンの温度に対して温度依存性を詳細に解析した。その結果、電子時間スケールで一様な全圧を形成するためには、Tsai *et al.* の条件を用いるのではなく、領域 1 と 2 における電子温度をほとんど一様とする必要があることがわかった。つまり、この結果は先行研究の結果を修正するものである。また、衛星観測により得られたデータの温度比を含む、様々に変化させた全ての温度比において、イオン数密度の遷移層は広がるため、不連続面は維持しないということがわかった。すなわち、電子時間スケールにおいて全圧が一様であったとしても不連続面は維持しない。さらに、Tsai *et al.* の条件の導出を再考したところ、運動論的な平衡解を満たすには温度を一様とする必要があることがわかった。ただし、温度が一様であったとしても、初期に静電ポテンシャルの変化を仮定しない場合、イオン数密度は不連続ではないこともわかった。

第三に、接触不連続の安定性を研究するために観測データに基づく初期値を用いた一次元の静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションを行った。静電 hybrid-Vlasov シミュレーションではイオン数密度のシャープな勾配は早い段階で形成され、その後長い期間維持される。しかし、このシャープな勾配は静電 full-Vlasov シミュレーションでは存在しない。一般化 Ohm の法則は静電 hybrid- と full-Vlasov 両方のシミュレーションにおいて、イオン時間スケールで電子圧力勾配によって電場をサポートすることを示している。静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの間で電子圧力の時間発展の違いがあること、そして、その原因は主に電子ヒートフラックスによることが示された。

# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	運動論における接触不連続のシミュレーション研究	2
1.2	THEMIS 衛星による接触不連続の観測	4
1.3	本論文の構成	5
第 2 章	接触不連続の導入	7
2.1	Vlasov 方程式と二流体方程式の導出	7
2.2	磁気流体方程式の導出	9
2.3	磁気流体方程式における不連続	11
2.4	運動論方程式と流体方程式の関係と接触不連続	12
第 3 章	静電 Vlasov シミュレーション法	14
3.1	静電系における Vlasov 方程式	14
3.2	静電 full-Vlasov シミュレーション	15
3.2.1	スプリットティングスキーム	15
3.2.2	保存型無振動スキーム	16
3.2.3	Poisson 方程式の数値計算	19
3.2.4	静電 full-Vlasov シミュレーションの時間更新	20
3.3	静電 hybrid-Vlasov シミュレーション	20
3.3.1	静電系における一般化 Ohm の法則	20
3.3.2	静電 hybrid-Vlasov シミュレーションの時間更新	21
3.3.3	イオン音波の伝播のテストシミュレーション	21
第 4 章	full-Vlasov シミュレーションにおける接触不連続	23
4.1	序論	23
4.2	シミュレーションモデル	25
4.3	シミュレーション結果	26
4.3.1	観測データに基づく初期値を用いたシミュレーション	26
4.3.2	全圧の時間発展	27
4.3.3	全圧が時間とともに崩れる原因は電子温度比	27
4.3.4	イオンの数密度に基づく不連続面の安定性	28
4.4	議論	29
4.5	結論	33
第 5 章	静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける接触不連続の安定性	38
5.1	序論	38
5.2	シミュレーションモデル	39

5.3	シミュレーション結果	41
5.3.1	静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度と電場の空間分布	41
5.3.2	一般化 Ohm の法則の各項の空間分布	41
5.3.3	電子圧力の時間発展の違い	43
5.4	結論	45
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>46</b>
	謝辞	48
	付録	49
付録.1	物理量とベクトル演算と公式	49
付録.2	マクロな量の関係式	49
付録.3	質量保存則	52
付録.4	運動量保存則	52
付録.5	エネルギー保存則	53
付録.6	圧力の発展方程式の導出と断熱変化の式	54
付録.7	磁気流体の質量保存則	56
付録.8	磁気流体の運動量保存則	56
付録.9	Ohm の法則と誘導方程式	58
付録.10	磁気流体のエネルギー保存則	59
付録.11	磁気流体方程式におけるジャンプ条件の導出	61
付録.12	ジャンプ条件による接触不連続の導出	66
付録.13	静電系における一般化 Ohm の法則	67
付録.14	hybrid コードに用いられてきた一般化 Ohm の法則	68
付録.15	静電系における hybrid コードの分散関係	71
	参考文献	74
	出版リスト	76



# 表目次

1.1	full-Vlasov シミュレーションと観測データにおける電子とイオンの温度比の比較 [1, 2]	4
4.1	シミュレーションケース。Run C は観測データに基づく初期条件である [2]。Tsai <i>et al.</i> の条件を満たす場合、✓ を付加する。 . . . . .	26
4.2	$t_1$ と $t_2$ における遷移層の長さ : $L_1(t_1)$ , $L_2(t_2)$ . . . . .	29
6.1	物理量と変数 . . . . .	73

# 目次

1.1	運動論シミュレーションにおける違いの模式図 . . . . .	3
1.2	先行研究 [3] のパラメータ ( $T_e/T_i = 5, T_{e1}/T_{e2} = T_{i1}/T_{i2} = 4, N_1/N_2 = 1/4, m_i/m_e = 25$ ) を用いた静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度の空間分布。黒破線と青線はそれぞれ初期状態とイオンスケール ( $\omega_{pi2}t = 100$ ) を示している。 . . . . .	3
2.1	運動論方程式と流体方程式の関係と接触不連続の模式図 . . . . .	13
3.1	(左) イオン数密度の時間発展、(右) イオン数密度から得られた分散関係。(右) パネルにおいて、丸印と赤色四角印はそれぞれ hybrid コードとイオン音波の分散関係を示している。 . . . . .	22
4.1	温度比の図(これまでのシミュレーションと観測データのパラメータの関係): 三角は hybrid-PIC シミュレーション、ダイヤは full-PIC シミュレーション、丸は full-Vlasov シミュレーションである。また、四角は観測データに基づくパラメータである。破線は、領域 1 または 2 において、電子とイオンの温度比が等しい。この線を境に電子とイオンの温度の大小関係が入れ替わる。Tsai <i>et al.</i> の条件を満たすパラメータは、マークが塗りつぶされている。黒線の上のパラメータは、 $T_{e1}/T_{i1} = T_{e2}/T_{i2}$ の関係を満たしている。灰色のパターンは、本研究におけるシミュレーションのパラメータ範囲を示している。 . . . . .	24
4.2	接触不連続における領域 1 と 2 の電子とイオンの温度比のグラフ: $T_{e1}/T_{i1}$ vs. $T_{e2}/T_{i2}$ 白い部分は式 (4.2) を満たし、黒い部分は満たしていない領域である。線は、領域 1 と 2 の電子の温度比が等しい部分である。各点は、シミュレーションケースである。 27	27
4.3	Run C (観測データに基づく初期値を用いたシミュレーション) における $\omega_{pe1}t = 1000$ と 5000 の電子数密度 $N_e$ 、イオン数密度 $N_i$ 、電子圧力 $P_e$ 、イオン圧力 $P_i$ 、電子温度 $T_e$ 、イオン温度 $T_i$ 、全圧 $P_T$ と電場 $E$ の空間分布。領域 1 の初期の電子の物理量で規格化した。青破線は初期の分布を示している。緑線はそれぞれの時間の分布を示している。 . . . . .	35
4.4	Run A, D, J における全圧 $P_T$ の時間発展: 領域 1 の初期の電子の物理量で規格化した。 36	36
4.5	Run B, C, D, E における (上段) 電子圧力 $P_e$ と (下段) 電子温度 $T_e$ の時間発展: 領域 1 の初期の電子の物理量で規格化した。 . . . . .	36
4.6	電子の温度比における電子の数密度と温度の空間構造の略図: 線は電子の数密度の空間構造を示している。点線は電子の温度の空間構造を示している。 $T_{e1}/T_{e2}$ における、電子の圧力を担う電子の数密度と温度の貢献度を示す。 . . . . .	37

4.7 Run D における  $\omega_{pe1}t = 632$  でのイオン数密度の空間分布: 数値計算 (実線) と近似線 (破線). Run D におけるイオン数密度の遷移層の長さの時間変化: 電場あり (実線) と電場なし (破線). 近似線は、見積もった遷移層の長さ  $L_1$  と、 $N_i = \frac{N_{i2}-N_{i1}}{2} \tanh\left(\frac{2x}{L_1}\right) + \frac{N_{i2}+N_{i1}}{2}$  を用いてプロットした。 . . . . . 37

5.1  $\omega_{pe2}t = 40, 100, 1000$  と  $5000$  の 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度と電場の空間分布。 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの結果は黒線と緑破線によってプロットされている。数密度と電場は  $N_0 (= N_2)$  と  $E_0 (= m_e \omega_{pe2} v_{the2} / q_e)$  によって規格化されている。 . . . . . 42

5.2  $\omega_{pe2}t = 40, 100, 1000$  と  $5000$  の 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける、一般化 Ohm の法則の 2 つの項の空間分布。電子圧力の勾配と電流密度の時間変化は、青線と黒先によってプロットされている。図. 5.1 に示される電場は赤丸によってオーバープロットされている。それぞれの項は  $E_0$  によって規格化されている。 . . . . . 43

5.3  $\omega_{pe2}t = 20, 40, 80, 100$  と  $120$  の 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける、電子の移流項、圧縮項とヒートフラックス項の空間分布。緑線と青破線は電子とイオンに関連した項を示している。 . . . . . 44

## 第1章 序論

Vlasov 方程式と呼ばれる運動論方程式によってプラズマは最も近似度を低くして記述できる。また、プラズマは流体近似を行うことで、そのマクロな振る舞いを磁気流体方程式で記述できる。流体近似によって運動論効果は取り除かれるため、これら2つの方程式の間には違いがある。磁気流体方程式に着目した場合、圧縮性流体と同様に衝撃波や接触不連続などの不連続解の存在が知られている(第2章を参照)。これらの不連続解に含まれる、接触不連続は磁気流体力学において、異なるプラズマ密度と温度を分ける不連続面(境界層)であり、不連続面の法線方向の速度変化および磁場の変化がなく、圧力が一定である[4]。そして、磁気流体シミュレーションにおいてもその存在は示されている[5]。一方で、Hsieh *et al.* の報告まで長らく接触不連続の観測結果は得られていなかった[2]。ここで、接触不連続が維持するとは、その数密度の不連続面が崩れず長時間残り続けることである。

運動論における接触不連続のシミュレーションは、Wu *et al.* によって初めて実施された[6]。Wu *et al.* は、イオンを粒子、電子を流体として取り扱う、hybrid-PICシミュレーションを用いた。このため、イオンの運動論効果は含まれるが、電子の運動論効果はシミュレーションには含まれない。また、電荷中性は常に満たされる。シミュレーションの結果、イオンの時間スケールの数密度のシャープな勾配は維持されることが示された。そして、hybrid-PICシミュレーションにおける、シャープな勾配は電子圧力勾配による電場によってサポートされていることが示されている。このシミュレーション結果は磁場の角度に依存しないことが確認された。

Lapenta と Brackbill は hybrid-PICシミュレーションと full-PICシミュレーションの結果を比較しながら、接触不連続の安定性について議論した[3]。full-PICシミュレーションにおいて、電子とイオンそれぞれの運動論効果はシミュレーションに含まれる。hybrid-PICシミュレーションの結果は Wu *et al.* の結果と一致する。しかし、full-PICシミュレーションでは hybrid-PICシミュレーションと異なり、イオン数密度の不連続面を維持できないことが示された。これらのシミュレーションにおいて、初期の電子とイオンの温度比は領域1と2を挟んで等しかった。

Tsai *et al.* は運動論的なシミュレーションにおいて、接触不連続の条件に加えて、次に示す2つの条件が必要であるということを提案した[1]。電子とイオンの2流体の運動量保存則から、圧力の条件

$$(P_{i1} - P_{i2})(P_{e1} - P_{e2}) < 0 \quad (1.1)$$

および、静電ポテンシャルを考慮した位相空間におけるプラズマ分布関数の構造から、分布関数が広がっている部分を温度が高いとして、温度の条件

$$(T_{i1} - T_{i2})(T_{e1} - T_{e2}) < 0 \quad (1.2)$$

が導出された。本研究において、これらの条件を Tsai *et al.* の条件とする。Tsai *et al.* の条件を考慮しながら、Tsai *et al.* は電子とイオンがそれぞれ運動論効果を含む full-Vlasovシミュレーションを行った。初期の電子とイオンの温度比は、領域1と領域2で異なる。full-Vlasovシミュレーションの結果、Tsai *et al.* の条件が満たされる場合、全圧がほとんど一様であるため電子時間スケール

で安定であるとした。その後、全圧は不連続付近に双極な構造を持ち、それ以外は一様であった。この構造を Tsai *et al.* の不連続とする (参照 Tsai *et al.*, JGR, 2009, 図 3) [1]。これらの full-Vlasov シミュレーションにおける接触不連続において、イオンの時間スケールでの数密度の不連続面が維持するかどうかは未確認である。

Umeda *et al.* は様々な温度比を用いて 静電 full-Vlasov シミュレーションを行った [7]。そして、電荷分離による静電ポテンシャルは十分に小さいため、電子の時間スケールであってもイオン数密度のシャープな勾配は維持しないことを示した。これは、先行研究の full-PIC シミュレーションと一致している [3]。また、full-Vlasov シミュレーションにおいて、静電ポテンシャルと電子圧力の関係性を指摘されている。

Hsieh *et al.* は THEMIS 衛星によるその場観測において、接触不連続の存在が報告された [2]。観測による接触不連続の遷移層の幅は  $\approx 4\rho_i - 12\rho_i$  (ここで  $\rho_i$  はイオンのジャイロ半径である) であることが示された。そして、その幅はイオンのデバイ長の数十倍である。また、観測データの領域 1 と 2 における電子とイオンの温度比は、Tsai *et al.* の条件を満たしている。

問題となる点を以下にまとめる。

1. 衛星観測における接触不連続のパラメータ ( $T_{e1}/T_{i1} = 0.200$ ,  $T_{e2}/T_{i2} = 0.304$  と  $N_1/N_2 = 0.73$ ) [2] は full-PIC と Vlasov シミュレーションにおける初期パラメータ (例えば  $T_{e1}/T_{i1} = 1/3$ ,  $T_{e2}/T_{i2} = 5$ ,  $N_1/N_2 = 1/3$ ) [1] や hybrid-PIC シミュレーションにおける初期パラメータ ( $T_{e1}/T_{e2} = T_{i1}/T_{i2} = 4$ ,  $N_1/N_2 = 0.25$ ) [6, 3] と異なる。
2. Tsai *et al.* のシミュレーションにおいて、イオンの時間スケールにおける数密度の不連続面が維持するかどうかの確認は行われていない。
3. hybrid-PIC シミュレーションにおいて、イオンの時間スケールにおけるイオン数密度のシャープな勾配は維持されるが full-PIC シミュレーションにおいては維持されない [6, 3, 7]。hybrid-PIC シミュレーションにおける、シャープな勾配は電子圧力勾配による電場によってサポートされている [3]。full-Vlasov シミュレーションにおいて、電荷分離による電場は、イオン数密度のシャープな勾配を維持しない。[7]。また、full-Vlasov シミュレーションにおいて静電ポテンシャルと電子圧力の関係性を指摘されている [7]。すなわち、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける電子圧力の時間発展は異なる。

問題 1 と 2 に対して、観測データに基づいてパラメータの電子とイオンの温度比を様々に変化させて、イオンの時間スケールまでの接触不連続の full-Vlasov シミュレーションを行う。また、問題 1 と 3 に対して、観測データに基づく初期パラメータを用いて、接触不連続の hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの直接比較を行う。

## 1.1 運動論における接触不連続のシミュレーション研究

プラズマの運動論シミュレーションにはいくつかの種類があるため、はじめに運動論におけるそれぞれのシミュレーション手法の違いについて説明する。

図. 1.1 はプラズマの運動論シミュレーションにおける違いの模式図である。運動論シミュレーションの代表的な例は Particle-In-Cell (PIC) シミュレーション [8, 9] や Vlasov シミュレーション [10] である。それぞれのシミュレーションにおいて、電子とイオンはそれぞれ Vlasov 方程式を用いて計算される。また、流体シミュレーションの代表的な例は二流体シミュレーションと磁気流体シミュレーションである。流体シミュレーションにおいて、プラズマは流体として近似される

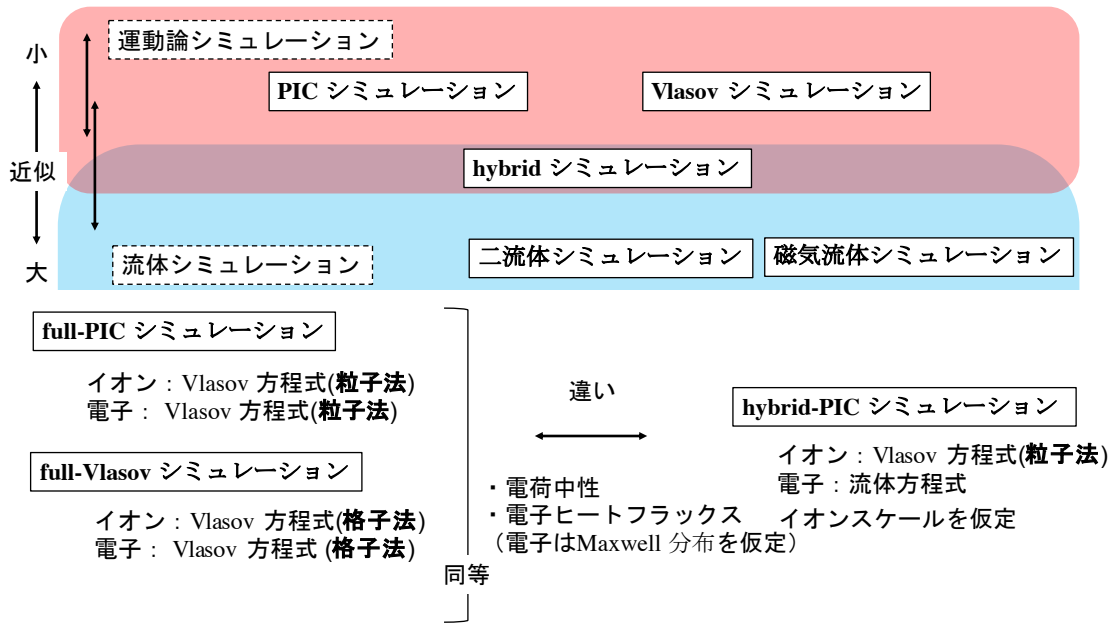


図 1.1: 運動論シミュレーションにおける違いの模式図

ため、流体方程式の時間発展を解く。これらのシミュレーションに加えて hybrid シミュレーション [11] はイオンを Vlasov 方程式、電子を流体方程式を用いて解く。この手法は、電子を流体近似することによって、イオンの運動論効果を含みながら、イオンスケールの現象を効率よく解くことができる。一方で、例えば full-PIC と hybrid-PIC シミュレーションを比較すると、hybrid シミュレーションにおける電子の流体近似による違いは存在する。その違いは、先の導出で明らかのように、電子の流体方程式は電子の Vlasov 方程式のモーメントより導出されるため、電子の運動論効果である電子のヒートフラックスは消えることである。そして、hybrid シミュレーションにおいて、常に電荷中性が仮定されるため、電荷分離の効果を含まない。本研究において、イオンを Vlasov 方程式を用いて解くことから、hybrid シミュレーションは運動論シミュレーションとして位置付けている。先行研究において、これらのシミュレーション手法を用いて、運動論における接触不連続のシミュレーション研究が行われてきた。図. 1.2 は先行研究 [3] のパラメータ

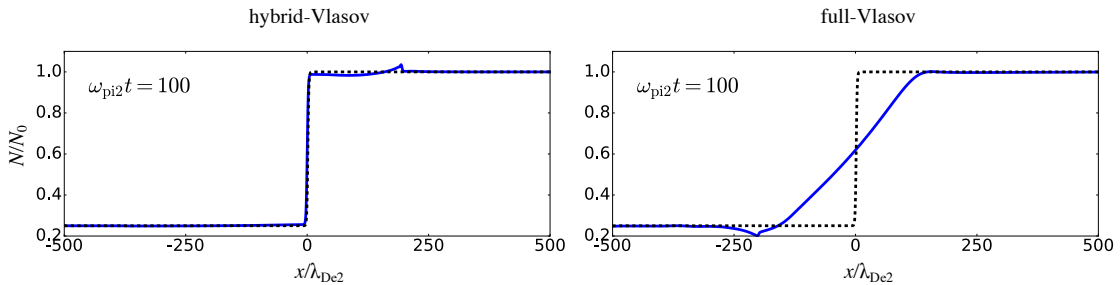


図 1.2: 先行研究 [3] のパラメータ ( $T_e/T_i = 5, T_{e1}/T_{e2} = T_{i1}/T_{i2} = 4, N_1/N_2 = 1/4, m_i/m_e = 25$ ) を用いた静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度の空間分布。黒破線と青線はそれぞれ初期状態とイオンスケール ( $\omega_{pi2}t = 100$ ) を示している。

( $T_e/T_i = 5, T_{e1}/T_{e2} = T_{i1}/T_{i2} = 4, N_1/N_2 = 1/4, m_i/m_e = 25$ ) を用いた静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度の空間分布である。hybrid-Vlasov シミュレーションにおいてイオン数密度の不連続面にはシャープな勾配が形成される。一方で、full-Vlasov シミュレーションにおいてシャープな勾配は形成されることはなく、不連続面は広がる。2つのシミュレーション結果が示すように、運動論シミュレーションであってもイオンスケールにおけるイオン数密度の不連続面の構造は異なる。

## 1.2 THEMIS 衛星による接触不連続の観測

近年、Hsieh *et al.* によって、THEMIS 衛星によるその場観測において、接触不連続の存在が報告された [2] 特に、2011 年 10 月 25 日 10:02:13 UT に GSM 座標 ( $51.6, 21.2, 6.4 R_E$ ) で Time History of Events and Macroscale Interactions during Substorms (THEMIS) により得られた観測データに着目する。ここで、 $R_E$  は地球半径を示している。観測された不連続面の幅は 252 km である。ここで、イオンのジャイロ半径は 58.5 km である。また、磁場の角度は  $4.8^\circ$  であり、十分に小さい。不連続面の幅は不連続面に対して法線方向のバルク速度 18 km と接触不連続の遷移の期間 14 s より計算される。

接触不連続における両サイドの値のジャンプ度は

$$J = 2 \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \quad (1.3)$$

として定義されている。ここで、 $a_1$  と  $a_2$  はそれぞれ密度のジャンプの前と後における物理量の平均値である。観測データにおける、イオン数密度と全圧のジャンプ度はそれぞれ 31.8 % と 3.9 % である。すなわち、イオン数密度の変化に比べて全圧の変化は小さい。また、イオンバルク速度と磁場の強度のジャンプ度はそれぞれ、2.3 % と 0.09 % である。そして、イオンバルク速度と磁場の角度の違いはそれぞれ、 $2.25^\circ$  と  $2.33^\circ$  であるため、バルク速度と磁場はほとんど一様であることが示された。

法線方向は Minimum Variance Analysis (MVA) 法を用いて計測された [12]。MVA 法を用いる場合、 $N$  個の観測された磁場データの平均  $\bar{\mathbf{B}}$  は

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \quad (1.4)$$

として定義される。そして、その偏差は

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n})^2 \quad (1.5)$$

として定義できる。この偏差が最小の場合の  $\mathbf{n}$  を求めることで、法線方向を特定する。

観測された接触不連続と先行研究における full-Vlasov シミュレーションの領域 1 と 2 の電子とイオンの温度比に着目する。

表 1.1: full-Vlasov シミュレーションと観測データにおける電子とイオンの温度比の比較 [1, 2]

	full-Vlasov シミュレーション	観測データ
$T_{e1}/T_{i1}$	0.33	0.20
$T_{e2}/T_{i2}$	5.00	0.30

表 1.2 は full-Vlasov シミュレーションと観測で用いられた電子とイオンの温度比の比較を示している。領域 1 における電子とイオンの温度比  $T_{e1}/T_{i1}$  はほとんど等しいが、領域 2 における  $T_{e2}/T_{i2}$  は大きく異なっている。また、観測データの温度比は、Tsai *et al.* の条件を満たしている。

### 1.3 本論文の構成

第 2 章において、運動論方程式から流体方程式を経由して接触不連続の導出を行う。本研究において、流体方程式の不連続解として知られる接触不連続を運動論においてシミュレーションを行うため、これらの関係性を明らかにする。

第 3 章において、本研究で用いる静電 Vlasov シミュレーション法の説明を行う。運動論における接触不連続のシミュレーション研究では、これまで full-PIC 法 [3]、hybrid-PIC 法 [6, 3] と full-Vlasov 法 [1] が用いられてきた。本研究において、PIC 法において存在した粒子によるノイズがなく、接触不連続の構造を高精度に観測するために Vlasov 法を用いた。特に、静電 hybrid-Vlasov シミュレーションは計算例が少ないため、静電 hybrid-Vlasov シミュレーションに用いる方程式の分散関係より、コードの性能を確かめる。

第 4 章において、full-Vlasov シミュレーションを用いた接触不連続のシミュレーション研究を行う。Tsai *et al.* における、接触不連続のシミュレーション研究では、衛星観測における接触不連続のパラメータ ( $T_{e1}/T_{i1} = 0.200$ ,  $T_{e2}/T_{i2} = 0.304$  と  $N_1/N_2 = 0.73$ ) [2] は full-PIC と Vlasov シミュレーションにおける初期パラメータ (例えば  $T_{e1}/T_{i1} = 1/3$ ,  $T_{e2}/T_{i2} = 5$ ,  $N_1/N_2 = 1/3$ ) [1] と異なる点、Tsai *et al.* のシミュレーションにおいて、イオンの時間スケールにおける数密度の不連続面が維持するかどうかの確認は行われていない点に問題がある。よって、Tsai *et al.* の条件を考慮しながら、観測データを基準にして初期の電子の温度比を変化させて保存型・無振動スキームを用いて 1D-1V 静電 full-Vlasov シミュレーションを行う。静電 full-Vlasov シミュレーションより、Tsai *et al.* の条件を満たす場合、常に Tsai *et al.* の不連続とはならないことがわかった。また、Tsai *et al.* の不連続において、その不連続面は維持しないことがわかった。さらに、Tsai *et al.* の条件を満たす場合であっても、不連続面は維持しないことがわかった。これらのシミュレーション結果を踏まえて、Tsai *et al.* の条件の再考を行なった。

第 5 章において、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの直接比較を行うことで、接触不連続の安定性の研究を行なった。これまでの運動論シミュレーションにおける接触不連続の安定性の違いを比較すると、hybrid-PIC シミュレーション [6, 3] において接触不連続は維持するが、full-PIC シミュレーション [3] において接触不連続は維持しないことが示されている。hybrid-PIC シミュレーションにおいて、そのシャープな勾配は電子圧力勾配による電場によってサポートされていることが示されている [6, 3]。full-Vlasov シミュレーションにおいて、電場と電子圧力勾配の関係性が指摘された [7]。一方で、電荷分離による電場ではシャープな勾配を維持しないことも示されている [7]。すなわち、hybrid-Vlasov シミュレーションと full-Vlasov シミュレーションの電子圧力の時間発展は異なると考えられる。本研究において、私たちは観測データによる初期パラメータを用いて一次元の静電近似の hybrid- と full-Vlasov シミュレーションを行い時間発展の直接比較を行った。観測データによる初期パラメータを用いても、full-Vlasov シミュレーションと異なり、hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配は形成された。一方で、シャープな勾配以外のイオン数密度の時間発展は似ている。一般化 Ohm の法則を用いることで、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおいて、電場は電子圧力勾配によってサポートされていることがわかった。また、電子圧力の発展方程式のそれぞれの項を調べることで、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの間における電子ヒートフラックスと電荷密度の時間発展の違い



によって、電子圧力勾配の形成プロセスは異なることがわかった。

第6章において、本研究のまとめと結論を示す。

なお、本論文の物理量やベクトル計算は特に断りがない限り、付録.1に従う。

## 第2章 接触不連続の導入

本研究において、流体方程式から導出される接触不連続を運動論方程式において議論する。すなわち、運動論方程式を踏まえた上で、流体方程式より接触不連続の導出を確認する必要がある。また、本研究はプラズマ中の接触不連続を対象としているため、運動論における基礎方程式は Vlasov 方程式を用いる。プラズマを流体として記述する場合、その流体は磁場の影響を受けるため、磁気流体方程式が用いられる。

### 2.1 Vlasov 方程式と二流体方程式の導出

運動論的プラズマを扱う Vlasov 方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (2.1)$$

である。ここで、 $f, q, m, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  はそれぞれプラズマの分布関数、電荷、質量、電場、磁場を示している。さらに、電場と磁場の時間発展を解くために Maxwell 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5)$$

を加えることで、Vlasov 方程式は閉じる。ここで、 $c, \epsilon_0, \mathbf{J}, \rho$  はそれぞれ光速、電流密度、電荷密度を示している。また、 $\epsilon_0, \mu_0$  はそれぞれ真空中の誘電率と透磁率を示している。そして、電荷密度と電流密度は電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.6)$$

を満たす必要がある。プラズマのマクロな量として、

$$\text{数密度: } N = \int_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v} \quad (2.7)$$

$$\text{バルク速度: } \mathbf{U} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \quad (2.8)$$

$$\text{圧力テンソル: } \mathbf{P} = m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \quad (2.9)$$

$$\text{ヒートフラックスベクトル: } \mathbf{Q} = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \quad (2.10)$$

を定義する。ここで、 $N, \mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$  はそれぞれ、数密度、バルク速度、圧力テンソル、ヒートフラックスベクトルを示している。マクロな量の関係式を導出することで、より簡単に流体方程式を導出できる（詳細は付録.2を参照）。

## 質量保存則

質量保存則は、Vlasov 方程式の0次のモーメントをとることで得られる。式(2.1)を  $\boldsymbol{v}$  で積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot (N\boldsymbol{U}) = 0 \quad (2.11)$$

となる(詳細は付録.3を参照)。

## 運動量保存則

運動量保存則は、Vlasov 方程式の1次のモーメントをとることで得られる。式(2.1)に  $m\boldsymbol{v}$  をかけて、 $\boldsymbol{v}$  で積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (mN\boldsymbol{U}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{P} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot (mN\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}) - qN(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}) = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

となる(詳細は付録.4を参照)。

## エネルギー保存則

エネルギー保存則は、Vlasov 方程式の2次のモーメントをとることで得られる。式(2.1)に  $m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$  をかけて  $\boldsymbol{v}$  について積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P + \frac{1}{2} mN\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} \right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \left( \boldsymbol{Q} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P\boldsymbol{U} + \frac{1}{2} mN\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} \right) - qN\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{U} = 0 \quad (2.13)$$

となる(詳細は付録.5を参照)。ここで、比熱比は  $\gamma = \frac{5}{3}$  である。

## 圧力の発展方程式の導出と断熱変化の式

圧力等を仮定した、運動量保存則とエネルギー保存則を用いることで、

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \boldsymbol{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} P + \gamma P \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{U} + (\gamma-1) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{Q} = 0 \quad (2.14)$$

となり、圧力の発展方程式が導出される。 $\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$  の場合、式変形によって

$$\frac{P}{N^\gamma} = C \quad (2.15)$$

となり、断熱変化の式が得られる。ここで、 $C$  は定数である。Vlasov 方程式の分布関数を Maxwell 分布として、2次のモーメントをとって得られるエネルギー保存則をから、断熱変化の式が得られることがわかった(詳細な導出は付録.6を参照)。

## 二流体流体方程式まとめ

導出された二流体の方程式をまとめると

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_s N_s) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_s N_s \mathbf{U}_s) = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_s N_s \mathbf{U}_s) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_s N_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P_s - q_s N_s (\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma_s - 1} P_s + \frac{1}{2} m_s N_s \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{U}_s \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\gamma_s}{\gamma_s - 1} P_s \mathbf{U}_s + \frac{1}{2} m_s N_s \mathbf{U}_s \cdot \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s \right) - q_s N_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}_s = 0 \quad (2.18)$$

である。ここで、添字の  $s$  は粒子の種類を示している。Vlasov 方程式と同様に、この方程式に加えて、電場と磁場の時間発展を行うことで、方程式は閉じる。二流体方程式を導出する過程で、

- プラズマ分布関数は Maxwell 分布
- ヒートフラックスベクトルはない

と仮定した。

## 2.2 磁気流体方程式の導出

磁気流体方程式は二流体方程式を用いて導出できる。ただし、二流体方程式に準中性であること、およびイオンの質量に比べて電子の質量は十分に小さいとする条件を加える必要がある。

## 磁気流体の質量保存則

二流体方程式の質量保存則の両辺をそれぞれ足し合わせると

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N \mathbf{U}) = 0 \quad (2.19)$$

となる (詳細な導出は付録.7 を参照)。ここで、 $N = (m_e N_e + m_i N_i) / (m_e + m_i)$ ,  $m = m_e + m_i$ ,  $\mathbf{U} = (m_i N_i \mathbf{U}_i + m_e N_e \mathbf{U}_e) / (m_e N_e + m_i N_i)$  である。

## 磁気流体の運動量保存則

二流体の運動量保存則を用いることで、磁気流体方程式における運動量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} (m N \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.20)$$

となる。

磁気流体方程式は保存型で記述されることが多い。本研究においても、簡単化のために磁気流体方程式における運動量保存則を保存型に書き換える。保存型を用いた磁気流体の運動量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} (m N \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = 0 \quad (2.21)$$

である (詳細な導出は付録.8 を参照)。

## Ohm の法則と誘導方程式

二流体方程式における電子とイオンの運動量保存則を用いることで、一般化 Ohm の法則

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = -\frac{m_e}{e^2 N} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} - \frac{m_e}{eN} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[ N \mathbf{U} \mathbf{U} - N \left( \mathbf{U} - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \left( \mathbf{U} - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \right] - \frac{1}{eN} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P_e + \frac{\mathbf{J}}{eN} \times \mathbf{B} \quad (2.22)$$

が導出される。ここで、理想流体の場合

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

が成立する。理想流体の Ohm の法則を用いれば、Faraday の法則より誘導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (2.24)$$

が導出される (詳細な導出は付録.9 を参照)。

## 磁気流体のエネルギー保存則

磁気流体の運動量保存則と断熱変化を仮定することで磁気流体のエネルギー保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \mathbf{U} + \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{U} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = 0 \quad (2.25)$$

となる (詳細な導出は付録.10 を参照)。

## 磁気流体方程式まとめ

導出された磁気流体方程式をまとめると、

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N \mathbf{U}) = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial (m N \mathbf{U})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{B} \mathbf{B}) \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\gamma-1} P \right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \mathbf{U} + \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{U} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right) \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.30)$$

である。ここで、重要な条件となる磁場に関する Gauss の法則を付け加えている。二流体方程式から、磁気流体方程式を導出する際、

- 準中性である
- イオンの質量に比べて電子の質量は十分に小さい
- 一般化 Ohm の法則の右辺の項はない

を仮定した。すなわち、ここで導出したのは理想磁気流体方程式である。

### 2.3 磁気流体方程式における不連続

磁気流体方程式における不連続をまとめる。不連続の導出には磁気流体方程式を用いるが、多次元での導出は困難であるため、方程式を1次元にして導出を行う。ここで、不連続面の法線方向を  $x$  軸とする。1次元の磁気流体方程式は、

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(NU_x) = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNU_x) + \frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_x^2), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNU_y) + \frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_y) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_y), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNU_z) + \frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_z) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_z), \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_x = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_y = -\frac{\partial}{\partial x}(U_xB_y - U_yB_x), \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_z = \frac{\partial}{\partial x}(U_zB_x - U_xB_z), \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x = 0, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}mNU \cdot U + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\gamma-1}P\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}mNU \cdot UU_x + \frac{\gamma}{\gamma-1}PU_x + \frac{B^2}{\mu_0}U_x - \frac{1}{\mu_0}U \cdot BB_x\right) \quad (2.39)$$

である。不連続面が定常であるとする、時間微分の項は消える ( $\partial/\partial t = 0$ )。空間で積分することでジャンプ条件

$$[j]_1^2 = 0 \quad (2.40)$$

$$j^2 [V]_1^2 + \left[P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right]_1^2 = 0 \quad (2.41)$$

$$j [U_t]_1^2 - \frac{B_x}{\mu_0} [B_t]_1^2 = 0 \quad (2.42)$$

$$B_x [U_t]_1^2 - j [B_t V]_1^2 = 0 \quad (2.43)$$

$$j \left( [V]_1^2 \langle P \rangle_1^2 + \left[ \frac{1}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{4\mu_0} [V]_1^2 [B_t]_1^2 \cdot [B_t]_1^2 \right) = 0 \quad (2.44)$$

$$[B_x]_1^2 = 0 \quad (2.45)$$

が導出される (詳細な導出は付録.11 を参照)。ここで、バルク速度と磁場の接線成分を  $U_t$  と  $B_t$  とする。また、マスフローと比体積は  $j = mNU_x$  と  $V = 1/(mN)$  である。磁気流体中の不連続は、 $j$  が有限の値を持つかどうかで分類可能である。

#### 回転不連続と衝撃波

マスフローが存在する場合 ( $j \neq 0$ ) について考える。 $[V]_1^2 = 0$  の場合、回転不連続が得られる。また、 $j \neq 0$  と  $[V]_1^2 \neq 0$  を満たす場合、衝撃波の解が得られる。式 (2.44) がこれらの条件を満たす

場合、

$$[V]_1^2 \langle P \rangle_1^2 + \left[ \frac{1}{\gamma - 1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{4\mu_0} [V]_1^2 [B_t]_1^2 \cdot [B_t]_1^2 = 0 \quad (2.46)$$

となり、磁気流体方程式における Rankine-Hugoniot の関係式が導出される。圧縮性流体と比べて、磁気流体方程式における衝撃波の解は複雑である。詳細は参考文献に示される [13]。

### 接触不連続と接線不連続

マスフローが存在しない場合 ( $j = 0$ )、について考える。 $B_x = 0$  の場合、ジャンプ条件は

$$\left[ P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]_1^2 = 0 \quad (2.47)$$

のみとなり接線不連続の条件が導出できる。

マスフローが存在しない場合 ( $j = 0$ )、について考える。さらに、 $[V]_1^2 \neq 0, B_x \neq 0$  の条件を加えることで接触不連続の条件が導出できる。接触不連続の条件をまとめると、

$$j = 0, \quad (2.48)$$

$$[V]_1^2 \neq 0, \quad (2.49)$$

$$B_x \neq 0, \quad (2.50)$$

$$[B_x]_1^2 = 0, \quad (2.51)$$

$$[B_t]_1^2 = 0, \quad (2.52)$$

$$[U_x]_1^2 = 0, \quad (2.53)$$

$$[U_t]_1^2 = 0, \quad (2.54)$$

$$[P]_1^2 = 0 \quad (2.55)$$

となる。接触不連続は質量数密度の不連続で、圧力が一様であることから、不連続面を挟んで温度は変化しなければならない。不連続面を挟んで磁場の変化はなく、その法線成分は有限でなければならない。不連続面を挟んで、バルク速度の変化はない。不連続面の速度はバルク速度と一致する。ジャンプ条件を用いた接触不連続の詳細な導出は付録.11 に示した。

## 2.4 運動論方程式と流体方程式の関係と接触不連続

図. 2.1 は運動論方程式および流体方程式の関係と接触不連続の模式図を示している。図. 2.1 が示すように、Vlasov 方程式より二流体方程式が導出され、その二流体方程式より磁気流体方程式が導出される。接触不連続はこの磁気流体方程式の定常解として導出される。本研究において、この接触不連続に対して運動論方程式を用いて議論する。すなわち、それぞれの方程式の導出において用いてきた近似は重要となる。

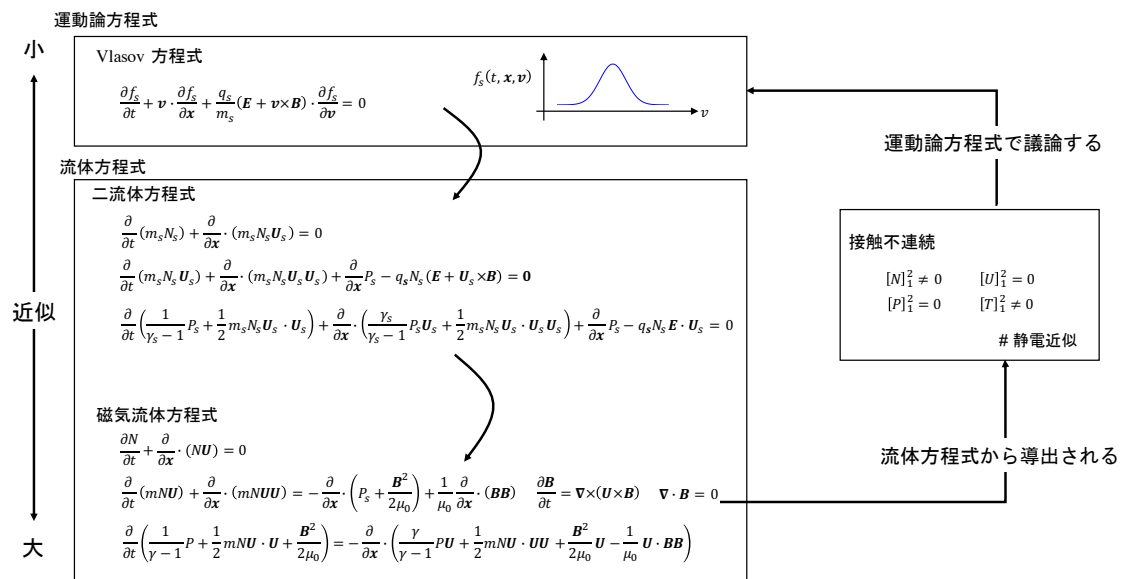


図 2.1: 運動論方程式と流体方程式の関係と接触不連続の模式図



## 第3章 静電 Vlasov シミュレーション法

運動論的なプラズマを記述する方程式として、Vlasov 方程式が挙げられる。この方程式を粒子モデルで解く Particle-In-Cell (PIC) シミュレーションは、現在でもなお宇宙プラズマを始め幅広い分野で応用されている [14]。一方、最大6次元となるプラズマの分布関数を直接解く Vlasov シミュレーションは、計算コストが莫大となり、シミュレーション手法も未発達である。しかし、PIC 法に特有のノイズは消えるため、高精度に計算を行うことができる。本研究において、1次元空間、1速度成分 (1D-1V) の静電系における Vlasov シミュレーションを行う。

### 3.1 静電系における Vlasov 方程式

静電系において、磁場の変化は十分に小さく時間的な変化のない外部磁場が仮定される。すなわち、静電系において粒子の運動は磁力線に沿ったものとなる。よって、静電系における Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (3.1)$$

を用いる。添字の  $s$  はプラズマの種類を示している。本研究において、外部の磁場の効果は無視する。Vlasov 方程式中の電場は Poisson 方程式

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

を用いて計算される。また、電流密度と電荷密度はそれぞれ

$$\rho = q_i \int_{-\infty}^{\infty} f_i dv + q_e \int_{-\infty}^{\infty} f_e dv \quad (3.3)$$

$$J = q_i \int_{-\infty}^{\infty} v f_i dv + q_e \int_{-\infty}^{\infty} v f_e dv \quad (3.4)$$

として計算される。

電荷密度と電流密度は電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (3.5)$$

を満たす必要がある。Poisson 方程式を用いると電荷保存則は

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{J}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

となり、静電系における Ampère の法則が導出できる。導出の際に、外部の電流密度による項は無視した。すなわち、Poisson 方程式を用いず、静電系における Ampère の法則を用いても電場の評

価が行える。そして、この導出は電場の評価に静電系における Ampère の法則を用いる場合、電場が Poisson 方程式を満たすには電荷保存則を満たす必要があることを示している。

静電系における Vlasov 方程式に対応する二流体方程式は、磁場による効果を無視し、1D-1V であることに注意して、式. (2.16)-式. (2.18) より

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_s N_s) + \frac{\partial}{\partial x} (m_s N_s U_s) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_s N_s U_s) + \frac{\partial}{\partial x} (m_s N_s U_s^2) + \frac{\partial}{\partial x} P_s - q_s N_s E = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma_s - 1} P_s + \frac{1}{2} m_s N_s U_s^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma_s}{\gamma_s - 1} P_s U_s + \frac{1}{2} m_s N_s U_s^2 \right) - q_s N_s E U_s = 0 \quad (3.9)$$

と導出できる。

## 3.2 静電 full-Vlasov シミュレーション

1D-1V Vlasov シミュレーションを行うために、Vlasov 方程式および Poisson 方程式が用いられる。電子とイオンはそれぞれプラズマ分布関数を用いて計算される。また、プラズマ分布関数を速度方向に積分することで各粒子の数密度や電荷密度が計算できるため、電荷密度を用いて電場を計算することができる。この計算した電場を用いて、電子とイオンのプラズマ分布関数を計算する。

### 3.2.1 スプリッティングスキーム

分布関数の時間更新を行うために、Vlasov 方程式を実空間と速度空間それぞれ 1 次元移流方程式に分割し、時間積分を行う [10]。Vlasov 方程式を

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (3.11)$$

のように分割し、それぞれ

$$f_s^*(x, v) = f_s^t(x - v\Delta t/2, v) \quad (3.12)$$

$$f_s^{**}(x, v) = f_s^*(x, v - q_s E/m_s \Delta t) \quad (3.13)$$

$$f_s^{t+\Delta t}(x, v) = f_s^{**}(x - v\Delta t/2, v) \quad (3.14)$$

のように解く。この計算手法をスプリッティングスキームと呼ぶ。ここで、単純な移流方程式の数値解法を用いた場合、分布関数に数値的な振動（プラズマ波動の励起）と拡散（プラズマの加熱）が生じる可能性がある。このため、分布関数が保持すべき性質（質量保存性、正值性）を保ちつつ、計算コストを抑え、数値的な振動と拡散を抑制する移流方程式の解法を開発する必要がある。本研究において、移流方程式の数値計算法に保存型無振動スキームを採用した。

### 3.2.2 保存型無振動スキーム

保存型無振動スキームは Vlasov シミュレーションに向けて開発された移流方程式の数値解法である [15, 16]。この手法を用いることにより、プラズマの分布関数が保持すべき性質は満たされ、数値的な振動もなくなる。数値的な拡散を抑えるには、スキームを高次精度にすれば良く、その高次精度バージョンも開発されている [17]。スカラー量  $f$ 、速さ  $c$  の一次元の移流方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

である。この方程式の時間  $\Delta t$  後の解析解は  $f(t + \Delta t, x) = f(t, x - c\Delta t)$  となる。これを利用して、移流方程式が流す物理量を

$$f_i^t = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx \quad (3.16)$$

と定義する。次の時間の物理量は、Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 数を  $\mu = c\Delta t/\Delta x$  とすると

$$\begin{aligned} f_i^{t+\Delta t} &= f_{i-\mu}^t \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2-\mu\Delta x}}^{x_{i+1/2-\mu\Delta x}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2-\mu\Delta x}} f(x) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2-\mu\Delta x}}^{x_{i-1/2}} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1/2-\mu\Delta x}} f(x) dx + f_i + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2-\mu\Delta x}}^{x_{i-1/2}} f(x) dx \\ &= -U_{i+1/2}(\mu) + f_i + U_{i-1/2}(\mu) \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ここで、 $U$  は数値フラックスであり、

$$U_{i+1/2}(\mu) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i+1/2-\mu\Delta x}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx \quad (3.18)$$

と定義する。

ここで、次のステップで質量が保存するかについて考える。前のステップと次のステップの積分を考えると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_x-1} f_i^{n+1} &= \sum_{i=0}^{N_x-1} (f_i - U_{i+1/2}(\mu) + U_{i-1/2}(\mu)) \\ &= \sum_{i=0}^{N_x-1} f_i + \sum_{i=0}^{N_x-1} (-U_{i+1/2}(\mu) + U_{i-1/2}(\mu)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる。ここで右辺の2項目の積分を展開すると

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_x-1} (-U_{i+1/2}(\mu) + U_{i-1/2}(\mu)) &= U_{-1/2}(\mu) - U_{1/2}(\mu) + U_{1/2}(\mu) - U_{3/2}(\mu) \\ &\quad + \cdots + U_{N_x-5/2}(\mu) - U_{N_x-3/2}(\mu) + U_{N_x-3/2}(\mu) - U_{N_x-1/2}(\mu) \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。もし  $N_x$  番目と 0 番目の数値フラックスが等しいなら (周期境界)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_x-1} (-U_{i+1/2}(\mu) + U_{i-1/2}(\mu)) &= U_{-1/2}(\mu) - U_{1/2}(\mu) + U_{1/2}(\mu) - U_{3/2}(\mu) \\ &+ \cdots + U_{N_x-5/2}(\mu) - U_{N_x-3/2}(\mu) + U_{N_x-3/2}(\mu) - U_{-1/2}(\mu) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。つまり

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N_x-1} f_i^{n+1} &= \sum_{i=0}^{N_x-1} f_i + \sum_{i=0}^{N_x-1} (-U_{i+1/2}(\mu) + U_{i-1/2}(\mu)) \\ &= \sum_{i=0}^{N_x-1} f_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

となるため、前のステップと次のステップの総質量は丸め誤差の範囲で保存する。すなわち、保存型無振動スキームは丸め誤差の範囲で質量保存を満たす。

4次精度の場合、数値フラックスは次のような4次の多項式を用いて補間される。

$$U_{i+\frac{1}{2}}(\mu) = A\mu^4 + B\mu^3 + C\mu^2 + D\mu. \quad (3.23)$$

ここで、 $A, B, C$  と  $D$  はそれぞれ多項式の係数である。 $\mu$  が正のとき、数値フラックスの条件は

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = 0, \quad (3.24)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(1) = f_i, \quad (3.25)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(-1) = -f_{i+1}, \quad (3.26)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(2) = f_i + f_{i-1}, \quad (3.27)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(-2) = -(f_{i+1} + f_{i+2}) \quad (3.28)$$

となるので、これらを用いて  $A, B, C, D$  を求めると、数値フラックスは

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2}}(\mu) &= \mu F_i - \mu(\mu-1)(\mu+1)(\mu+2) \frac{L_{i-1/2}}{24} \\ &+ 2\mu(\mu+3)(\mu-1)(\mu-2) \frac{L_{i+1/2}}{24} \\ &- \mu(\mu-2)(\mu-1)(\mu+1) \frac{L_{i+3/2}}{24}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

と変形することができる。ただし

$$L_{i-1/2} = f_i - f_{i-1}, \quad (3.30)$$

$$L_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i, \quad (3.31)$$

$$L_{i+3/2} = f_{i+2} - f_{i+1}, \quad (3.32)$$

は数値フラックス中の  $f$  の変化量を表す。

5次精度の場合、数値フラックスは次のような5次の多項式を用いて補間される。

$$U_{i+\frac{1}{2}}(\mu) = A\mu^5 + B\mu^4 + C\mu^3 + D\mu^2 + E\mu. \quad (3.33)$$

$\mu$  が正のとき、数値フラックスの条件は

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = 0, \quad (3.34)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(1) = f_i, \quad (3.35)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(-1) = -f_{i+1}, \quad (3.36)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(2) = f_i + f_{i-1}, \quad (3.37)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(-2) = -(f_{i+1} + f_{i+2}), \quad (3.38)$$

$$U_{i+\frac{1}{2}}(3) = f_i + f_{i-1} + f_{i-2}, \quad (3.39)$$

となるので、これらを用いて  $A, B, C, D, E$  を求めると、数値フラックスは

$$\begin{aligned} U_{i+\frac{1}{2}}(\mu) = & \mu F_i - \mu(\mu-2)(\mu-1)(\mu+1)(\mu+2) \frac{L_{i-3/2}}{120} \\ & + \mu(3\mu-11)(\mu-1)(\mu+1)(\mu+2) \frac{L_{i-1/2}}{120} \\ & - \mu(3\mu+8)(\mu-3)(\mu-1)(\mu-2) \frac{L_{i+1/2}}{120} \\ & + \mu(\mu-3)(\mu-2)(\mu-1)(\mu+1) \frac{L_{i+3/2}}{120}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

と変形することができる。ただし

$$L_{i-3/2} = f_{i-1} - f_{i-2}, \quad (3.41)$$

$$L_{i-1/2} = f_i - f_{i-1}, \quad (3.42)$$

$$L_{i+1/2} = f_{i+1} - f_i, \quad (3.43)$$

$$L_{i+3/2} = f_{i+2} - f_{i+1} \quad (3.44)$$

は数値フラックス中の  $f$  の変化量を表す。高精度の多項式を用いて数値フラックスの補間を行った場合、数値振動が発生する場合がある。また、物理量が負にならない場合、正值性(物理量が正である)を保証する必要がある。

そこで、以下の保存型無振動リミターを導入することで、この数値振動を抑えることができ、さらに正值性も保証される。

$$L_{i+1/2} = \begin{cases} \min[(f_{i+1} - f_i), \alpha(f_i - f_{\min})] & \text{if } (f_{i+1} \geq f_i) \\ -\min[(f_i - f_{i+1}), \beta(f_{\max} - f_i)] & \text{if } (f_{i+1} < f_i) \end{cases} \quad (3.45)$$

$$L_{i-1/2} = \begin{cases} \min[(f_i - f_{i-1}), \gamma(f_{\max} - f_i)] & \text{if } (f_i \geq f_{i-1}) \\ -\min[(f_{i-1} - f_i), \delta(f_i - f_{\min})] & \text{if } (f_i < f_{i-1}) \end{cases} \quad (3.46)$$

$$L_{i+3/2} = \begin{cases} -\min[(f_{i+1} - f_{i+2}), b(f_i - f_{\min})] & \text{if } (f_{i+2} < f_{i+1} \ \& \ f_{i+1} - f_i \geq f_i - f_{i-1}) \\ \min[(f_{i+2} - f_{i+1}), b(f_i - f_{\min})] & \text{if } (f_{i+2} \geq f_{i+1} \ \& \ f_{i+1} - f_i \geq f_i - f_{i-1}) \\ -\min[(f_{i+1} - f_{i+2}), b(f_{\max} - f_i)] & \text{if } (f_{i+2} < f_{i+1} \ \& \ f_{i+1} - f_i < f_i - f_{i-1}) \\ \min[(f_{i+2} - f_{i+1}), b(f_{\max} - f_i)] & \text{if } (f_{i+2} \geq f_{i+1} \ \& \ f_{i+1} - f_i < f_i - f_{i-1}) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$L_{i-3/2} = \begin{cases} -\min[(f_{i-2} - f_{i-1}), \epsilon(f_i - f_{\min})] & \text{if } (f_{i-1} < f_{i-2} \ \& \ f_{i+1} - f_i \geq f_i - f_{i-1}) \\ \min[(f_{i-1} - f_{i-2}), \zeta(f_i - f_{\min})] & \text{if } (f_{i-1} \geq f_{i-2} \ \& \ f_{i+1} - f_i \geq f_i - f_{i-1}) \\ -\min[(f_{i-2} - f_{i-1}), \eta(f_{\max} - f_i)] & \text{if } (f_{i-1} < f_{i-2} \ \& \ f_{i+1} - f_i < f_i - f_{i-1}) \\ \min[(f_{i-1} - f_{i-2}), \theta(f_{\max} - f_i)] & \text{if } (f_{i-1} \geq f_{i-2} \ \& \ f_{i+1} - f_i < f_i - f_{i-1}) \end{cases} \quad (3.48)$$

ここで、 $\max[x, y]$  および  $\min[x, y]$  はそれぞれ  $x, y$  のどちらか大きい ( $\max$ ) または小さい ( $\min$ ) 値を返す関数である。また、パラメータ  $b, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta$  と  $\theta$  はそれぞれ、任意に指定できるフリーパラメータであり、スキームを高精度または低精度に近づけることができる。4次精度の場合、パラメータは  $\alpha = 2.4, \beta = 4.0, \gamma = 1.6, \delta = 1.6, \epsilon = 2.0, \zeta = 1.1, \eta = 0.8, \theta = 1.9$  が使用される [17]。5次精度の場合、補間関数の対称性より、パラメータを  $\alpha = a, \beta = a, \gamma = a, \delta = a, \epsilon = b, \zeta = b, \eta = b, \theta = b$  と設定できることが示された [T sujine *et al.*, SGE PSS, 2017]。ここで、 $a$  も  $b$  と同様のフリーパラメータである。さらに、

$$f_{\max} = \max[f_{\max 1}, f_{\max 2}] \quad (3.49)$$

$$f_{\min} = \max[0, \min[f_{\min 1}, f_{\min 2}]] \quad (3.50)$$

$$f_{\max 1} = \max[\max[f_{i-1}, f_i], \min[2f_{i-1} - f_{i-2}, 2f_i - f_{i+1}]] \quad (3.51)$$

$$f_{\max 2} = \max[\max[f_{i+1}, f_i], \min[2f_{i+1} - f_{i+2}, 2f_i - f_{i-1}]] \quad (3.52)$$

$$f_{\min 1} = \min[\min[f_{i-1}, f_i], \max[2f_{i-1} - f_{i-2}, 2f_i - f_{i+1}]] \quad (3.53)$$

$$f_{\min 2} = \min[\min[f_{i+1}, f_i], \max[2f_{i+1} - f_{i+2}, 2f_i - f_{i-1}]] \quad (3.54)$$

とする。特に5次精度のスキームの課題は移流する関数の形状に依存するパラメータが存在することであり、このパラメータの選択次第ではスキームが低次精度に落ちてしまうため、これを正しく決定する必要がある。パラメータの性質を探るために、5次精度の保存型無振動スキームを構築して、ガウシアン関数を用いて数値解と解析解の誤差が少なくなるパラメータの探索が行われた [T sujine *et al.*, SGE PSS, 2016, T sujine *et al.*, SGE PSS, 2017, T sujine *et al.*, JPGU, 2018]。フリーパラメータを適切に決定することで、この保存型無振動スキームが完全なものとなることが期待される。

### 3.2.3 Poisson 方程式の数値計算

Poisson 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.55)$$

は

$$\frac{E_{i+1/2} - E_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{\rho_i}{\epsilon_0} \quad (3.56)$$

のように離散化される。プラズマ分布関数から求められた電荷密度より電場は計算される。ここで、セル中心の電場は

$$E_i = \frac{1}{2} (E_{i+1/2} + E_{i-1/2}) \quad (3.57)$$

として求める。

### 3.2.4 静電 full-Vlasov シミュレーションの時間更新

静電 full-Vlasov シミュレーションは

- (1) 電子とイオン分布関数を空間  $x$  方向に  $\Delta t/2$  だけシフトする。
- (2) 電子とイオン分布関数を速度方向に積分することで、電子とイオン数密度を求め、電荷密度を計算する。
- (3) Poisson 方程式を用いて、電場を計算する。
- (4) 電場を用いて、電子とイオン分布関数を速度空間  $v_x$  方向に  $\Delta t$  だけシフトする。
- (5) 電子とイオン分布関数を空間  $x$  方向に  $\Delta t/2$  だけシフトする。

として、時間更新が行われる。

## 3.3 静電 hybrid-Vlasov シミュレーション

静電 hybrid-Vlasov シミュレーションの計算手順を示す。hybrid シミュレーションは、イオンを Vlasov 方程式、電子を流体方程式を用いて解く。そして、イオンの変化に合わせて電子はすぐに反応し中性となる。静電 hybrid-Vlasov シミュレーションはこの既存の hybrid シミュレーションに静電系であるという条件を加える。また、静電 hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオンの Vlasov 方程式はスプリッティング法を用いて、プラズマ分布関数を直接解く。電場の評価は、一般化 Ohm の法則を用いて行う。

### 3.3.1 静電系における一般化 Ohm の法則

静電 hybrid-Vlasov シミュレーションにおける電場は、静電系における一般化 Ohm の法則

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_i + \frac{q_e^2}{m_e} N_e \right) E = q_i \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i U_i^2 + \frac{1}{m_i} P_i \right) + q_e \frac{\partial}{\partial x} \left( N_e U_e^2 + \frac{1}{m_e} P_e \right) \quad (3.58)$$

を用いて評価される。静電系における一般化 Ohm の法則の詳しい導出は付録.13 に示した。また、電磁系と静電系における一般化 Ohm の法則の関係は付録.14 に示した。ここで、イオンの数密度、バルク速度と圧力はそれぞれ式. (2.7)-式. (2.9) を用いて計算できる。また、電子の数密度、バルク速度と圧力はそれぞれ

$$N_e = N_i, \quad (3.59)$$

$$U_e = U_i + \frac{J_0}{N_i}, \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{P_e}{N_e^{\gamma_e}} \right) = 0 \quad (3.61)$$

として計算する。それぞれの空間微分については2次精度の中心差分を用いる。

### 3.3.2 静電 hybrid-Vlasov シミュレーションの時間更新

静電 hybrid-Vlasov シミュレーションは

- (1) イオン分布関数を空間  $x$  方向に  $\Delta t/2$  だけシフトする。
- (2) イオン分布関数を速度方向に積分することで、イオン数密度を計算する。
- (3) 電子数密度がイオン数密度より求められる（流体として取り扱われる電子が瞬時に応答してプラズマが中性となるため）。
- (4) 電子の状態方程式を用いて、電子圧力を計算する。
- (5) 一般化 Ohm の法則を用いて、電場を計算する。
- (6) 電場を用いて、イオン分布関数を速度空間  $v_x$  方向に  $\Delta t$  だけシフトする。
- (7) イオン分布関数を空間  $x$  方向に  $\Delta t/2$  だけシフトする。

として、計算が行われる。

### 3.3.3 イオン音波の伝播のテストシミュレーション

開発した 静電 hybrid-Vlasov コードが基本的なプラズマ物理を追跡できるかどうか、イオン音波の伝播を例にテスト計算する。時間、空間-速度の刻み幅はそれぞれ  $\Delta t = 0.5/\omega_{pe}$ 、 $\Delta x = 0.5\lambda_{De}$ 、 $\Delta v = 0.08v_{thi}$  とする。 $x$  方向と  $v_x$  方向の格子点数はそれぞれ  $N_x = 2000$ 、 $N_v = 400$  である。ここで、 $\lambda_{Di}$ 、 $\omega_{pi}$  はそれぞれ、イオンデバイ長とイオンプラズマ振動数である。質量比  $m_i/m_e = 1836$  が用いられる。真空中の誘電率は  $\epsilon_0 = 1$  である。自由度が 1 より、電子の比熱比は  $\gamma_e = 3$  である。電子とイオンの温度比は  $T_i/T_e = 1/32$  と設定される。初期に、数密度  $N_0$  に対してランダムノイズが与えられる。 $x$  方向には周期的境界条件、 $v_x$  方向には開放境界条件が用いられる。

計算コードの妥当性を確認するために、イオン音波の分散関係のシミュレーション結果と解析解を比較する。hybrid コードの分散関係は

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{3T_i + \gamma_e T_e}{m_i + m_e} \quad (3.62)$$

である。詳細な導出は付録.15 に示す。一方、イオン音波の分散関係は一般的に以下のように知られている。

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{1 + \gamma_e \lambda_{De}^2 k^2} \frac{\gamma_e T_e}{m_i} + \frac{3T_i}{m_i} \quad (3.63)$$



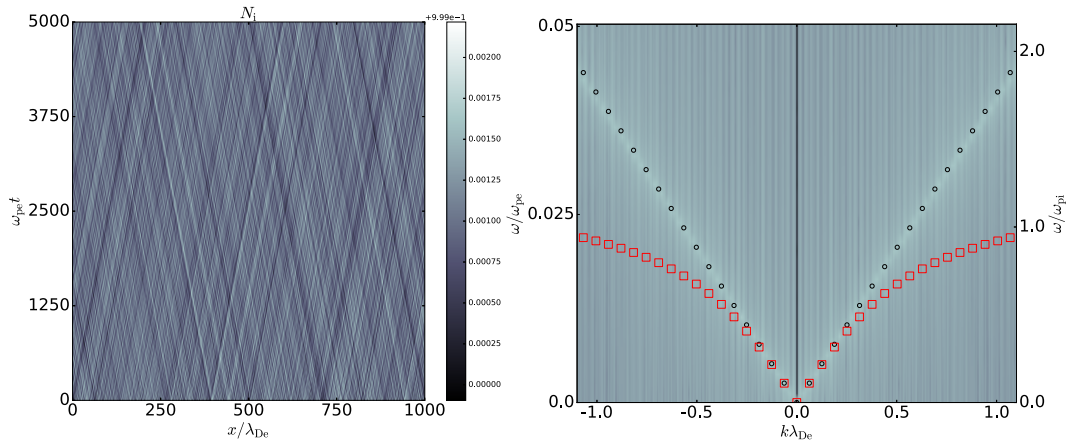


図 3.1: (左) イオン数密度の時間発展、(右) イオン数密度から得られた分散関係。(右) パネルにおいて、丸印と赤色四角印はそれぞれ hybrid コードとイオン音波の分散関係を示している。

図 3.1 は (左) イオン数密度の時間発展、(右) イオン数密度から得られた分散関係を表す。図 3.1 (右) の分散関係はシミュレーションで得られたイオン数密度の 2 次元 Fourier 変換により得られた。イオン数密度は  $N_0$  で規格化されている。波数  $k$  および角振動数  $\omega$  はそれぞれイオンデバイ長  $\lambda_{Di}$  およびイオンプラズマ振動数  $\omega_{pi}$  で規格化されている。丸印は式 (3.62) でも求められる hybrid コードの分散関係である。また、赤色四角印は (3.63) で求められるイオン音波の分散関係を示す。

図 3.1 (左) から分かるように、初期に与えられたイオン数密度のノイズが時間とともに空間中を伝播している。空間  $x$  方向における周期境界条件より、境界を通過したイオン数密度の疎密は反対側から入ってくる。図 3.1 (右) に示されるように、 $\omega/\omega_{pi} \sim 0.5$  以下で数値解、hybrid コードおよびイオン音波の分散関係は一致する。すなわち、静電 hybrid-Vlasov コードは  $\omega/\omega_{pi} \sim 0.5$  以下の低周波イオンスケールの物理を議論するために適している。

## 第4章 full-Vlasov シミュレーションにおける接触不連続

### 4.1 序論

接触不連続は磁気流体力学において、異なるプラズマ密度と温度を分ける不連続面（境界層）であり、不連続面の法線方向の速度変化および磁場の変化がなく、圧力が一定である。今日まで運動論的なプラズマにおいて、この接触不連続の構造が安定して存在するかどうか議論されてきた。すなわち、全圧が等しく Maxwell 分布に従う密度の異なるプラズマにおいて、接触不連続が形成するかに着目する。

Wu *et al.* は接触不連続の安定性を確認するために、hybrid-PIC シミュレーションを行った [6]。hybrid-PIC シミュレーションではイオンを粒子、電子を流体として取り扱う。このため、イオンの運動論効果は含まれるが、電子の運動論効果はシミュレーションには含まれない。シミュレーションの結果、電子圧力の勾配による電場によってイオン数密度の不連続面が安定に維持されることが示された。Lapenta と Brackbill は hybrid-PIC シミュレーションと電磁 full-PIC シミュレーションの結果を比較しながら、接触不連続の安定性について議論した [3]。電磁 full-PIC シミュレーションにおいて、電子とイオンそれぞれの運動論効果はシミュレーションに含まれる。hybrid-PIC シミュレーションの結果は Wu *et al.* の結果と一致する。しかし、電磁 full-PIC シミュレーションでは hybrid-PIC シミュレーションと異なり、イオン数密度の不連続面を維持できないことが示された。これらのシミュレーションにおいて、初期の電子とイオンの温度比は領域 1 と 2 を挟んで等しいと設定された。

Tsai *et al.* は運動論的なシミュレーションにおいて、次に示す 2 つの条件が必要であるということ提案した [1]。電子とイオンの 2 流体の運動量保存則から、圧力の条件

$$(P_{i1} - P_{i2})(P_{e1} - P_{e2}) < 0 \quad (4.1)$$

および、静電ポテンシャルを考慮した位相空間におけるプラズマ分布関数の構造から、分布関数が広がっている部分を温度が高いとして、温度の条件

$$(T_{i1} - T_{i2})(T_{e1} - T_{e2}) < 0 \quad (4.2)$$

が導出された。本研究において、これらの条件を Tsai *et al.* の条件とする。Tsai *et al.* の条件を考慮しながら、Tsai *et al.* は電子とイオンがそれぞれ運動論効果を含む full-Vlasov シミュレーションを行った。初期の電子とイオンの温度比は、領域 1 と領域 2 で異なる。full-Vlasov シミュレーションの結果、Tsai *et al.* の条件が満たされる場合、全圧がほとんど一様であるため電子時間スケールで安定であるとした。その後、全圧は不連続付近に双極な構造を持ち、それ以外は一様であった。この構造を Tsai *et al.* の不連続とする (参照 Tsai *et al.*, JGR, 2009, 図 3) [1]。これらの full-Vlasov シミュレーションにおける接触不連続において、イオン時間スケールでの数密度の不連続面が維持するかどうかは未確認である。

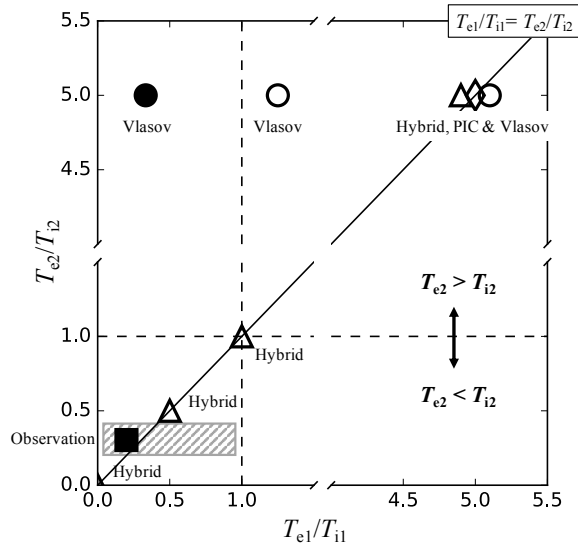


図 4.1: 温度比の図 (これまでのシミュレーションと観測データのパラメータの関係): 三角は hybrid-PIC シミュレーション、ダイヤモンドは full-PIC シミュレーション、丸は full-Vlasov シミュレーションである。また、四角は観測データに基づくパラメータである。破線は、領域 1 または 2 において、電子とイオンの温度比が等しい。この線を境に電子とイオンの温度の大小関係が入れ替わる。Tsai *et al.* の条件を満たすパラメータは、マークが塗りつぶされている。黒線の上のパラメータは、 $T_{e1}/T_{i1} = T_{e2}/T_{i2}$  の関係を満たしている。灰色のパターンは、本研究におけるシミュレーションのパラメータ範囲を示している。

近年、Hsieh *et al.* によって、観測における接触不連続の存在が報告された [2]。観測による接触不連続の遷移層の幅は  $\approx 4\rho_i - 12\rho_i$  (ここで  $\rho_i$  はイオンのジャイロ半径である) であることが示された。衛星観測における接触不連続のパラメータ ( $T_{e1}/T_{i1} = 0.200$ ,  $T_{e2}/T_{i2} = 0.304$  と  $N_1/N_2 = 0.73$ ) [2] は full-PIC と Vlasov シミュレーションにおける初期パラメータ (例えば  $T_{e1}/T_{i1} = 1/3$ ,  $T_{e2}/T_{i2} = 5$ ,  $N_1/N_2 = 1/3$ ) [1] と異なる。領域 1 における電子とイオンの温度比  $T_{e1}/T_{i1}$  はほとんど等しいが、領域 2 における  $T_{e2}/T_{i2}$  は大きく異なっている。また、観測データの温度比は、Tsai *et al.* の条件を満たしている。

ここで問題は、観測における温度比が Tsai *et al.* の条件を満たしているものの、 $T_{e2}/T_{i2}$  が full-Vlasov シミュレーションと大きく異なっている場合でも接触不連続が安定するかどうかである。

図 4.1 は、温度比の図 (過去のシミュレーションと観測データのパラメータの関係) を示している。Tsai *et al.* の条件が提案されたことで、初期パラメータは  $T_{e1}/T_{i1} = T_{e2}/T_{i2}$  の関係から外れた。 $T_{e2}/T_{i2} = 1$  を境にして、高数密度の領域における、電子とイオンの温度比 ( $T_{e2}/T_{i2}$ ) は逆転する。観測データが示すパラメータは、 $T_{e2}/T_{i2} = 0.20$  であるのに対して、Tsai *et al.* が行った数値シミュレーションのパラメータは、 $T_{e2}/T_{i2} = 5$  で固定されている。電子とイオンの温度比に着目すると観測のパラメータはシミュレーションで用いられてきたパラメータと大きく異なっている。

本研究では、Tsai *et al.* の条件を考慮しながら、観測データを基準にして初期の電子の温度比を変化させて保存型・無振動スキームを用いて 1D-1V 静電 full-Vlasov シミュレーションを行う。電子とイオンの温度比を様々に変化したシミュレーションにおいて、Tsai *et al.* の条件に着目しその関係性を明らかにする。また、それぞれのシミュレーションにおけるイオン数密度の遷移層の長さを計測することで、不連続面の安定性を調べる。そして、シミュレーション結果を踏まえて、

Tsai *et al.* の条件を再考する。

シミュレーションモデルをセクション 4.2 に示す。セクション 4.3 においてシミュレーション結果を示す。シミュレーション結果と Tsai *et al.* により提案された条件についてセクション 4.4 において議論する。セクション 4.5 に結論を示す。

## 4.2 シミュレーションモデル

運動論的なシミュレーションにおいて、full-Vlasov シミュレーションは有効なスキームである。特に、電子とイオンの位相空間における分布関数を直接解くため、計算コストが莫大になるが、数値ノイズが非常に少ない。本研究では、1次元空間、1速度成分の静電 full-Vlasov シミュレーションを行う。

初期条件として、シミュレーション空間の中心に不連続面を設置する。シミュレーション空間中において、全圧は一定である。不連続面を挟んだ領域 1 と 2 において、数密度と温度はジャンプ条件を満たしている。実空間および速度空間のサイズはそれぞれ  $L_x = 8000\Delta x$  および  $L_{v_x} = 400\Delta v$  ( $\Delta x$  は空間グリッド、 $\Delta v$  は速度空間グリッド) である。初期の分布関数は Maxwell 分布である。 $\Delta x = 0.9\lambda_{De1}$  ( $\lambda_{De1}$  はデバイ長)、そして  $\Delta v = 0.05v_{the, s1}$  ( $v_{the}$  は電子の熱速度) である。ここで、下付き文字の 1 は低密度領域を表す。電子とイオンの質量比は  $m_i/m_e = 1836$  とした。また、時間刻みは  $\omega_{pe1}\Delta t = 0.01$  とし、 $\Delta t$  は時間グリッドであり 1.0 とした。

衛星観測より、プラズマ密度  $N_1 \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ m}^{-3}$  および電子温度  $T_{e1} \approx 20.3 \text{ eV}$  が示されている。これらの値よりプラズマ振動数は  $\omega_{pe1} \approx 8.1 \times 10^4 \text{ rad/s}$  と見積もられ、総時間は  $t \approx 0.06 \text{ s}$  となる。また、電子の熱速度も  $v_{th1} \approx 1.9 \times 10^6 \text{ m/s}$  と見積もられ、電子デバイ長は  $\lambda_{De1} \approx 23.2 \text{ m}$ 、そしてシミュレーション空間全体は  $x \approx 1.7 \times 10^5 \text{ m}$  となる。ここで、物理定数は Baumjohann と Treumann の教科書を参照した [18]。

次に、イオンと電子の数密度  $N$  の温度  $T$  の関係は、圧力  $P = Nk_B T$  および準中性仮定  $N_i = N_e = N$  を用いて

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1 + \frac{T_{i2}}{T_{e2}}}{1 + \frac{T_{i1}}{T_{e1}}} \frac{1}{\frac{T_{e1}}{T_{e2}}} \quad (4.3)$$

を満たさなければならない。本研究では、まず、式 (4.3) の左辺の粒子数密度の比  $N_1/N_2$ 、そして右辺の電子の温度比  $T_{e1}/T_{e2}$  を与え、全ケースにおいて固定値とした。そして、残りの比  $T_{e1}/T_{i1}$  および  $T_{e2}/T_{i2}$  が決定すると、自動的にジャンプ条件も満たす。

表 4.1 はシミュレーションケースを表す。高密度領域における温度比は  $T_{e2}/T_{i2} = 0.303$  である。Run C は太陽風の観測データに基づく初期値である。全ての Run において、粒子数密度の比は  $N_1/N_2$  は 0.73 を用いた [2]。

図 4.2 は、領域 1 と 2 の電子とイオンの温度比のグラフである。白い領域は Tsai *et al.* の条件を満たしている領域、黒い領域は満たしていない領域を示している。また、各線はそれぞれの Run の  $T_{e1}/T_{e2}$  に沿っている。各線は、式 (4.3) を用いて描かれた。黒い領域は、 $T_{e1} - T_{e2} > 0$ 、 $T_{i1} - T_{i2} > 0$  を満たす。一方で、白い領域は、 $T_{e1} - T_{e2} < 0$ 、 $T_{i1} - T_{i2} > 0$  を満たす部分と  $T_{e1} - T_{e2} > 0$ 、 $T_{i1} - T_{i2} < 0$  を満たす部分に分かれる。図 4.2 上の丸印は表 4.1 の各 Run に対応している。図 4.2 より、Run A, B, C および J は Tsai *et al.* の条件を満たすが、Run D, E, F, G, H および I は満たさない。Tsai *et al.* の主張によれば、接触不連続の安定性に違いがあるはずである。

$x$  方向の境界条件は、法線方向に変化がない条件である。しかし、プラズマ粒子が境界上を出入りするため、シミュレーション空間では常に準中性が保たれず、電場の直流成分が発生する。実

表 4.1: シミュレーションケース。Run C は観測データに基づく初期条件である [2]。Tsai *et al.* の条件を満たす場合、✓を付加する。

Run	$T_{e1}/T_{i1}$	$T_{e2}/T_{i2}$	$T_{e1}/T_{e2}$	Tsai <i>et al.</i> の条件
A	0.054	0.303	0.3	✓
B	0.157	0.303	0.8	✓
C	0.200	0.303	0.98	✓
D	0.204	0.303	1.0	
E	0.255	0.303	1.2	
F	0.340	0.303	1.5	
G	0.371	0.303	1.6	
H	0.404	0.303	1.7	
I	0.593	0.303	2.2	
J	0.900	0.303	2.7	✓

際、電子の温度比  $T_{e1}/T_{e2}$  を小さくしたところ、電場の直流成分の影響と考えられるプラズマ粒子の加速を確認した。そこで、全ての Run において、空間中の電場の平均値を計算し、電場からその直流成分を取り除いてシミュレーションを行った。

また、 $y$  方向の境界条件について、境界を越えたプラズマは吸収され、流入するプラズマがない条件である。

### 4.3 シミュレーション結果

full-Vlasov シミュレーションを用いて、運動論的な接触不連続の安定性を解析する。圧力は領域 1 の初期の電子の圧力、温度は領域 1 の初期の電子の温度でそれぞれ規格化される。また、空間は領域 1 のデバイ長、時間は  $\omega_{pe1}$  で規格化される。初期の接触不連続は  $x/\lambda_{De1} = 0$  に存在する。

#### 4.3.1 観測データに基づく初期値を用いたシミュレーション

図 4.3 は、Run C (観測データに基づく初期値を用いたシミュレーション) における  $\omega_{pe1}t = 1000$  と 5000 の電子数密度  $N_e$ 、イオン数密度  $N_i$ 、電子圧力  $P_e$ 、イオン圧力  $P_i$ 、電子温度  $T_e$ 、イオン温度  $T_i$ 、全圧  $P_T$  と電場  $E$  の空間分布を示している。青破線は初期の分布を示している。緑線はそれぞれの時間の分布を示している。 $\omega_{pe1}t = 1000$  と 5000 における、電子数密度とイオン数密度の空間分布は一致している。そして、数密度の構造より遷移層は時間とともに広がる。 $\omega_{pe1}t = 5000$  において、イオン圧力に比べて電子圧力はその構造をほとんど崩していない。一方で、その時刻における電子温度の構造は空間全体で崩れている。 $\omega_{pe1}t = 1000$  において、全圧にはすでに初期の不連続付近に双曲な構造が形成されている。そして、高い全圧力 ( $(P_e + P_i) \sim 6.4$ ) と低い全圧力 ( $(P_e + P_i) \sim 5.6$ ) は初期の不連続面から時間とともに  $+x$  方向と  $-x$  方向に広がっていることが分かる。 $\omega_{pe1}t = 1000$  において、初期の不連続面付近にマイナスの電場のピークが形成されている。その電場のピークは  $\omega_{pe1}t = 5000$  まで残っているが、その強度は低くなっている。

Run D においても、同様のシミュレーション結果が得られた。ここで、Run D と Run C の領域 1 と 2 における初期の電子の温度比はそれぞれ  $T_{e1}/T_{e2} = 1$  と  $T_{e1}/T_{e2} = 0.98$  である。また、Run D は Tsai *et al.* の条件を満たしているのに対して、Run C は Tsai *et al.* の条件を満たしていない。

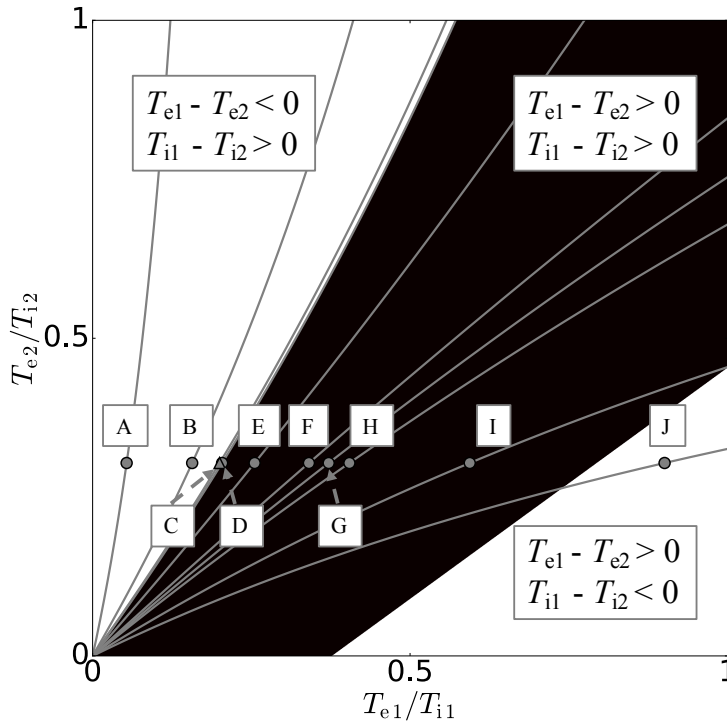


図 4.2: 接触不連続における領域 1 と 2 の電子とイオンの温度比のグラフ:  $T_{e1}/T_{i1}$  vs.  $T_{e2}/T_{i2}$  白い部分は式 (4.2) を満たし、黒い部分は満たしていない領域である。線は、領域 1 と 2 の電子の温度比が等しい部分である。各点は、シミュレーションケースである。

### 4.3.2 全圧の時間発展

図 4.4 は、Run A, D, J における全圧  $P_T$  の時間変化を示している。接触不連続の条件によって、全ての Run において、初期の全圧は、空間的に一様である。

Run D における、高い全圧力 ( $(P_e + P_i) \sim 6.4$ ) が時間と共に接触不連続から  $+x$  方向に、低い全圧力 ( $(P_e + P_i) \sim 5.6$ ) が  $-x$  方向に広がっていることが分かる。Run D と観測データに基づくパラメータを用いている Run C の計算結果はほとんど等しい。Run D における全圧の時間発展は、Tsai *et al.* の不連続と同様である。つまり、Run D は Tsai *et al.* の条件を満たさないが、Tsai *et al.* の不連続となる。

Run A, D, J を比較すると、その全圧の時間発展はそれぞれ異なる。Run A と J の全圧の構造は時間とともに急速に崩れるが、Run D は遅い。また、Run A, D の全圧の構造は Tsai *et al.* の不連続とは異なる。つまり、Runs A と J が Tsai *et al.* の条件を満たすが Tsai *et al.* の不連続にならない。よって Tsai *et al.* の条件より Tsai *et al.* の不連続は形成されない。

### 4.3.3 全圧が時間とともに崩れる原因は電子温度比

電子圧力と温度の時間変化を確かめることで、全圧を急速に崩す原因を調べる。

図 4.5 は、Run B, C, D, E における (上段) 電子圧力  $P_e$  と (下段) 電子温度  $T_e$  の時間発展を示している。Run B における電子の圧力と温度の構造は  $\omega_{pe}t = 1000$  までに空間全体で崩れる。この傾

向は Run E にも見られる。一方で、Run C と D の電子の圧力は Run B や E と比べて  $\omega_{pe}t = 1000$  以内では崩れていない。Run C と D において、電子温度が空間中を広がったとしても、領域 1 と 2 の温度差は一樣な初期状態とほとんど変わらない。よって、 $T_{e1}/T_{e2} \sim 1$  の場合、Tsai *et al.* の不連続となる。

電子の温度比における電子の数密度と温度の空間構造を図 4.6 にまとめる。 $T_{e1}/T_{e2} \ll 1$  と  $T_{e1}/T_{e2} \gg 1$  となる場合、電子の圧力の空間構造は、電子の温度によって支配される。しかし  $T_{e1}/T_{e2} \sim 1$  となる場合、電子の圧力の空間構造は、電子の数密度によって支配される。これらの結果は、Tsai *et al.* の条件は、 $T_{e1}/T_{e2} \sim 1$  と変更すべきであることを示している。

#### 4.3.4 イオンの数密度に基づく不連続面の安定性

不連続面  $x/\lambda_{De1} = 0$  でのイオン数密度の遷移層の長さの時間変化を計算することで、イオンの数密度に基づいた不連続面の時間的な広がりを求める。また、その広がりに対する電場の影響を調べるために、式 (3.1) から電場による加速の項を取り除いたシミュレーション（フリーストリーミング）を行い、イオン数密度の傾きの時間変化を求めた。

図 4.7 は (左側) Run D における  $\omega_{pe}t = 632$  でのイオン数密度の空間分布を示している。線と破線はそれぞれ数値計算と近似線を示している。このとき、近似線は遷移層の長さを見積もってプロットした。ここで、イオンの数密度のプロファイルが関数  $\tanh(x)$  で記述できるとすると、遷移層の長さはプロファイルの勾配によって推定することができる。遷移層の長さを見積もるために、 $\tanh(x)$  を用いて、イオン数密度のプロファイルを近似すると、

$$N_i(x) = \frac{N_{i2} - N_{i1}}{2} \tanh\left(\frac{2x}{L}\right) + \frac{N_{i2} + N_{i1}}{2} \quad (4.4)$$

となる。ここで、 $L$  は遷移層の長さである。このとき、 $x = 0$  での勾配は、

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{N_{i2} - N_{i1}}{\Delta x} \quad (4.5)$$

となる。Run D における  $\omega_{pe}t = 632$  でのイオン数密度の空間変化とその近似線はよく一致していることがわかる。

図 4.7 は (右側) Run D におけるイオン数密度の遷移層の長さの時間変化を示している。実線と破線はそれぞれ電場あり (with E) となし (without E) を示している。電場ありの場合、遷移層の長さは時間と共に増加する。電場なしの場合も同様の傾向を示す。 $\omega_{pe}t = 632$  以前において、電場なしより電場ありの方が遷移層の長さは大きい。 $\omega_{pe}t = 632$  以降において、傾向は逆になり、電場なしより電場ありの方が遷移層の長さは小さい。この傾向は、全ての Run で見られるため、この時間を  $t_1$  とする。電場の存在によらず、遷移層はデバイ長スケールより長く、時間とともに定常的に広がる。すなわち、Tsai *et al.* の不連続のイオン数密度の不連続面は維持しない。

$t_1$  から物理現象が十分に緩和した時間を  $t_2$  (今回は  $t_2 = 5t_1$ ) としてそれぞれの時間での遷移層の長さの計測を行った。

テーブル 4.2 は、時刻  $t_1$  と  $t_2$  での遷移層の長さ、それらの比を各 Run に対して表にしたものである。 $t_1$  において、どの Run も遷移層の長さ  $L_1$  は時間とともに広がることがわかった。また、 $t_2$  における遷移層の長さ  $L_2$  は、 $L_1$  より長い。そして、その長さの比は 3.7–5.5 であるため、遷移層の長さは時間とともに、定常的に広がり続けていることがわかる。すなわち、Tsai *et al.* の条件を満たす場合も不連続面は維持しない。

表 4.2:  $t_1$  と  $t_2$  における遷移層の長さ :  $L_1(t_1)$ ,  $L_2(t_2)$ 

	$L_1/\lambda_{De11}$	$L_2/\lambda_{De11}$	$L_2/L_1$	$T_{e1}/T_{e2}$
Run A	42	205	4.9	0.3
Run B	45	207	4.6	0.8
Run C	46	206	4.4	0.98
Run D	46	206	4.4	1.0
Run E	49	204	4.2	1.2
Run F	53	203	3.8	1.5
Run G	55	207	3.8	1.6
Run H	57	212	3.7	1.7
Run I	70	280	4.0	2.2
Run J	97	532	5.5	2.7

#### 4.4 議論

Vlasov-Poisson 系における分布関数の平衡解は運動の積分のみの関数である。運動の積分は

$$\frac{1}{2}m_s v^2 + q_s \phi = C \quad (4.6)$$

である。すなわち、Vlasov-Poisson 系における分布関数の平衡解は

$$f_s = N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_s v^2}{T_s} - \frac{q_s \phi}{T_s}\right) \quad (4.7)$$

となる。ここで、分布関数の温度は一様である。時間に依存しない Vlasov 方程式は

$$v \frac{\partial}{\partial x} f_s - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} f_s = 0 \quad (4.8)$$



である。Vlasov-Poisson 系における分布関数の平衡解を、時間に依存しない Vlasov 方程式に代入することで、この平衡状態の条件について調べる。左辺第一項は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f_s &= \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \right) \\
&= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \right) + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} \\
&\quad + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) N_{0s} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \right) \\
&= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \right) + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} \\
&\quad - \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) N_{0s} \frac{1}{2\sqrt{-\frac{m_s}{2\pi} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s}} \frac{m_s}{2\pi} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s \\
&= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \right) + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} \\
&\quad - \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{m_s}{2\pi} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s} \\
&= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \right) + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} \\
&\quad - \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial x} T_s} \\
&= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \left( -\frac{m_s v^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T_s} - q_s \frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{T_s} \right) + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} \\
&\quad - \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial x} T_s} \\
&= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \left( \frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s - q_s \frac{\phi}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s + q_s \frac{T_s}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} \phi \right) \\
&\quad + \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} - \exp \left( -\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s} \right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial x} T_s}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。また、左辺第二項は

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial v} f_s &= \frac{\partial}{\partial v} \left( N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \right) \\
 &= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \right) + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} \\
 &\quad + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \right) \\
 &= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \right) + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} \\
 &\quad - \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2\sqrt{-\frac{m_s}{2\pi} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s}} \frac{m_s}{2\pi} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s \\
 &= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \right) + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} \\
 &\quad - \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{m_s}{2\pi} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s} \\
 &= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \right) + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} \\
 &\quad - \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial v} T_s} \\
 &= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \left( -\frac{m_s}{2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{v^2}{T_s} - q_s \phi \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{T_s} \right) + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} \\
 &\quad - \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial v} T_s} \\
 &= N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \left( -\frac{m_s}{2} v^2 \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s + \frac{m_s v}{T_s} + q_s \phi \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s \right) \\
 &\quad + \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} - \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial v} T_s}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

となる。よって、時間に依存しない Vlasov 方程式は

$$\begin{aligned}
& v N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \left( \frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s - q_s \frac{\phi}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s + q_s \frac{T_s}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} \phi \right) \\
& + v \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} - v \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial x} T_s} \\
& - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \left( -\frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s + \frac{m_s v}{T_s} + q_s \phi \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s \right) \\
& - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} \\
& + \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \exp\left(-\frac{m_s v^2}{2T_s} - q_s \frac{\phi}{T_s}\right) N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial v} T_s} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
& v N_{0s} \left( \frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s - q_s \frac{\phi}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s + q_s \frac{T_s}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} \phi \right) + v \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} - v N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial x} T_s} \\
& - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} N_{0s} \left( -\frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s + \frac{m_s v}{T_s} + q_s \phi \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s \right) - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} + \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial v} T_s} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
& v N_{0s} \left( \frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s - q_s \frac{\phi}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial x} T_s \right) + v \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} - v N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial x} T_s} \\
& - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} N_{0s} \left( -\frac{m_s v^2}{2} \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s + q_s \phi \frac{1}{T_s^2} \frac{\partial}{\partial v} T_s \right) - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} + \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} N_{0s} \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{1}{T_s} \frac{\partial}{\partial v} T_s} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

となる。よって、

$$v \frac{\partial}{\partial x} N_{0s} - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} N_{0s} = 0 \tag{4.14}$$

$$v \frac{\partial}{\partial x} T_s - \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} T_s = 0 \tag{4.15}$$

を満たす場合、分布関数は Vlasov-Poisson 系における平衡解である。もし Maxwell 分布関数であるなら、 $\partial N_s / \partial v = 0, \partial T_s / \partial v = 0$  となるため、

$$\frac{\partial}{\partial x} N_{0s} = 0 \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} T_s = 0 \tag{4.17}$$

を満たす必要がある。Tsai *et al.* の条件において、空間中で温度の変化を仮定している [1]。すなわち、Tsai *et al.* は  $\partial T_s / \partial x = 0$  の条件を見落としている。

運動論的な平衡解を用いて、(Tsai *et al.*, JGR, 2009) 図 1 で示された解が記述できるかを確認する [1]。Vlasov-Poisson 系における分布関数の平衡解は

$$f_s = N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2} m_s v^2}{T_s} - \frac{q_s \phi}{T_s}\right) \tag{4.18}$$

である。速度空間の積分は

$$\begin{aligned}
 \text{数密度 : } N &= \int_{-\infty}^{\infty} f_s dv = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_s v^2}{T_s} - \frac{q_s \phi}{T_s}\right) \right] dv \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ N_{0s} \sqrt{\frac{m_s}{2\pi T_s}} \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_s v^2}{T_s}\right) \right] dv \exp\left(-\frac{q_s \phi}{T_s}\right) \\
 &= N_{0s} \exp\left(-\frac{q_s \phi}{T_s}\right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

となる。ここで、 $N_{0s}$  はそれぞれ  $\phi = 0$  における数密度である。電子とイオンが運動論的な平衡解を満たす場合、その数密度は Boltzmann の関係式に従う。準中性条件より

$$\begin{aligned}
 N_i &= N_e \\
 N_{i0} \exp\left(-\frac{q_i \phi}{T_i}\right) &= N_{e0} \exp\left(-\frac{q_e \phi}{T_e}\right)
 \end{aligned}$$

となる。両辺に対数を取ると

$$\begin{aligned}
 \log \left[ N_{i0} \exp\left(-\frac{q_i \phi}{T_i}\right) \right] &= \log \left[ N_{e0} \exp\left(-\frac{q_e \phi}{T_e}\right) \right] \\
 \log N_{i0} + \log \left[ \exp\left(-\frac{q_i \phi}{T_i}\right) \right] &= \log N_{e0} + \log \left[ \exp\left(-\frac{q_e \phi}{T_e}\right) \right] \\
 \log \left[ \exp\left(-\frac{q_i \phi}{T_i}\right) \right] - \log \left[ \exp\left(-\frac{q_e \phi}{T_e}\right) \right] &= \log N_{e0} - \log N_{i0} \\
 -\frac{q_i \phi}{T_i} + \frac{q_e \phi}{T_e} &= \log \left( \frac{N_{e0}}{N_{i0}} \right) \\
 \phi &= -\frac{1}{e} \left( \frac{1}{\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}} \right) \log \left( \frac{N_{e0}}{N_{i0}} \right) \\
 &= \text{const}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

となる。空間中で静電ポテンシャルは一様となるため、先行研究 (Tsai *et al.*, JGR, 2009) 図1で示された解は求めることができない [1]。また、 $\phi = \text{const}$  となる場合、電子とイオン数密度は

$$\begin{aligned}
 N_s &= N_{0s} \exp\left(-\frac{q_s \phi}{T_s}\right) \\
 &= \text{const}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

となり、電子とイオンの数密度は一様なため、解は不連続ではない。

## 4.5 結論

初期の領域1と2における電子の温度比を変化させて、接触不連続の静電 full-Vlasov シミュレーションを行った。静電 full-Vlasov シミュレーションより、

- Tsai *et al.* の条件と Tsai *et al.* の不連続との関係性はない。むしろ  $T_{e1} \sim T_{e2}$  となる場合、Tsai *et al.* の不連続は形成される

- Tsai *et al.* の不連続において、不連続面は維持することはなく、遷移層は広がる
- Tsai *et al.* の条件を満たす場合、不連続面は維持することはなく、遷移層は広がる

がわかった。本研究において、様々な初期の領域 1 と 2 における電子温度比を用いて、接触不連続のシミュレーションを行ったが、どのシミュレーションも遷移層は広がり、不連続面が維持することはなかった。これは、熱運動する粒子が不連続面を通過することを妨げる機構がないためであり、全圧が等しく Maxwell 分布に従う密度の異なるプラズマでは接触不連続は形成できない。これらの結果は、THEMIS 衛星の観測結果と一致していない。すなわち、Vlasov-Poisson 平衡を満たす非 Maxwell 分布が必要となる。

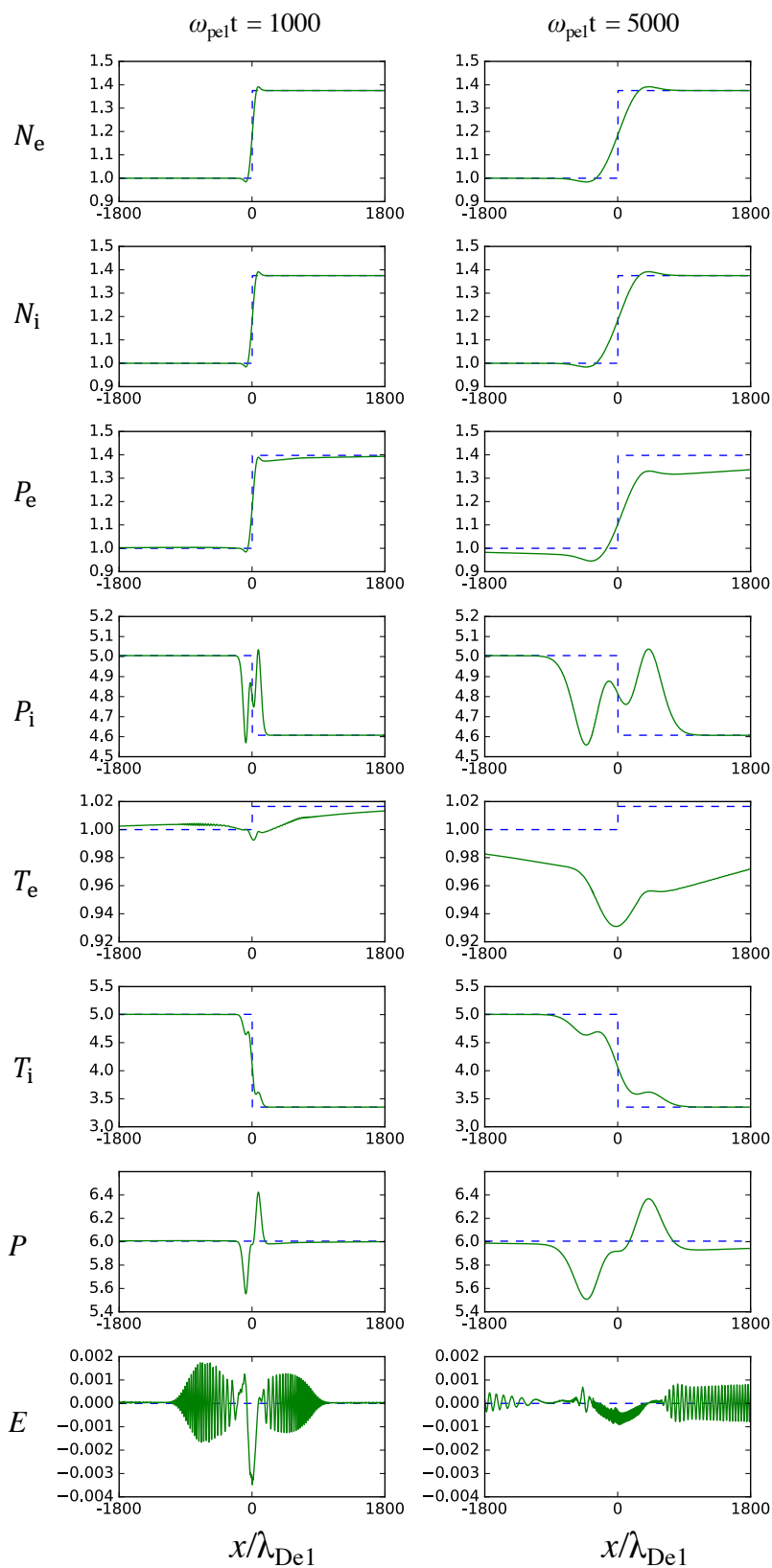


図 4.3: Run C (観測データに基づく初期値を用いたシミュレーション) における  $\omega_{pe}t = 1000$  と  $5000$  の電子数密度  $N_e$ 、イオン数密度  $N_i$ 、電子圧力  $P_e$ 、イオン圧力  $P_i$ 、電子温度  $T_e$ 、イオン温度  $T_i$ 、全圧  $P_T$  と電場  $E$  の空間分布。領域 1 の初期の電子の物理量で規格化した。青破線は初期の分布を示している。緑線はそれぞれの時間の分布を示している。

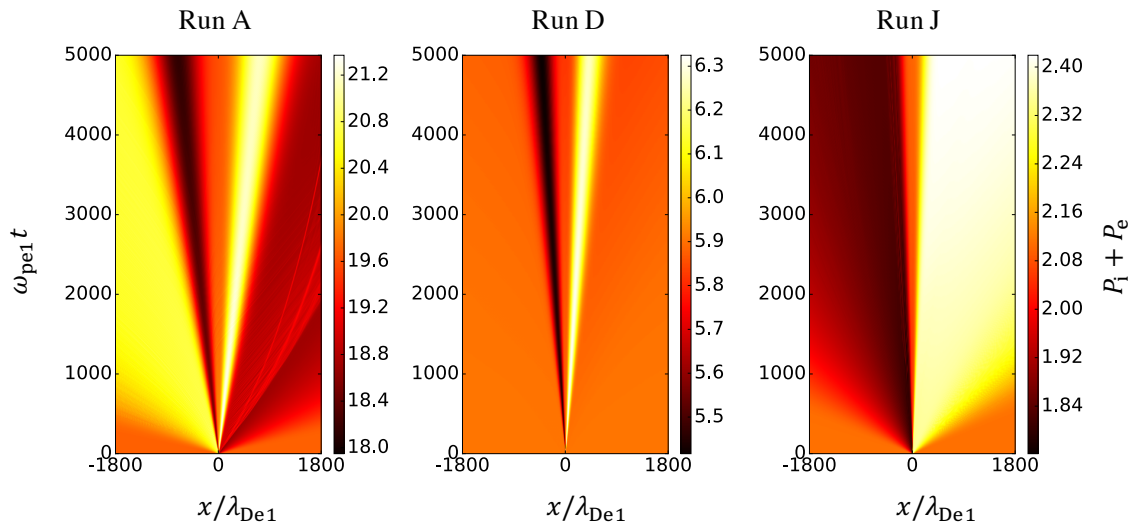


図 4.4: Run A, D, J における全圧  $P_T$  の時間発展:領域 1 の初期の電子の物理量で規格化した。

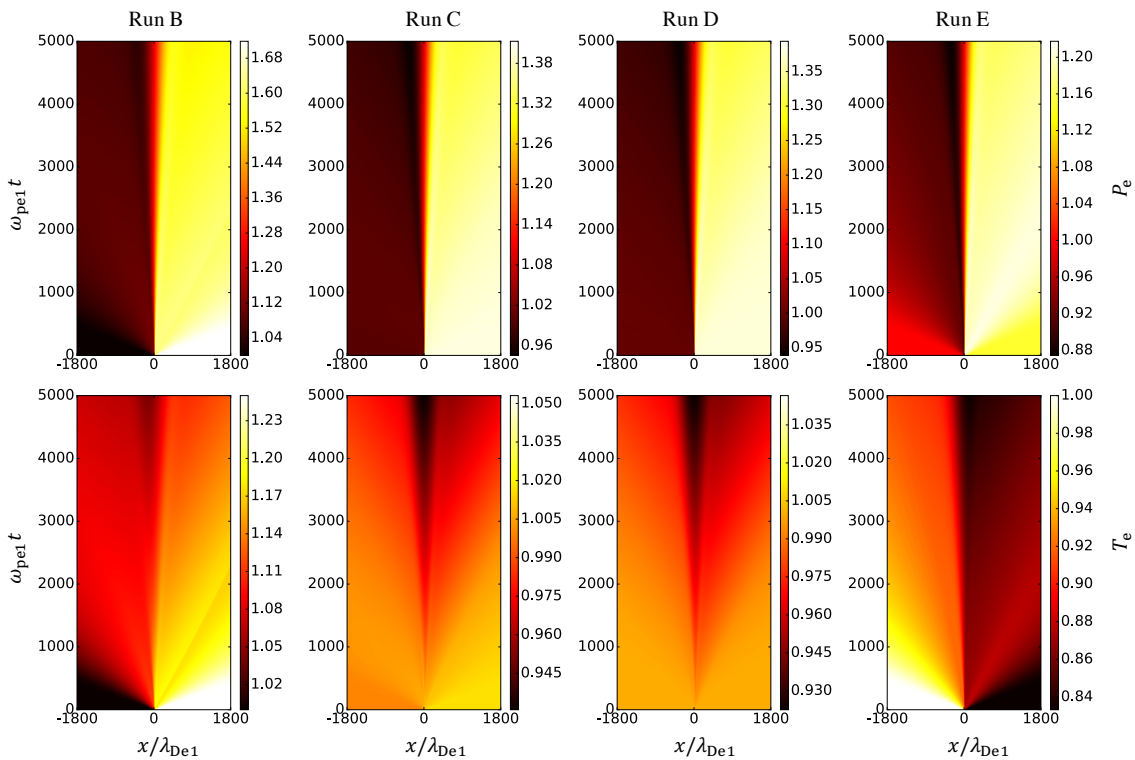


図 4.5: Run B, C, D, E における (上段) 電子圧力  $P_e$  と (下段) 電子温度  $T_e$  の時間発展:領域 1 の初期の電子の物理量で規格化した。

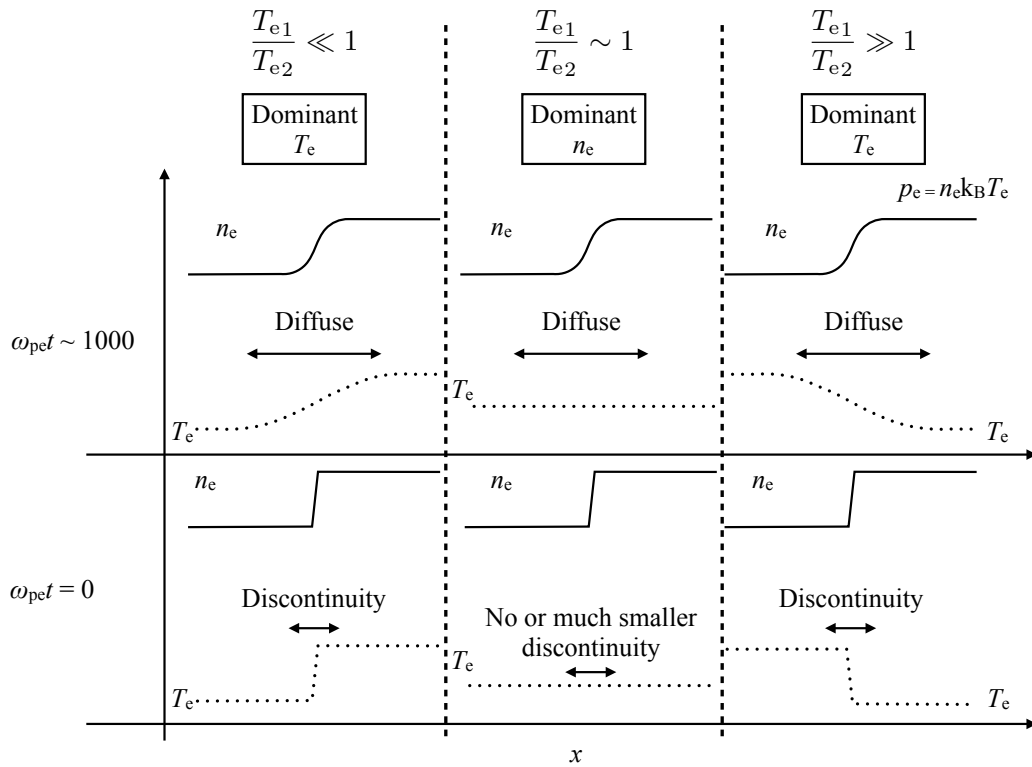


図 4.6: 電子の温度比における電子の数密度と温度の空間構造の略図: 線は電子の数密度の空間構造を示している。点線は電子の温度の空間構造を示している。 $T_{e1}/T_{e2}$  における、電子の圧力を担う電子の数密度と温度の貢献度を示す。

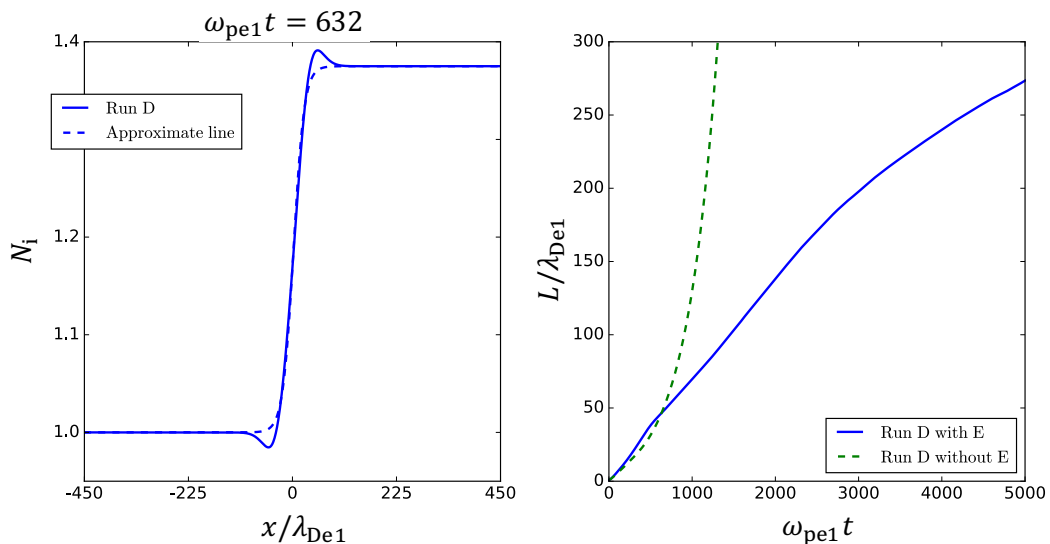


図 4.7: Run D における  $\omega_{pe}t = 632$  でのイオン数密度の空間分布: 数値計算 (実線) と 近似線 (破線). Run D におけるイオン数密度の遷移層の長さの時間変化: 電場あり (実線) と 電場なし (破線). 近似線は、見積もった遷移層の長さ  $L_1$  と、 $N_i = \frac{N_{i2}-N_{i1}}{2} \tanh\left(\frac{2x}{L_1}\right) + \frac{N_{i2}+N_{i1}}{2}$  を用いてプロットした。



## 第5章 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける接触不連続の安定性

### 5.1 序論

接触不連続は磁気流体力学において、異なるプラズマ密度と温度を分ける不連続面（境界層）であり、不連続面の法線方向の速度変化および磁場変化がなく、圧力が一定である [4]。これまで、数密度と温度が異なる 2 つの Maxwell 分布のプラズマを挟んだ境界層の安定性が運動論シミュレーションによって議論されてきた [6, 3, 1, 7]。Wu *et al.* は接触不連続の安定性を確認するために、hybrid-particle-in-cell (PIC) シミュレーションを行った [6]。hybrid シミュレーションではイオンは粒子、電子は流体として取り扱われ、準中性が常に満たされる。シミュレーションの結果、接触不連続とされるイオンの時間スケールの数密度のシャープな勾配は維持されることが示された。Lapenta と Brackbill は hybrid- と full-PIC シミュレーションの比較により、接触不連続の安定性について議論した [3]。hybrid シミュレーションにおいて、電子圧力の断熱変化が仮定されるため、hybrid-PIC シミュレーションにおいて、電子の圧力の振る舞いは full-PIC シミュレーションと異なった。full-PIC シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配は維持されないことが示された。

Hsieh *et al.* は THEMIS 衛星によるその場観測において、中性プラズマにおける接触不連続の存在の証拠を示した [2]。観測による接触不連続の遷移層の幅は  $\approx 4\rho_i - 12\rho_i$  (ここで  $\rho_i$  はイオンのジャイロ半径である) であることが示された。そして、その幅はイオンのデバイ長の数十倍である。

Tsai *et al.* は様々な電子とイオンの温度比を用いて、静電 full-Vlasov シミュレーションを行った [1]。電子の時間スケールにおいて、全圧のジャンプがない数密度と温度の構造を議論した。Umeda *et al.* はさらに様々な温度比を用いて 静電 full-Vlasov シミュレーションを行った [7]。電荷分離による静電ポテンシャルは十分に小さいため、電子の時間スケールであってもイオン数密度のシャープな勾配は維持しないことを示した。これは、先行研究の full-PIC シミュレーションと一致している [3]。

衛星観測における接触不連続のパラメータ ( $T_{e1}/T_{i1} = 0.200, T_{e2}/T_{i2} = 0.304$  と  $N_1/N_2 = 0.73$ ) [2] はこれまでに行われた hybrid シミュレーションにおける初期値 ( $T_{e1}/T_{e2} = T_{i1}/T_{i2} = 4$  と  $N_1/N_2 = 0.25$ ) [6, 3] と異なる。ここで、添字の 1 と 2 はそれぞれ領域 1 (低密度で高温なプラズマ) と領域 2 (高密度で低温なプラズマ) を示している。hybrid シミュレーションにおいて、イオンの時間スケールにおけるイオン数密度のシャープな勾配は維持される。そして、そのシャープな勾配は電子圧力勾配による静電ポテンシャルによってサポートされている [3]。hybrid シミュレーションにおいて、電子圧力は一般的に電子の断熱変化の式を用いて議論される。full-Vlasov シミュレーションにおいて静電ポテンシャルと電子圧力の関係性が指摘されていたが [7]、full-Vlasov シミュレーションにおいて、電荷分離による静電ポテンシャルによって、イオン数密度のシャープな勾配は維持されない。それゆえに、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける電子圧力の時間発展は異なる。

本研究において、私たちは観測データによる初期値を用いて一次元の静電近似の hybrid- と full-Vlasov シミュレーションを行った。観測データにおける磁場の法線角は十分小さく ( $\theta \approx 4^\circ - 15^\circ$ )

[2]、先行研究の hybrid シミュレーションにおいて、接線磁場なしで長期間イオン数密度のシャープな勾配は維持された [6] ことから静電近似を行なった。一般化 Ohm の法則を用いることで、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおいて、電場は電子圧力勾配によってサポートされていることを示す。また、電子圧力の発展方程式を用いることで、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの間で電子圧力勾配の形成プロセスの違いを明らかにする。

セクション 5.2 において、2つのシミュレーションモデルを示す。セクション 5.3 において、静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの結果を比較する。セクション 5.4 において、結論をまとめる。

## 5.2 シミュレーションモデル

接触不連続の研究を行うために、1次元の静電 hybrid- と full-Vlasov コードを開発した。full-Vlasov シミュレーションは位相空間における分布関数を用いて電子とイオンの運動を数値的に解く。一方で、hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、電子はイオンと異なり、流体方程式を用いて数値的に解かれる。

Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial v} = 0 \quad (5.1)$$

として記述される。ここで、 $f$ 、 $q$ 、 $m$  と  $E$  はそれぞれ分布関数、電荷、質量と電場を示している。また、添字  $s = e, i$  はイオンと電子の種類を示している。Vlasov 方程式は2つの移流方程式に分割され、そしてスプリッティング法を用いて解かれる [10]。それらの移流方程式は4次精度の保存型無振動スキームを用いて数値的に解かれる。保存型無振動スキームは分布関数の質量保存、正値性と無振動性を満たす [15, 16, 17]。

また、静電 full-Vlasov モデルは電場を得るために Poisson 方程式

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.2)$$

を解きます。ここで、 $\rho (= q_i N_i + q_e N_e)$  と  $\epsilon_0$  はそれぞれ電荷密度と真空中の誘電率である。一方で、電荷中性 ( $\rho = 0$ ) によって hybrid-Vlasov モデルにおいて電場の評価は式 (5.2) と異なる。電場を評価するために、一般化 Ohm の法則はイオンと電子の Vlasov 方程式をカップルすることで

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_i + \frac{q_e^2}{m_e} N_e \right) E = \frac{\partial J}{\partial t} + q_i \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i U_i^2 + \frac{1}{m_i} P_i \right) + q_e \frac{\partial}{\partial x} \left( N_e U_e^2 + \frac{1}{m_e} P_e \right) \quad (5.3)$$

のように導出される。そして、この式は hybrid シミュレーションにおいて用いられる [19, 20]。ここで、 $J (= q_i N_i U_i + q_e N_e U_e)$  は電流密度である。ここで、一次元の静電近似によって式 (5.3) において、 $U_s \times B$  と  $\nabla \times \nabla \times E$  の項は存在しないことに注意する必要がある [20]。ここで、数密度  $N$ 、バルク速度  $U$  と圧力  $P$  は分布関数のモーメント

$$N_s = \int_{-\infty}^{\infty} f_s dv, \quad (5.4)$$

$$U_s = \frac{1}{N_s} \int_{-\infty}^{\infty} v f_s dv, \quad (5.5)$$

$$P_s = m_s \int_{-\infty}^{\infty} (v - U_s)^2 f_s dv \quad (5.6)$$

によって得られる。hybrid シミュレーションにおいて、電荷中性によって電子数密度とバルク速度はイオン数密度とバルク速度と等しい。これは式 (5.3) における電流密度の時間変化が常でないことを意味する。hybrid シミュレーションにおいて  $N_e = N_i$  と  $U_e = U_i$  のため電子の数密度と運動量の保存則は解かれない。

Wu *et al.* は以下のような対流項のあるエネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P_e}{N_e^{\gamma_e}} \right) + U_e \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P_e}{N_e^{\gamma_e}} \right) = 0 \quad (5.7)$$

を用いて電子の圧力を解いた [6]。ここで、 $\gamma$  は比熱比である。一方で、対流項ありとなしの結果の違いは小さいとして、Lapenta & Brackbill は式 (5.7) における対流項を無視している [3]。また、式 (5.7) より電子圧力の時間発展は

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (P_e U_e) - (\gamma_e - 1) P_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (5.8)$$

として得られる。対流項ありとなしの式 (5.7) を用いた場合と、式 (5.8) を用いた場合の hybrid-Vlasov シミュレーションの結果はほとんど等しいことを確認した。それゆえに、式 (5.8) を用いた結果のみを示す。

初期条件は先行研究の静電 full-Vlasov シミュレーションと等しい [7]。本シミュレーションにおいて、境界層を挟んで全圧が等しく、数密度と温度が異なる 2 つの Maxwell 分布のプラズマを初期に設定する。不連続のジャンプを表現するために、数密度と電子とイオンの温度比は  $\tanh$  関数によって

$$N = \frac{N_2 - N_1}{2} \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{N_2 + N_1}{2}, \quad (5.9)$$

$$\frac{T_e}{T_i} = \frac{\frac{T_{e2} - T_{e1}}{T_{i2} - T_{i1}} \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{T_{e2} + T_{e1}}{T_{i2} + T_{i1}}}{2} \quad (5.10)$$

のように記述される。ここで、 $\lambda$  は遷移層の幅を示している。初期の全圧は  $P_0 (= N_e T_e + N_i T_i)$  (ここで、Boltzmann 定数は取り除いた)  $x$  軸に沿って一様である。それゆえに、電子とイオンの圧力は

$$P_e = \frac{P_0 \left[ (T_{e2} T_{i1} - T_{e1} T_{i2}) \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + T_{e2} T_{i1} + T_{e1} T_{i2} \right]}{(T_{e2} T_{i1} - T_{e1} T_{i2}) \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + T_{e2} T_{i1} + T_{e1} T_{i2} + 2T_{i2} T_{i1}}, \quad (5.11)$$

$$P_i = \frac{2P_0 T_{i2} T_{i1}}{(T_{e2} T_{i1} - T_{e1} T_{i2}) \tanh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + T_{e2} T_{i1} + T_{e1} T_{i2} + 2T_{i2} T_{i1}} \quad (5.12)$$

によって得られる。

イオンと電子の質量比は  $m_i/m_e = 1836$  である。領域 1 と 2 における電子とイオンの温度比は  $T_{e1}/T_{i1} = 0.200$  と  $T_{e2}/T_{i2} = 0.304$  である。同様に、領域 1 と 2 の電子の温度比は  $T_{e1}/T_{e2} = 0.983$  である。領域 1 と 2 の数密度の比は  $N_1/N_2 = 0.73$  である。これらのパラメータは THEMIS 衛星による観測データに基づいている [2]。空間と速度空間のグリッド数は  $N_x = 12,000$  と  $N_v = 1000$  である。空間グリッドの幅は  $\Delta x = 0.27\lambda_{Di2} = 0.5\lambda_{De2}$  である。電子とイオンの速度空間のグリッド幅は  $\Delta v_e = 0.032v_{the2}$  と  $\Delta v_i = 0.152v_{thi2}$  である。真空中の誘電率は 1 である。初期の遷移層の幅は  $\lambda = 1.1\lambda_{Di2} = 2\lambda_{De2}$  である。一次元の静電近似において、 $\gamma_e$  は一般的には 3 である。そして、その値は本 hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて用いられる。この初期値の full-Vlasov シミュレーションにおいて、 $\gamma_e \propto \log(P_e/N_e)$  はほとんど 1 であるということがわかった。それゆえに、 $\gamma_e = 1$  を用いた追加の hybrid-Vlasov シミュレーションを行った。時間刻み幅は  $\Delta t = 0.025/\omega_{pe2}$  とした。直接比較のために hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおいて、完全に同じ初期値を用いる。

衛星観測より、プラズマ密度  $N_2 \approx 2.9 \times 10^{-6} \text{ m}^3$  および電子温度  $T_{e2} \approx 21.6 \text{ eV}$  が示されている。これらの値よりプラズマ振動数は  $\omega_{pe2} \approx 9.5 \times 10^4 \text{ rad/s}$  と見積もられ、総時間は  $t \approx 0.05 \text{ s}$  となる。また、電子の熱速度も  $v_{th2} \approx 1.9 \times 10^6 \text{ m/s}$  と見積もられ、電子デバイ長は  $\lambda_{De2} \approx 20.4 \text{ m}$ 、そしてシミュレーション空間全体は  $x \approx 1.2 \times 10^5 \text{ m}$  となる。ここで、物理定数は Baumjohann と Treumann の教科書を参照した [18]。

$x$  方向は連続境界を用いる ( $\partial/\partial_x = 0$ )。一方で、 $v_x$  方向は開放境界を用いる。full-Vlasov シミュレーションにおいて、電場の DC 成分が原因の非物理的で数値的な振動が生成されることが知られている [21]。非物理的な振動を取り除くために、本研究において電場の DC 成分を含まない full-Vlasov シミュレーションを行う。

### 5.3 シミュレーション結果

静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの不連続な境界層の時間発展を比較する。シミュレーションで用いられる全ての物理量は領域 2 (高密度で低温領域) の値で規格化されている。例えば、時間と空間の幅は電子のプラズマ振動数  $\omega_{pe2}$  とデバイ長  $\lambda_{De2}$  で規格化されている。 $(\gamma_e = 3)$  と  $(\gamma_e = 1)$  は  $\gamma_e = 3$  と 1 を用いた hybrid シミュレーションを意味している。

#### 5.3.1 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度と電場の空間分布

図. 5.1 は  $\omega_{pe2}t = 40, 100, 1000$  と  $5000$  の 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度と電場の空間分布を示している。それぞれのシミュレーションにおいて、イオン数密度の遷移層は時間が進むにつれて広がり続けることがわかった。hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配は遷移層の内側に形成される。一方で、full-Vlasov シミュレーションにおいて、そのようなイオン数密度のシャープな勾配は見つかっていない。full-Vlasov シミュレーションと比較すると、hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、 $x/\lambda_{De2} = 0$  付近におけるシャープな勾配の存在を除くとイオン数密度の時間発展は似ている。 $\gamma_e = 3$  を用いた場合のシャープな勾配の構造は  $\gamma_e = 1$  を用いた場合と異なる。長期間、イオン数密度のシャープな勾配は接線方向の磁場なしに維持される。そして、先行研究の hybrid-PIC シミュレーションと一致している [6]。

図. 5.1 における電場の空間分布より、hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、遷移層内に電場の正のピークが見られる。一方で、full-Vlasov シミュレーションにおいて、そのようなピークは見られない。hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、前段階 ( $\omega_{pe2}t \leq 100$ ) で電場の正のピークは形成されることがわかった。そして、その強度は時間とともに増加することがわかった。また、 $\gamma_e = 3$  を用いた場合の正のピークの強度は  $\gamma_e = 1$  を用いた場合より大きい。これらの結果は、電場の正のピークはイオン数密度のシャープな勾配を維持することを示している。

#### 5.3.2 一般化 Ohm の法則の各項の空間分布

遷移層における電場の正のピークを解析するために、一般化 Ohm の法則 (参照式. (5.3)) を導入する。 $1/m_i$  のファクターの 2 つの項は十分小さいということと、電子とイオンのバルク速度は電子の熱速度より十分小さいため、バルク速度を含む 2 つの項は電場の形成に寄与しないというこ

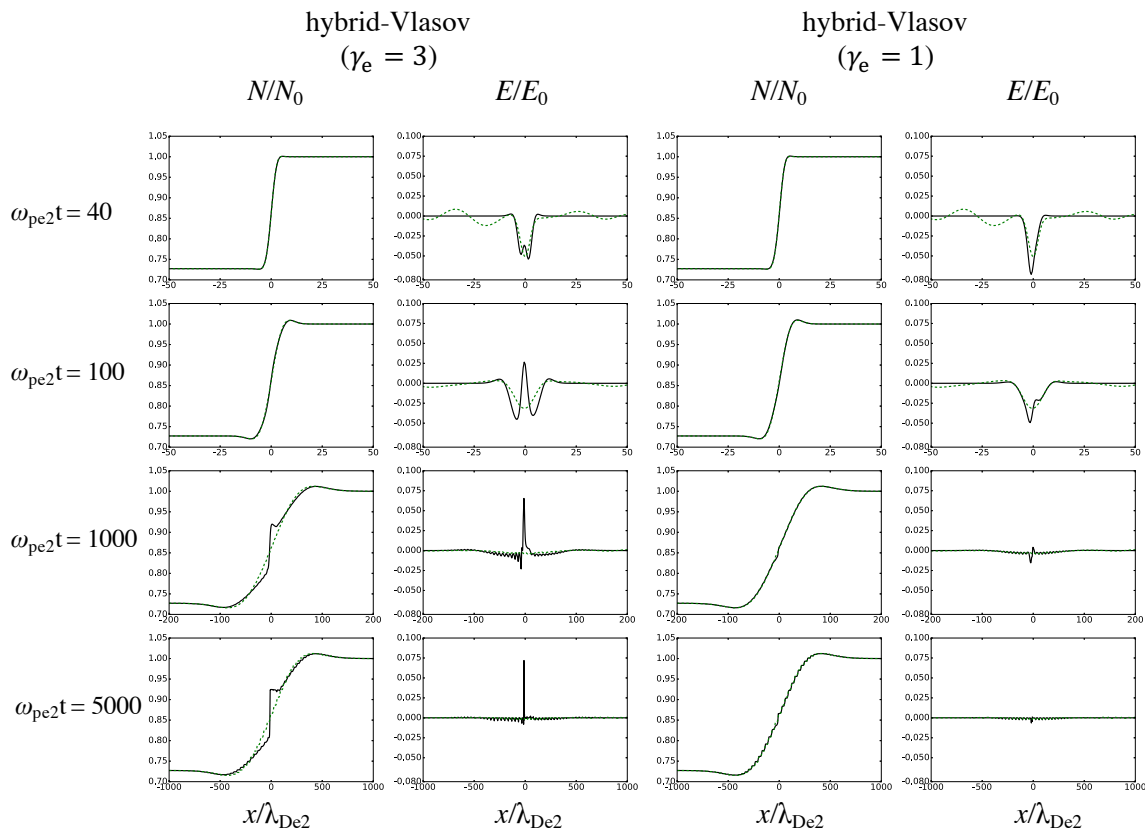


図 5.1:  $\omega_{pe2}t = 40, 100, 1000$  と  $5000$  の静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおけるイオン数密度と電場の空間分布。hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの結果は黒線と緑破線によってプロットされている。数密度と電場は  $N_0 (= N_2)$  と  $E_0 (= m_e \omega_{pe2} v_{the2} / q_e)$  によって規格化されている。

とを確認した。ゆえに、式 (5.3) において、 $E_p \propto \partial P_e / \partial x$  と  $E_J \propto \partial J / \partial t$  の2つの項に着目する。hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、電荷中性により、 $\partial J / \partial t$  の項は消える。

図. 5.2 は  $\omega_{pe2}t = 40, 100, 1000$  と  $5000$  の静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける、一般化 Ohm の法則の2つの項の空間分布を示している。図. 5.1 に示される電場は赤丸によってオーバープロットされている。青線は十分に赤丸と一致するため、 $\gamma_e = 3$  と  $1$  のどちらの hybrid-Vlasov シミュレーションにおいても、電子圧力勾配は電場をサポートする。一方で、full-Vlasov シミュレーションにおける電場は電子圧力勾配と電流密度の時間変化によってサポートされる。先行研究の full-Vlasov シミュレーションにおいて、電子圧力勾配と静電ポテンシャルに関連する電場の関係性が指摘された [7]。full-Vlasov シミュレーションにおいて、電子の時間スケールの電流密度の時間変化は電場に寄与する。よって、この項は本解析では無視する。 $\gamma_e = 3$  の場合  $\omega_{pe2}t = 40$  で  $\gamma_e = 1$  の場合  $\omega_{pe2}t = 100$  で電子圧力による電場の正のピークはすでに形成される。そして、hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、時間発展する。本研究において、hybrid- と full-Vlasov シミュレーションで、電子圧力勾配の構造は異なるが、電子圧力勾配はイオンの時間スケールにおける電場において主要な役割を果たすことが確認された。

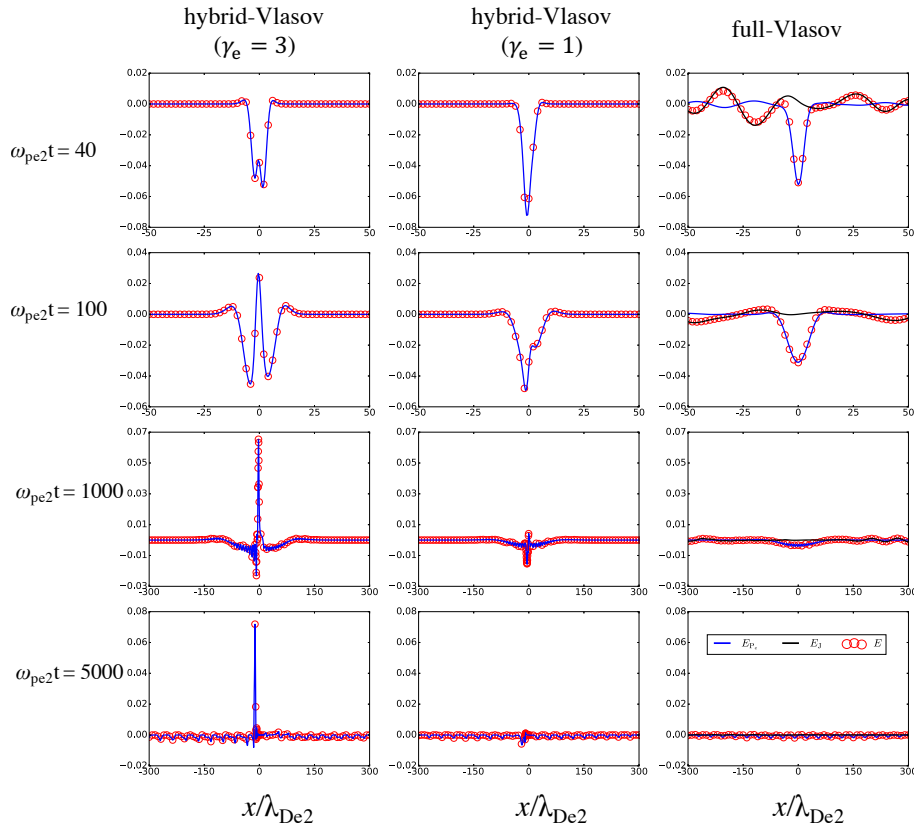


図 5.2:  $\omega_{pe2}t = 40, 100, 1000$  と  $5000$  の静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける、一般化 Ohm の法則の 2 つの項の空間分布。電子圧力の勾配と電流密度の時間変化は、青線と黒先によってプロットされている。図. 5.1 に示される電場は赤丸によってオーバープロットされている。それぞれの項は  $E_0$  によって規格化されている。

### 5.3.3 電子圧力の時間発展の違い

前段階 ( $\omega_{pe2} \leq 100$ ) において電場のピークは形成されるので、以下のようなヒートフラックスを含む電子圧力の時間発展のための方程式を導入する。

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (P_e U_e) - (\gamma_e - 1) P_e \frac{\partial U_e}{\partial x} - \frac{\partial Q_e}{\partial x}. \quad (5.13)$$

そして、この式は電場と関係している。ここで、ヒートフラックスは

$$Q_s = \int_{-\infty}^{\infty} m_s (v - U_s)^3 f_s dv \quad (5.14)$$

として定義される。大きなイオン質量  $m_i$  によって、式. (5.3) において、イオン圧力は寄与しないため、前段階におけるイオン圧力の時間発展の議論は省略する。

図. 5.3 は  $\omega_{pe2}t = 20, 40, 80, 100$  と  $120$  の静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける、電子の移流項、圧縮項とヒートフラックス項の空間分布を示している。hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、電荷中性によって  $N_e = N_i$  と  $U_e = U_i$  の条件が課される。そして、断熱過程によって、電子のヒートフラックスは常にない ( $Q_e = 0$ )。一方で、full-Vlasov シミュレーションにおいて、電子のヒートフラックス項は電子の速度分布関数とともに式. (5.14) によって計算される。 $\gamma_e = 3$  の場合の式. (5.13) は Vlasov 方程式 (5.1) の二次モーメントと一致するというこ

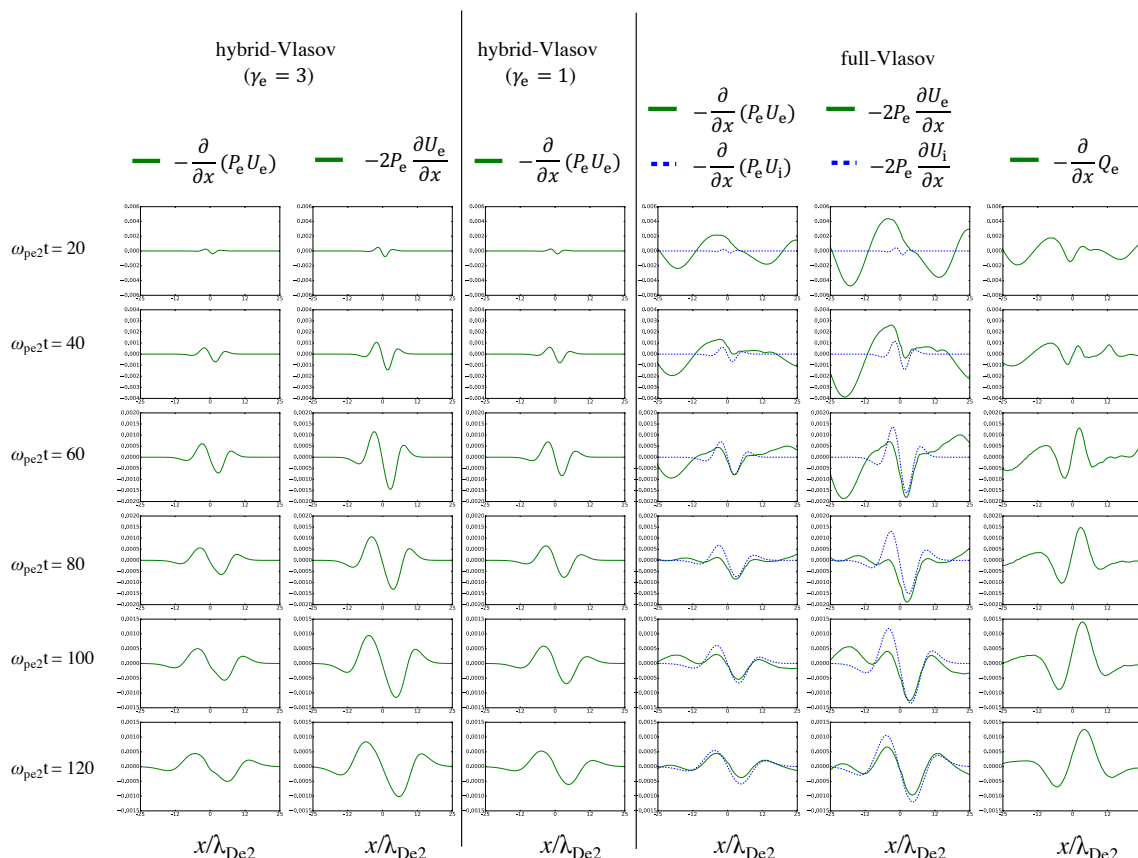


図 5.3:  $\omega_{pe2}t = 20, 40, 80, 100$  と  $120$  の静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおける、電子の移流項、圧縮項とヒートフラックス項の空間分布。緑線と青破線は電子とイオンに関連した項を示している。

は知られている。よって、full-Vlasov シミュレーションの結果を解析するために電子の比熱比を  $\gamma_e = 3$  とした。

hybrid-Vlasov シミュレーションにおける移流と圧縮項は full-Vlasov シミュレーションにおけるイオンに関係した項と似ている。一方で、hybrid-Vlasov シミュレーションにおけるそれらの項は、前段階 ( $\omega_{pe2}t \leq 100$ ) における full-Vlasov シミュレーションにおける電子に関係した項と異なる。full-Vlasov シミュレーションにおける、電子に関係した移流、圧縮とヒートフラックス項は電子の時間スケールで定常になる。そして、それはイオンの分布に影響を与える。

$\gamma_e = 1$  の場合の hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、式 (5.13) の移流項は電荷保存則  $\partial\rho/\partial t = -\partial J/\partial x = -\partial/\partial x (q_i N_i U_i) - \partial/\partial x (q_e N_e U_e)$  を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x} (P_e U_e) \approx T_e \frac{\partial}{\partial x} (N_e U_e) = -\frac{T_e}{e} \frac{\partial \rho}{\partial t} - T_e \frac{\partial}{\partial x} (N_i U_i), \quad (5.15)$$

のように記述される。ここで、 $e$  は素電荷である。式 (5.15) は hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて無視されている電荷密度の時間発展が電子圧力の時間発展に影響を与えていることを示している。 $\gamma_e = 1$  の場合の hybrid-Vlasov シミュレーションと full-Vlasov シミュレーションのイオン数密度の違いは電荷分離によって起こる。

full-Vlasov シミュレーションにおいて、 $\omega_{pe2}t \geq 120$  の電子のヒートフラックス項は圧縮項とキャンセルする。そして、full-Vlasov 系を等温にする。これは、full-Vlasov シミュレーションにおいて、 $\gamma_e \propto \log(P_e/N_e) \approx 1$  となったことと一致する (参照 セクション. 2)。 $\gamma_e = 3$  の場合の hybrid-Vlasov

シミュレーションにおいて、full-Vlasov シミュレーションにおいて電子ヒートフラックス項によってキャンセルされる圧縮項の強度は移流項の強度より大きい。これらの結果は電子圧力の時間発展において電子ヒートフラックスは重要な役割を果たすことを示している。hybrid-Vlasov モデルにおいて、電子の運動量保存則のみを解く場合と電子の数密度と運動量保存則を解く場合の追加のシミュレーションを行なった。これらのシミュレーションにおいて図. 5.1 に見られるイオン数密度のシャープな勾配は観測された。そして、電子のヒートフラックスが電荷密度より強い影響を持つことを示唆している。

## 5.4 結論

先行研究において、異なる数密度と温度を持つ2つの Maxwell 分布のプラズマの間で形成されるイオン数密度のシャープな勾配は hybrid シミュレーションにおいて維持され、full-kinetic シミュレーションにおいて緩和するということが示されている [6, 3, 7]。本研究において、観測データに基づく、同じ初期値を用いた 静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの直接比較を行った。

結論を以下にまとめる。

1.  $\gamma_e = 3$  と 1 の場合の 静電 hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配はイオンの時間スケール ( $\omega_{pi2}t > 100$ ) において遷移層内に形成された。これは、先行研究と一致する [6, 3]。
2. hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおいて、イオンの時間スケールの電場は一般化 Ohm の法則の電子の圧力勾配によってサポートされる。静電 hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配と関係する電子圧力勾配の正のピークは電子の時間スケール ( $\omega_{pe2}t \leq 100$ ) で形成される。
3. full-Vlasov シミュレーションにおいて、電子のヒートフラックスと電荷密度は電子圧力の時間発展に影響を与える。圧縮項をキャンセルすることによって、電子ヒートフラックスは full- と hybrid-Vlasov シミュレーションの違いを作るために重要な役割を果たす。

先行研究が示すように、Vlasov-Poisson 系において、2つの非一様な温度の Maxwell 分布は平衡解を持たない [7]。本シミュレーションモデルによって、イオンデバイ長の数十倍程度の空間スケールの遷移層の安定な構造の THEMIS 観測は説明できない。それゆえに、接触不連続の安定な構造のための非 Maxwell 分布の Vlasov-Poisson 平衡解は将来の研究として残っている。



## 第6章 結論

この論文では、Vlasov コード を用いて接触不連続のシミュレーション研究を行なった。

第2章において、運動論方程式から流体方程式を経由して接触不連続の導出を行った。流体方程式と運動論方程式の違いを明らかにすることで、接触不連続の解析を行う上で重要になる運動論シミュレーションに含まれる効果を確認できた。

第3章において、本研究で用いる静電 Vlasov シミュレーション法の説明を行なった。運動論における接触不連続のシミュレーション研究では、これまで full-PIC 法、hybrid-PIC 法と full-Vlasov 法が用いられてきた。本研究において、PIC 法に存在した粒子によるノイズをなくし、接触不連続の構造を高精度に観測するために Vlasov 法を用いた。特に、静電 hybrid-Vlasov シミュレーションは計算例が少ないため、イオン音波の伝播テストを行うことで、コードの性能を確かめた。本研究において開発した、静電 hybrid-Vlasov コードはイオンスケールの現象を十分に捉えることができることがわかった。

第4章において、Tsai *et al.* の条件に着目し、初期の領域 1 と 2 における電子の温度比を変化させて、接触不連続の静電 full-Vlasov シミュレーションを行なった。また、同時に Tsai *et al.* の条件の再考を行なった。再考の結果、Vlasov 方程式の平衡解は温度一様である必要があり、温度が一様であったとしてもポテンシャル構造がなければ不連続となるための数密度の分布を作ることができなかった。静電 full-Vlasov シミュレーションより、Tsai *et al.* の条件と Tsai *et al.* の不連続との関係性はなかった。 $T_{e1} \sim T_{e2}$  となる場合、Tsai *et al.* の不連続が形成した。しかし、Tsai *et al.* の不連続において、不連続面は維持することなく遷移層は広がる。Tsai *et al.* の条件を満たす場合も同様に、不連続面は維持することなく遷移層は広がることがわかった。本研究において、様々な初期の領域 1 と 2 における電子温度比を用いて、接触不連続のシミュレーションを行なったが、どのシミュレーションも遷移層は広がり、不連続面を維持することはなかった。これは、熱運動する粒子が不連続面を通過することを妨げる機構がないためであり、全圧が等しく Maxwell 分布に従う密度の異なるプラズマでは接触不連続は形成できないことを示している。

第5章において、観測データに基づく同じ初期パラメータを用いた静電 hybrid- と full-Vlasov シミュレーションの直接比較を行った。 $\gamma_e = 3$  と 1 の場合の静電 hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配はイオン時間スケール ( $\omega_{pi2}t > 100$ ) において遷移層内に形成されることがわかった。hybrid- と full-Vlasov シミュレーションにおいて、イオンの時間スケールの電場は一般化 Ohm の法則の電子の圧力勾配によってサポートされることを示した。静電 hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、イオン数密度のシャープな勾配と関係する電子圧力勾配の正のピークは電子の時間スケール ( $\omega_{pe}t \leq 100$ ) で形成されることがわかった。full-Vlasov シミュレーションにおいて、電子のヒートフラックスと電荷密度は電子圧力の時間発展に影響を与えると考えられる。圧縮項をキャンセルすることによって、電子ヒートフラックスは full- と hybrid-Vlasov シミュレーションの違いを作るために重要な役割を果たすことを示した。

本研究において、運動論における接触不連続のイオン数密度の不連続面は安定しないことがわかった。この結果は、THEMIS 衛星による観測結果と一致しない。すなわち、接触不連続のための非 Maxwell 分布を用いた運動論における平衡解を導出する必要がある。また、イオン数密度の

シャープな勾配は hybrid-Vlasov シミュレーションにおいて、電荷中性条件および電子の断熱変化を仮定することによって形成されることが示された。すなわち、電荷中性条件や電子に断熱仮定を用いない、シミュレーションを行えば、これらの影響を議論できる。

## 謝辞

本論文提出するために多くの方々にご指導ご助力いただきました。富山大学 学術研究部 工学系 佐藤雅弘 教授 には研究指導や多くのアドバイスをいただきました。ここに深謝の意を表します。富山大学 学術研究部 都市デザイン学系 春木孝之 准教授 には研究指導だけでなく研究を進める上での外部とのコミュニケーション、社会人としての振る舞いや個人的な相談にも乗っていただきました。ここに深謝の意を表します。名古屋大学 宇宙地球環境研究所 統合データサイエンスセンター 梅田隆行 准教授 には共同研究者でありながら、熱心に研究のアドバイスと指導をしていただきました。ここに深謝の意を表します。富山大学 学術研究部 教育学系 成行泰裕 准教授 には共同研究者として鋭いアドバイスをいただきました。また、博士課程における進路相談に加えて、梅田隆行 准教授に引き合わせてくれました。ここに深謝の意を表します。富山大学 大学院 理工学教育部 知能情報工学専攻 米澤翔汰さんには関連研究について多大な貢献をしてくださいました。ここに感謝の意を表します。本専攻 佐藤研究室および春木研究室の各位には研究遂行にあたり日頃より有益なディスカッションやアドバイスをいただきました。ここに感謝の意を表します。本研究の一部は名古屋大学宇宙地球環境研究所「奨励共同研究」によるものです。This work was carried out by the joint research pro-gram of the Institute for Space-Earth Environmental Re-search (ISEE), Nagoya University. 最後になりますが、研究を進める上での生活をサポートしていただいた家族に感謝します。

## 付録

### 付録.1 物理量とベクトル演算と公式

本文中の物理量の定義を示す。本文中の物理量は断りがない限り上表に従う。

本文の基礎方程式中には  $\partial/\partial\mathbf{x}$  と  $\nabla$  が混在している。これらオペレータは

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (6.1)$$

を意味しており、それぞれを数学的には区別しない。

本文のベクトル演算において

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x a_x & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y a_y & a_y a_z \\ a_z a_x & a_z a_y & a_z a_z \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

はダイアドである。ここで、 $\mathbf{T}, \mathbf{a}$  はそれぞれ任意のダイアドと任意のベクトルである。また、基礎方程式の導出には以下のベクトル恒等式を用いる。

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (6.4)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \quad (6.5)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot (S\mathbf{T}) = (\nabla S) \cdot \mathbf{T} + S (\nabla \cdot \mathbf{T}) \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (6.8)$$

ここで、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  はそれぞれ任意のベクトルである。また、 $S$  は任意のスカラーである。

### 付録.2 マクロな量の関係式

プラズマ分布関数  $f$  より、プラズマのマクロな量は、

$$\text{数密度: } N = \int_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v} \quad (6.9)$$

$$\text{バルク速度: } \mathbf{U} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \quad (6.10)$$

$$\text{圧力テンソル: } \mathbf{P} = m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \quad (6.11)$$

$$\text{ヒートフラックスベクトル: } \mathbf{Q} = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \quad (6.12)$$

として定義される。Vlasov 方程式から流体方程式を導出するために、マクロな量の関係式を導出する。

式 (6.10) より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\mathbf{v} = N\mathbf{U} \quad (6.13)$$

となる。

式 (6.11) を展開すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{U} - \mathbf{U}\mathbf{v} + \mathbf{U}\mathbf{U}) f d\mathbf{v} \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{U} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}\mathbf{v} f d\mathbf{v} + m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}\mathbf{U} f d\mathbf{v} \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{v} f d\mathbf{v} - mN\mathbf{U}\mathbf{U} - mN\mathbf{U}\mathbf{U} + mN\mathbf{U}\mathbf{U} \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{v} f d\mathbf{v} - mN\mathbf{U}\mathbf{U} \end{aligned} \quad (6.14)$$

となる。よって

$$m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}\mathbf{v} f d\mathbf{v} = \mathbf{P} + mN\mathbf{U}\mathbf{U} \quad (6.15)$$

となる。ここで、圧力が等方であると仮定すると、圧力テンソル  $\mathbf{P}$  の対角成分は、 $P$  を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= m \int \begin{bmatrix} (v_x - U_x)(v_x - U_x) & 0 & 0 \\ 0 & (v_y - U_y)(v_y - U_y) & 0 \\ 0 & 0 & (v_z - U_z)(v_z - U_z) \end{bmatrix} f d\mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.16)$$

となる。また、その対角成分を取り出すと、

$$\begin{aligned} \text{tr}\mathbf{P} &= m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 2v_x U_x - 2v_y U_y - 2v_z U_z + U_x^2 + U_y^2 + U_z^2) f d\mathbf{v} \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) f d\mathbf{v} - mN U_x^2 - mN U_y^2 - mN U_z^2 \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f d\mathbf{v} - mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \\ &= 3P \end{aligned} \quad (6.17)$$

となる。よって

$$m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f d\mathbf{v} = 3P + mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \quad (6.18)$$

となる。

また、式(6.12)は展開すると

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} + \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} \\
&\quad - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{U} f d\mathbf{v} + m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} f d\mathbf{v} - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} f d\mathbf{v} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} + \frac{m}{2} N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} \\
&\quad - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{U} f d\mathbf{v} + m N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} - \frac{m}{2} N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{U} f d\mathbf{v} + m N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f d\mathbf{v} \mathbf{U} + m N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f d\mathbf{v} \mathbf{U} + m N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{U} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} - \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f d\mathbf{v} \mathbf{U} + (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} \quad (6.19)
\end{aligned}$$

となる。ここで、右辺第2項を圧力テンソルを用いると

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - (P + m N \mathbf{U} \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} - \frac{1}{2} \left( m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) f d\mathbf{v} \right) \mathbf{U} + (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - P \cdot \mathbf{U} - \frac{1}{2} \left( m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) f d\mathbf{v} \right) \mathbf{U} \quad (6.20)
\end{aligned}$$

となる。ここで、圧力が等方であるとする、

$$\mathbf{Q} = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - p \mathbf{U} - \left( \frac{1}{2} m \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) \mathbf{U} \quad (6.21)$$

となる。また、右辺第3項に圧力の対角成分を用いると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - p \mathbf{U} - \left( \frac{3}{2} p + \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) \mathbf{U} \\
&= \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} - \left( \frac{5}{2} p + \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) \mathbf{U} \quad (6.22)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \mathbf{Q} + \left( \frac{5}{2} p + \frac{1}{2} m N \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) \mathbf{U} \quad (6.23)$$

となる。

### 付録.3 質量保存則

質量保存則は、Vlasov 方程式の 0 次のモーメントをとることで得られる。式 (2.1) を  $\mathbf{v}$  について積分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (6.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0 \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0 \quad (6.26)$$

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{q}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\mathbf{v} - \frac{q}{m} \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} = 0 \quad (6.27)$$

となるため、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) = 0 \quad (6.28)$$

となる。このとき  $f$  は有限のエネルギーを持つ分布関数とした。数密度とバルク速度を用いて表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N\mathbf{U}) = 0 \quad (6.29)$$

となる。

### 付録.4 運動量保存則

運動量保存則は、Vlasov 方程式の 1 次のモーメントをとることで得られる。式 (2.1) に  $m\mathbf{v}$  をかけるて、 $\mathbf{v}$  で積分すると、

$$m\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} + m\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + [\mathbf{v}q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (6.30)$$

$$m\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} + m\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v}] - q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f = 0 \quad (6.31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} m\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} q \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v}] d\mathbf{v} - \int_{-\infty}^{\infty} q f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} = 0 \quad (6.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} m\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} - \int_{-\infty}^{\infty} q f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} = 0 \quad (6.33)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v}] &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot [q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v}] + f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v}] \\
&= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot [q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \mathbf{v}] + f \left[ q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] \mathbf{v} + f \mathbf{v} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \\
&= [v q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f
\end{aligned} \tag{6.34}$$

の関係を用いた。また、 $f$  は有限のエネルギーを持つ分布関数であるとした。左辺第三項の積分を実行すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} m \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} m \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} - q N (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{6.35}$$

となる。左辺第一項にバルク速度を用いて表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} (m N U) + \int_{-\infty}^{\infty} m \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} - q N (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{6.36}$$

となる。左辺第二項に圧力を用いて表すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} (m N U) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m N U \mathbf{U}) - q N (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0 \tag{6.37}$$

となる。

## 付録.5 エネルギー保存則

エネルギー保存則は、Vlasov 方程式の2次のモーメントをとることで得られる。式(2.1)に  $m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  をかけて  $\mathbf{v}$  について積分すると、

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{6.38}$$

$$m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} + m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{6.39}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0 \tag{6.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) f d\mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0 \tag{6.41}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
q \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} &= q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot [f \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] d\mathbf{v} - q \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{v} \\
&\quad - q \int_{-\infty}^{\infty} f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} \\
&= -2q \int_{-\infty}^{\infty} f (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v} \\
&= -2q N \mathbf{E} \cdot \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{6.42}$$



となることに注意すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) f d\mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) - 2qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.43)$$

となる。ここで、 $f$  は有限のエネルギーを持つ分布関数であるとした。左辺第1項に圧力の対角成分を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (3P + mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} m (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) - 2qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.44)$$

となる。両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} f d\mathbf{v} \right) - qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.45)$$

となる。左辺第2項にヒートフラックスベクトルを用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \mathbf{Q} + \frac{5}{2}p\mathbf{U} + \frac{1}{2}mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} \right) - qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.46)$$

となる。ここで比熱比 $\gamma$ を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1}P + \frac{1}{2}mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \mathbf{Q} + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\mathbf{U} + \frac{1}{2}mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} \right) - qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.47)$$

となる。ここで、 $\gamma = \frac{5}{3}$ となる。

## 付録.6 圧力の発展方程式の導出と断熱変化の式

圧力等を仮定した、式. (6.37) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (mN\mathbf{U}\mathbf{U}) - qN(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (6.48)$$

である。ここで、 $\mathbf{U} \cdot$  を作用させると

$$\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U}) + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (mN\mathbf{U}\mathbf{U}) - qN(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.49)$$

$$\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U}) + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (mN\mathbf{U}\mathbf{U}) - qN\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.50)$$

となる。左辺第一項

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U}) &= \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) - N\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (m\mathbf{U}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) - N\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (m\mathbf{U}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \frac{\partial}{\partial t} (mN) + \frac{1}{2} N \frac{\partial}{\partial t} (m\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) - N\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (m\mathbf{U}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \frac{\partial}{\partial t} (mN) \end{aligned} \quad (6.51)$$

と、左辺第三項

$$\begin{aligned}
U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNUU) &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) - NUU \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) - NUU \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU) + \frac{1}{2} NU \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mUU) - NUU \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU) \tag{6.52}
\end{aligned}$$

を書き換えると、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial t} (mN) + U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU) - qNE \cdot U = 0 \tag{6.53}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) - qNE \cdot U = 0 \tag{6.54}$$

となる。この式を用いると、式 (6.47) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} PU \right) - U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = 0 \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} P \right) + P \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} U \right) - U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = 0 \tag{6.56}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{1}{\gamma-1} U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P + P \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} U \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = 0 \tag{6.57}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P + U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P + \gamma P \frac{\partial}{\partial x} \cdot U + (\gamma-1) \frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = 0 \tag{6.58}$$

となり、圧力の発展方程式が導出できる。断熱変化を仮定する場合、 $Q = 0$  となる。また、

$$\frac{d}{dt} P + \gamma P \frac{\partial}{\partial x} \cdot U = 0 \tag{6.59}$$

と書き換えて、質量保存則

$$\frac{d}{dt} N + N \frac{\partial}{\partial x} \cdot U = 0 \tag{6.60}$$

を用いると、

$$\frac{dP}{dt} - \frac{\gamma}{N} P \frac{d}{dt} N = 0 \tag{6.61}$$

となる。両辺を  $P$  で割って、時間で積分すると、

$$\int \frac{1}{P} dP - \gamma \int \frac{1}{N} dN = 0 \tag{6.62}$$

$$\log P - \gamma \log N = C_0 \tag{6.63}$$

$$\log P - \log N^\gamma = C_0 \tag{6.64}$$

となる。ここで、 $C_0$  は積分定数である。対数から出すと、

$$\log \frac{P}{N^\gamma} = C_0 \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{N^\gamma} &= \exp(C_0) \\ &= C \end{aligned} \quad (6.66)$$

となり、断熱変化の式が求まる。ここで、 $C = \exp(C_0)$  は定数とした。プラズマ分布関数を Maxwell 分布として、2次のモーメントをとって得られるエネルギー保存則より、断熱変化の式が得られることがわかった。

## 付録.7 磁気流体の質量保存則

電子とイオンの式. (6.29) を足し合わせると

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_e N_e) + \frac{\partial}{\partial t} (m_i N_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_i N_i \mathbf{U}_i) = 0 \quad (6.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_e N_e + m_i N_i}{m_e + m_i} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{m_e N_e + m_i N_i}{m_e + m_i} \frac{m_e N_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i}{m_e N_e + m_i N_i} \right) = 0 \quad (6.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (N \mathbf{U}) = 0 \quad (6.69)$$

となる。ここで、 $N = (m_e N_e + m_i N_i) / (m_e + m_i)$ ,  $m = m_e + m_i$ ,  $\mathbf{U} = (m_i N_i \mathbf{U}_i + m_e N_e \mathbf{U}_e) / (m_e N_e + m_i N_i)$  である。

## 付録.8 磁気流体の運動量保存則

電子とイオンの式. (6.37) をそれぞれ足し合わせると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (m_e N_e \mathbf{U}_e) + \frac{\partial}{\partial t} (m_i N_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P_e - q_e N_e (\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P_i - q_i N_i (\mathbf{E} + \mathbf{U}_i \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (m_e N_e \mathbf{U}_e) + \frac{\partial}{\partial t} (m_i N_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - q_e N_e (\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}) - q_i N_i (\mathbf{E} + \mathbf{U}_i \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.71)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (m_e N_e \mathbf{U}_e) + \frac{\partial}{\partial t} (m_i N_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - \rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_e N_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - \rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (m_e + m_i) \frac{m_e N_e + m_i N_i}{m_e + m_i} \frac{m_e N_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i}{m_e N_e + m_i N_i} \right] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - \rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m N \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - \rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6.75)$$

となる。ここで、 $P = P_i + P_e$ ,  $\rho = q_i N_i - q_e N_e$ ,  $\mathbf{J} = q_i N_i \mathbf{U}_i - q_e N_e \mathbf{U}_e$  であることを用いた。 $N_i \sim N_e$  かつ  $m_e/m_i$  が十分に小さい場合

$$m = m_i \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \sim m_i \quad (6.76)$$

$$N \sim \frac{N_i \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right)}{1 + \frac{m_e}{m_i}} \sim N_i \quad (6.77)$$

$$\mathbf{U} \sim \frac{\mathbf{U}_i + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{U}_e}{1 + \frac{m_e}{m_i}} \sim \mathbf{U}_i \quad (6.78)$$

となるため、左辺第二項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e + m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[ m_i N_i \left( \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_i N_i \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) \end{aligned} \quad (6.79)$$

となる。よって、磁気流体方程式における運動量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} (m N \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m N \mathbf{U} \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P - \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (6.80)$$

である。ここで、 $\rho \sim 0$  であるとした。

磁気流体方程式は保存型で記述されることが多い。本研究においても、簡単化のために磁気流体方程式における運動量保存則を保存型に書き換える。変位電場を無視した Ampère の法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.81)$$

を用いると、式 (6.80) の左辺第四項は

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \\ \frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} B_y \left( \frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) - B_z \left( \frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \right) \\ B_z \left( \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \right) - B_x \left( \frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right) \\ B_x \left( \frac{\partial}{\partial z} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_z \right) - B_y \left( \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y \right) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_x) + B_x \frac{\partial}{\partial y} B_y + B_x \frac{\partial}{\partial z} B_z \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_y) + B_y \frac{\partial}{\partial x} B_x + B_y \frac{\partial}{\partial z} B_z \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_y^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (B_z B_y) + B_z \frac{\partial}{\partial x} B_x + B_z \frac{\partial}{\partial y} B_y \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_x) + \nabla \cdot \mathbf{B} - B_x \frac{\partial}{\partial x} B_x \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_y) + \nabla \cdot \mathbf{B} - B_y \frac{\partial}{\partial y} B_y \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_y^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (B_z B_y) + \nabla \cdot \mathbf{B} - B_z \frac{\partial}{\partial z} B_z \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_x^2 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_y^2 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_y^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (B_z B_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_z^2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial x} B_x^2 - \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_x) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial y} B_y^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) - \frac{\partial}{\partial z} (B_z B_y) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial z} B_z^2 - \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (B_z B_y) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} \right) \tag{6.82}
\end{aligned}$$

となる。ここで、磁場の Gauss の法則 ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) を用いた。よって、保存型を用いた磁気流体の運動量保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} (mNU) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (mNUU) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \mathbf{I} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}\mathbf{B} \right) = 0 \tag{6.83}$$

となる。

## 付録.9 Ohm の法則と誘導方程式

二流体方程式における電子とイオンの運動量保存則はそれぞれ

$$m_e \frac{\partial}{\partial t} (m_i N_i U_i) + m_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_i N_i U_i U_i) + m_e \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P_i - m_e q_i N_i (\mathbf{E} + \mathbf{U}_i \times \mathbf{B}) = 0, \tag{6.84}$$

$$m_i \frac{\partial}{\partial t} (m_e N_e U_e) + m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (m_e N_e U_e U_e) + m_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P_e - m_i q_e N_e (\mathbf{E} + \mathbf{U}_e \times \mathbf{B}) = 0 \tag{6.85}$$

とできる。それぞれを足し合わせると

$$m_e m_i \frac{\partial}{\partial t} (N_i U_i - N_e U_e) + m_e m_i \frac{\partial}{\partial x} \cdot (N_i U_i U_i - N_e U_e U_e) \\ + m_e \frac{\partial}{\partial x} P_i + m_i \frac{\partial}{\partial x} P_e - m_e q_i N_i \mathbf{E} - m_e q_i N_i U_i \times \mathbf{B} - m_i q_e N_e \mathbf{E} - m_i q_e N_e U_e \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.86)$$

$$m_e \frac{\partial}{\partial t} (N_i U_i - N_e U_e) + m_e \frac{\partial}{\partial x} \cdot (N_i U_i U_i - N_e U_e U_e) \\ + \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial}{\partial x} P_i + \frac{\partial}{\partial x} P_e - \frac{m_e}{m_i} q_i N_i \mathbf{E} - \frac{m_e}{m_i} q_i N_i U_i \times \mathbf{B} - q_e N_e \mathbf{E} - q_e N_e U_e \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.87)$$

$$\frac{m_e}{e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + m_e \frac{\partial}{\partial x} \cdot (N_i U_i U_i - N_e U_e U_e) \\ + \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial}{\partial x} P_i + \frac{\partial}{\partial x} P_e - \frac{m_e}{m_i} q_i N_i \mathbf{E} - \frac{m_e}{m_i} q_i N_i U_i \times \mathbf{B} - q_e N_e \mathbf{E} - q_e N_e U_e \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.88)$$

となる。ここで  $N_i \sim N_e$  かつ  $m_e/m_i$  が十分に小さい場合、式. (6.76), 式. (6.77), 式. (6.78) と

$$\mathbf{J} = q_i N_i U_i + q_e N_e U_e \sim e N U - e N U_e \quad (6.89)$$

が成り立つことから、

$$\frac{m_e}{e} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + m_e \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ N U U - N \left( U - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \left( U - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} P_e + e N \mathbf{E} + e N \left( U - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.90)$$

となる。左辺を電場を用いて書き換えると

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = -\frac{m_e}{e^2 N} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} - \frac{m_e}{eN} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left[ N U U - N \left( U - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \left( U - \frac{\mathbf{J}}{eN} \right) \right] - \frac{1}{eN} \frac{\partial}{\partial x} P_e + \frac{\mathbf{J}}{eN} \times \mathbf{B} \quad (6.91)$$

となるため、一般化 Ohm の法則が導出できた。ここで、理想流体の場合

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.92)$$

が成立する。理想流体の Ohm の法則を用いれば、Faraday の法則より誘導方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \\ = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (6.93)$$

が導出できる。

## 付録.10 磁気流体のエネルギー保存則

磁気流体のエネルギー保存則は式. (6.80) に  $\mathbf{U} \cdot$  を取ることで導出できる。すなわち、

$$\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (m N U) + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (m N U U) + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial x} P - \mathbf{U} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (6.94)$$

とする。左辺第一項

$$\begin{aligned}
U \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mNU) &= \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) - NU \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) - NU \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial t} (mN) + \frac{1}{2} N \frac{\partial}{\partial t} (mU \cdot U) - NU \cdot \frac{\partial}{\partial t} (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial t} (mN)
\end{aligned} \tag{6.95}$$

と、左辺第三項

$$\begin{aligned}
U \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNUU) &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) - NUU \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) - NUU \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU) + \frac{1}{2} NU \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mUU) - NUU \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mU) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU)
\end{aligned} \tag{6.96}$$

を式変形すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial t} (mN) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + \frac{1}{2} U \cdot U \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU) \\
&+ U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P - U \cdot (J \times B) = 0
\end{aligned} \tag{6.97}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mNU \cdot U) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \cdot (mNU \cdot UU) + U \cdot \frac{\partial}{\partial x} P - U \cdot (J \times B) = 0 \tag{6.98}$$

となる。左辺第四項は

$$\begin{aligned}
U \cdot (J \times B) &= J \cdot (B \times U) \\
&= -J \cdot (U \times B)
\end{aligned} \tag{6.99}$$

となる。変位電場を無視した Ampère の法則

$$\nabla \times B = \mu_0 J \tag{6.100}$$

を用いると

$$U \cdot (J \times B) = -\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \cdot (U \times B) \tag{6.101}$$

となる。ここで

$$\nabla \cdot [(U \times B) \times B] = B \cdot [\nabla \times (U \times B)] - (U \times B) \cdot (\nabla \times B) \tag{6.102}$$

となるため

$$\begin{aligned}
U \cdot (J \times B) &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [(U \times B) \times B] - \frac{1}{\mu_0} B \cdot [\nabla \times (U \times B)] \\
&= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [(U \times B) \times B] - \frac{1}{\mu_0} B \cdot \frac{\partial}{\partial t} B \\
&= \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [(U \times B) \times B] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)
\end{aligned} \tag{6.103}$$

となる。式変形の途中で Faraday の法則を用いた。

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B})] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{U} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}) \mathbf{B}] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \\
&= -\nabla \cdot \left[ \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{U} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)
\end{aligned} \tag{6.104}$$

を用いると磁気流体のエネルギー保存則は

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}\mathbf{U}) + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \nabla \cdot \left[ \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{U} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right] = 0 \tag{6.105}$$

となる。断熱変化を仮定する場合、圧力の発展方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + \gamma P \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{U} = 0 \tag{6.106}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{1}{\gamma-1} \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P + P \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathbf{U} \right) = 0 \tag{6.107}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} P \right) + P \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathbf{U} \right) - \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P = 0 \tag{6.108}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} P \mathbf{U} \right) - \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P = 0 \tag{6.109}$$

と書き換えられるため

$$\mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} P = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} P \mathbf{U} \right) \tag{6.110}$$

となる。よって、磁気流体のエネルギー保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\gamma-1} P \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left( \frac{1}{2} mN\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} + \frac{\gamma}{\gamma-1} P \mathbf{U} + \frac{B^2}{\mu_0} \mathbf{U} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} \right) = 0 \tag{6.111}$$

となる。

## 付録.11 磁気流体方程式におけるジャンプ条件の導出

磁気流体方程式における不連続をまとめる。不連続の導出には磁気流体方程式を用いるが、多次元での導出は困難であるため、方程式を1次元にして導出を行う。ここで、不連続面の法線方



向を  $x$  軸とした。1次元の磁気流体方程式は、

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(NU_x) = 0 \quad (6.112)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNU_x) + \frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_x^2) \quad (6.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNU_y) + \frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_y) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_y) \quad (6.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mNU_z) + \frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_z) = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_z) \quad (6.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_x = 0 \quad (6.116)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_y = -\frac{\partial}{\partial x}(U_xB_y - U_yB_x) \quad (6.117)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B_z = \frac{\partial}{\partial x}(U_zB_x - U_xB_z) \quad (6.118)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x = 0 \quad (6.119)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}mNU \cdot U + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\gamma-1}P\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}mNU \cdot UU_x + \frac{\gamma}{\gamma-1}PU_x + \frac{B^2}{\mu_0}U_x - \frac{1}{\mu_0}U \cdot BB_x\right) \quad (6.120)$$

である。不連続面が定常であるとする、時間微分の項は消える ( $\partial/\partial t = 0$ )。このため、方程式のセットは

$$\frac{\partial}{\partial x}(NU_x) = 0 \quad (6.121)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B_x^2}{\mu_0}\right) = 0 \quad (6.122)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_y) - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_y) = 0 \quad (6.123)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_z) - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_z) = 0 \quad (6.124)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(U_xB_y - U_yB_x) = 0 \quad (6.125)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(U_zB_x - U_xB_z) = 0 \quad (6.126)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x = 0 \quad (6.127)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}mNU \cdot UU_x + \frac{\gamma}{\gamma-1}PU_x + \frac{B^2}{\mu_0}U_x - \frac{1}{\mu_0}U \cdot BB_x\right) = 0 \quad (6.128)$$

となる。

ここで、 $x$  方向は法線方向である。バルク速度と磁場の接線成分をそれぞれ  $U_t$  と  $B_t$  と定義す

ると、方程式のセットは

$$\frac{\partial}{\partial x}(NU_x) = 0 \quad (6.129)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_x) + \frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B_x^2}{\mu_0}\right) = 0 \quad (6.130)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(mNU_xU_t) - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}(B_xB_t) = 0 \quad (6.131)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(U_xB_t - U_tB_x) = 0 \quad (6.132)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_x = 0 \quad (6.133)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}mNU \cdot UU_x + \frac{\gamma}{\gamma-1}PU_x + \frac{1}{\mu_0}U_xB_t \cdot B_t - \frac{1}{\mu_0}U_t \cdot B_tB_x\right) = 0 \quad (6.134)$$

となる。空間で積分すると方程式のセットは

$$[NU_x]_1^2 = 0 \quad (6.135)$$

$$\left[mNU_xU_x + P + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B_x^2}{\mu_0}\right]_1^2 = 0 \quad (6.136)$$

$$\left[mNU_xU_t - \frac{1}{\mu_0}B_xB_t\right]_1^2 = 0 \quad (6.137)$$

$$[U_tB_x - U_xB_t]_1^2 = 0 \quad (6.138)$$

$$[B_x]_1^2 = 0 \quad (6.139)$$

$$\left[\frac{1}{2}mNU \cdot UU_x + \frac{\gamma}{\gamma-1}PU_x + \frac{1}{\mu_0}U_xB_t \cdot B_t - \frac{1}{\mu_0}U_t \cdot B_tB_x\right]_1^2 = 0 \quad (6.140)$$

となる。マスフローと比体積をそれぞれ  $j = mNU_x$  と  $V = 1/(mN)$  すると、

$$[j]_1^2 = 0 \quad (6.141)$$

$$\left[j^2V + P + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B_x^2}{\mu_0}\right]_1^2 = 0 \quad (6.142)$$

$$\left[jU_t - \frac{1}{\mu_0}B_xB_t\right]_1^2 = 0 \quad (6.143)$$

$$[U_tB_x - jVB_t]_1^2 = 0 \quad (6.144)$$

$$[B_x]_1^2 = 0 \quad (6.145)$$

$$\left[\frac{1}{2}j^3V^2 + \frac{1}{2}jU_t \cdot U_t + j\frac{\gamma}{\gamma-1}PV + \frac{1}{\mu_0}jVB_t \cdot B_t - \frac{1}{\mu_0}U_t \cdot B_tB_x\right]_1^2 = 0 \quad (6.146)$$

となる。

$$[j]_1^2 = 0, \quad (6.147)$$

$$[B_x]_1^2 = 0 \quad (6.148)$$

であるから

$$j^2 [V]_1^2 + \left[ P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]_1^2 = 0 \quad (6.149)$$

$$j [U_t]_1^2 - \frac{B_x}{\mu_0} [B_t]_1^2 = 0 \quad (6.150)$$

$$B_x [U_t]_1^2 - j [B_t V]_1^2 = 0 \quad (6.151)$$

$$\frac{1}{2} j^3 [V^2]_1^2 + \frac{1}{2} j [U_t \cdot U_t]_1^2 + j \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + j \frac{1}{\mu_0} [V B_t \cdot B_t]_1^2 - \frac{B_x}{\mu_0} [U_t \cdot B_t]_1^2 = 0 \quad (6.152)$$

となる。任意の物理量  $q, r$  に対して

$$\langle q \rangle_1^2 = \frac{1}{2} (q_2 + q_1) \quad (6.153)$$

を満たすなら

$$[qr]_1^2 = \langle q \rangle_1^2 [r]_1^2 + \langle r \rangle_1^2 [q]_1^2 \quad (6.154)$$

を満たすため、式 (6.152) は

$$\frac{1}{2} j^3 [V^2]_1^2 + \frac{1}{2} j [U_t \cdot U_t]_1^2 + j \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + j \frac{1}{\mu_0} [V B_t \cdot B_t]_1^2 - \frac{B_x}{\mu_0} \left( [U_t]_1^2 \cdot \langle B_t \rangle_1^2 + [B_t]_1^2 \cdot \langle U_t \rangle_1^2 \right) = 0 \quad (6.155)$$

となる。

$$j [U_t]_1^2 - \frac{B_x}{\mu_0} [B_t]_1^2 = 0 \quad (6.156)$$

$$B_x [U_t]_1^2 - j [B_t V]_1^2 = 0 \quad (6.157)$$

より、式 (6.155) は

$$\frac{1}{2} j^3 [V^2]_1^2 + \frac{1}{2} j [U_t \cdot U_t]_1^2 + j \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + j \frac{1}{\mu_0} [V B_t \cdot B_t]_1^2 - \frac{j}{\mu_0} [V B_t]_1^2 \cdot \langle B_t \rangle_1^2 - j [U_t]_1^2 \cdot \langle U_t \rangle_1^2 = 0 \quad (6.158)$$

$$\frac{1}{2} j^3 [V^2]_1^2 + j \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{j}{\mu_0} \langle V B_t \rangle_1^2 \cdot [B_t]_1^2 = 0 \quad (6.159)$$

$$j \left( \frac{1}{2} j^2 [V^2]_1^2 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{\mu_0} \langle V B_t \rangle_1^2 \cdot [B_t]_1^2 \right) = 0 \quad (6.160)$$

となる。

$$j^2 [V]_1^2 + \left[ P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]_1^2 = 0 \quad (6.161)$$

より、式 (6.160) は

$$j \left( - \left[ P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]_1^2 \langle V \rangle_1^2 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{\mu_0} \langle V \mathbf{B}_t \rangle_1^2 \cdot [\mathbf{B}_t]_1^2 \right) = 0 \quad (6.162)$$

となる。

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\mu_0} [\mathbf{B}_t]_1^2 \langle V \rangle_1^2 + \frac{1}{\mu_0} \langle V \mathbf{B}_t \rangle_1 \cdot [\mathbf{B}_t]_1^2 &= \frac{1}{2\mu_0} (V_2 B_{y2} + V_1 B_{y1}) (B_{y2} - B_{y1}) + \frac{1}{2\mu_0} (V_2 B_{z2} + V_1 B_{z1}) (B_{z2} - B_{z1}) \\ &\quad - \frac{1}{4\mu_0} (B_{y2} B_{y2} - B_{y1} B_{y1}) (V_2 + V_1) - \frac{1}{4\mu_0} (B_{z2} B_{z2} - B_{z1} B_{z1}) (V_2 + V_1) \\ &= \frac{1}{4\mu_0} V_2 B_{y2} B_{y2} - \frac{1}{4\mu_0} V_1 B_{y2} B_{y2} + \frac{1}{4\mu_0} V_2 B_{y1} B_{y1} - \frac{1}{4\mu_0} V_1 B_{y1} B_{y1} \\ &\quad + \frac{1}{4\mu_0} V_2 B_{z2} B_{z2} - \frac{1}{4\mu_0} V_1 B_{z2} B_{z2} + \frac{1}{4\mu_0} V_2 B_{z1} B_{z1} - \frac{1}{4\mu_0} V_1 B_{z1} B_{z1} \\ &\quad - \frac{2}{4\mu_0} V_2 B_{y2} B_{y1} + \frac{2}{4\mu_0} V_1 B_{y2} B_{y1} - \frac{2}{4\mu_0} V_2 B_{z2} B_{z1} + \frac{2}{4\mu_0} V_1 B_{z2} B_{z1} \\ &= \frac{1}{4\mu_0} \left( V_2 (B_{y2} - B_{y1})^2 - V_1 (B_{y2} - B_{y1})^2 + V_2 (B_{z2} - B_{z1})^2 - V_1 (B_{z2} - B_{z1})^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\mu_0} [V]_1^2 [\mathbf{B}_t]_1^2 \cdot [\mathbf{B}_t]_1^2 \end{aligned} \quad (6.163)$$

となることに注意すると、式 (6.162) は

$$j \left( - [P]_1^2 \langle V \rangle_1^2 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{4\mu_0} [V]_1^2 [\mathbf{B}_t]_1^2 \cdot [\mathbf{B}_t]_1^2 \right) = 0 \quad (6.164)$$

となる。また、

$$- [P]_1^2 \langle V \rangle_1^2 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} PV \right]_1^2 = [V]_1^2 \langle P \rangle_1^2 + \left[ \frac{1}{\gamma-1} PV \right]_1^2 \quad (6.165)$$

であるから、式 (6.164) は

$$j \left( [V]_1^2 \langle P \rangle_1^2 + \left[ \frac{1}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{4\mu_0} [V]_1^2 [\mathbf{B}_t]_1^2 \cdot [\mathbf{B}_t]_1^2 \right) = 0 \quad (6.166)$$

となる。

これまで導出した式をまとめると

$$[j]_1^2 = 0 \quad (6.167)$$

$$j^2 [V]_1^2 + \left[ P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]_1^2 = 0 \quad (6.168)$$

$$j [\mathbf{U}_t]_1^2 - \frac{B_x}{\mu_0} [\mathbf{B}_t]_1^2 = 0 \quad (6.169)$$

$$B_x [\mathbf{U}_t]_1^2 - j [\mathbf{B}_t V]_1^2 = 0 \quad (6.170)$$

$$j \left( [V]_1^2 \langle P \rangle_1^2 + \left[ \frac{1}{\gamma-1} PV \right]_1^2 + \frac{1}{4\mu_0} [V]_1^2 [\mathbf{B}_t]_1^2 \cdot [\mathbf{B}_t]_1^2 \right) = 0 \quad (6.171)$$

$$[B_x]_1^2 = 0 \quad (6.172)$$

となり、ジャンプ条件が導出できた。磁気流体中の不連続は、マスフローである  $j$  が有限の値を持つかどうかで分類可能である。

## 付録.12 ジャンプ条件による接触不連続の導出

マスフローが存在しない場合 ( $j = 0$ ) について考える。さらに、 $[V]_1^2 \neq 0, B_x \neq 0$  の条件を加えることで接触不連続の条件が導出できる。定常的な流れがある場合、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.173)$$

となるため

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.174)$$

が成立する。ここで、 $\lambda$  は不連続面の速度である。よって、式 (2.31) は

$$-\lambda \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (NU_x) = 0 \quad (6.175)$$

となるため

$$-\lambda [N]_1^2 + [NU_x]_1^2 = 0 \quad (6.176)$$

$$[NU'_x]_1^2 = 0 \quad (6.177)$$

となる。ここで、 $U'_x = U_x - \lambda$  である。

$$j' = NU'_x = \text{const} \quad (6.178)$$

であるから、

$$\begin{aligned} j' [V]_1^2 &= NU'_x [V]_1^2 \\ &= [U'_x]_1^2 \\ &= [U_x]_1^2 \end{aligned} \quad (6.179)$$

となる。ここで、 $j'$  は定常的な流れがある場合のマスフローである。 $j' = 0$  であるなら

$$[U_x]_1^2 = 0 \quad (6.180)$$

となる。同様に、 $j' = 0$  であるなら

$$\begin{aligned} j' &= \frac{1}{V} (U_x - \lambda) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.181)$$

となるため、

$$U_x = \lambda \quad (6.182)$$

となり、不連続の静止系における速度と不連続の速度は等しい。マスフローなしの条件 ( $j = 0$ ) より、式 (2.42) と式 (2.43) は

$$[B_t]_1^2 = 0 \quad (6.183)$$

$$[U_t]_1^2 = 0 \quad (6.184)$$

となる。

$$j = 0 \quad (6.185)$$

$$[B_x]_1^2 = 0 \quad (6.186)$$

$$[B_t]_1^2 = 0 \quad (6.187)$$

を用いると式 (2.41) は

$$[P]_1^2 = 0 \quad (6.188)$$

となる。

### 付録.13 静電系における一般化 Ohm の法則

静電系における一般化 Ohm の法則を導出する。Vlasov 方程式の一次のモーメントは

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} v f_s dv &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_s dv - \frac{q_s}{m_s} E \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{\partial f_s}{\partial v} dv \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_s dv - \frac{q_s}{m_s} E \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v} (v f_s) dv - \int_{-\infty}^{\infty} f_s dv \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_s dv + \frac{q_s}{m_s} E \int_{-\infty}^{\infty} f_s dv \end{aligned} \quad (6.189)$$

となる。ここで、Amano の方法と同様に  $f_s$  は有限のエネルギーを持つ分布関数であるとした [20]。イオンの項から電子の項を引くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} v f_i dv - \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} v f_e dv &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_i dv + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_e dv \\ &\quad + \frac{q_i}{m_i} E \int_{-\infty}^{\infty} f_i dv - \frac{q_e}{m_e} E \int_{-\infty}^{\infty} f_e dv \end{aligned} \quad (6.190)$$

となる両辺に素電荷  $e$  をかけて、電流密度  $J$  は

$$J = q_i \int_{-\infty}^{\infty} v f_i dv + q_e \int_{-\infty}^{\infty} v f_e dv \quad (6.191)$$

として定義されるので、その時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} J = -q_i \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_i dv - q_e \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_e dv + E \frac{q_i^2}{m_i} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_i dv + E \frac{q_e^2}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} f_e dv \quad (6.192)$$

となる。0次および2次のモーメントは

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s dv = N_s \quad (6.193)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_s dv = N_s U_s^2 + \frac{1}{m_s} P_s \quad (6.194)$$

となる。よって、一般化 Ohm の法則は

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_i + \frac{q_e^2}{m_e} N_e \right) E = \frac{\partial}{\partial t} J + q_i \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i U_i^2 + \frac{1}{m_i} P_i \right) + q_e \frac{\partial}{\partial x} \left( N_e U_e^2 + \frac{1}{m_e} P_e \right) \quad (6.195)$$

と記述される。hybrid シミュレーションにおいて電子は瞬時に中性  $N_i = N_e \rightarrow \rho = \partial\rho/\partial t = 0$  となる流体として扱われる。すなわち、電荷保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (6.196)$$

は

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (6.197)$$

となる。空間で積分すると

$$J = J_0 \quad (6.198)$$

となる。ここで、 $J_0$  は外部の電流密度である。 $J_0$  は外部の項であるため、プラズマ分布関数からは決定しない。本研究において、 $J_0 = 0$  とした。式 (6.198) を時間で微分すると

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.199)$$

となる。最終的に、この式を一般化 Ohm の法則に代入すると

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_i + \frac{q_e^2}{m_e} N_e \right) E = q_i \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i U_i^2 + \frac{1}{m_i} P_i \right) + q_e \frac{\partial}{\partial x} \left( N_e U_e^2 + \frac{1}{m_e} P_e \right) \quad (6.200)$$

となる。ここで、電場には電子の慣性の効果が含まれていることに注意する。簡単化のために両辺に  $m_e$  をかけると、

$$\left( m_e \frac{q_i^2}{m_i} N_i + q_e^2 N_e \right) E = m_e q_i \frac{\partial}{\partial x} N_i U_i^2 + m_e \frac{q_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial x} P_i + m_e q_e \frac{\partial}{\partial x} N_e U_e^2 + q_e \frac{\partial}{\partial x} P_e \quad (6.201)$$

となる。電子の慣性を無視した場合、電場は

$$q_e N_e E = \frac{\partial}{\partial x} P_e \quad (6.202)$$

となり、磁場の効果を含まない場合の通常の hybrid シミュレーションで用いられる Ohm の法則に帰着する。

## 付録.14 hybrid コードに用いられてきた一般化 Ohm の法則

本研究で用いた一般化 Ohm の法則と先行研究における hybrid コードの式の違いについて説明する。電流密度は

$$\mathbf{J} = \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \rho_s \mathbf{U}_s + \sum_{s=kinetic} q_s \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} \quad (6.203)$$

として求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \rho_s \mathbf{U}_s + \sum_{s=kinetic} q_s \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} \right) \\ &= \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s \mathbf{U}_s + \sum_{s=kinetic} q_s \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.204)$$

である。右辺の第一項は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s \mathbf{U}_s + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s + P_s \mathbf{I}) = \frac{q_s}{m_s} \rho_s (\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \quad (6.205)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s \mathbf{U}_s = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s + P_s \mathbf{I}) + \frac{q_s}{m_s} \rho_s (\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \quad (6.206)$$

として計算できる。また、右辺の第二項は

$$\frac{\partial}{\partial t} f_s + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_s + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_s = 0 \quad (6.207)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f_s d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{v} \mathbf{E} + \mathbf{v} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B})) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_s d\mathbf{v} = 0 \quad (6.208)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} \mathbf{v} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_s d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} \mathbf{v} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_s d\mathbf{v} = 0 \quad (6.209)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{v} f_s) d\mathbf{v} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} f_s d\mathbf{v} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\mathbf{v} f_s) d\mathbf{v} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} f_s d\mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (6.210)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} - \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} - \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} = 0 \quad (6.211)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \frac{q_s}{m_s} \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} \quad (6.212)$$

として計算できる。よって、電流密度の時間変化は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = & - \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s + P_s \mathbf{I}) + \sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s (\mathbf{E} + \mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \\ & - \sum_{s=kinetic} q_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} \end{aligned} \quad (6.213)$$

として計算できる。また、Ampère の法則と Faraday の法則は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (6.214)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.215)$$

である。ここで、 $\mathbf{B}$ ,  $\mu_0$  はそれぞれ磁場と透磁率である。これらの式を用いることで、電流密度の時間変化は、

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.216)$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \quad (6.217)$$



とできる。式 (6.213) を用いると、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = & - \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s + P_s \mathbf{I}) + \sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s \mathbf{E} + \sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s \mathbf{U}_s \times \mathbf{B} \\
& - \sum_{s=kinetic} q_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{6.218}$$

とできる。すなわち、一般化 Ohm の法則は

$$\begin{aligned}
\sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s \mathbf{E} + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = & \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s + P_s \mathbf{I}) \\
+ \sum_{s=kinetic} q_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d\mathbf{v} - \sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s \mathbf{U}_s \times \mathbf{B} - \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} (\mathbf{U}_s \times \mathbf{B}) \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{6.219}$$

である。ここまでの導出は Amano によって行われた。導出した一般化 Ohm の法則を本研究で用いた静電系における一般化 Ohm の法則へ変形することを考える。静電系であることと、1D-1V であることから式 (6.213) は

$$\frac{\partial J_x}{\partial t} = - \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s U_{s,x}^2 + P_s) - \sum_{s=kinetic} q_s \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_s d\mathbf{v} + \sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s E_x + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} E_x \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} \tag{6.220}$$

となる。ここで、 $x$  成分のみを取り出した。静電系であることから、磁場の時間変化はないため、式 (6.216) は

$$\frac{\partial J_x}{\partial t} = 0 \tag{6.221}$$

となる。よって、式 (6.220) は

$$\sum_{s=i,e} \frac{q_s^2}{m_s^2} \rho_s E_x + \sum_{s=kinetic} \frac{q_s^2}{m_s} E_x \int_{-\infty}^{\infty} f_s d\mathbf{v} = \sum_{s=i,e} \frac{q_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s U_{s,x}^2 + P_s) + \sum_{s=kinetic} q_s \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f_s d\mathbf{v} \tag{6.222}$$

となり、静電系における一般化 Ohm の法則が導出できた。これは、本研究で用いた方程式と一致している。

## 付録.15 静電系における hybrid コードの分散関係

静電系における hybrid コードの分散関係の導出を行う。hybrid コードにおいてイオンは運動論方程式を用いて記述されるが、導出の簡略化のためにイオンも流体として扱う。よって、方程式は

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (N_i U_i) = 0 \quad (6.223)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i N_i U_i) + \frac{\partial}{\partial x} (m_i N_i U_i^2) + \frac{\partial P_i}{\partial x} = q_i N_i E \quad (6.224)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (P_i U_i) + (\gamma_i - 1) P_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0 \quad (6.225)$$

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_i + \frac{q_e^2}{m_e} N_e \right) E = q_i \frac{\partial}{\partial x} \left( N_i U_i^2 + \frac{1}{m_i} P_i \right) + q_e \frac{\partial}{\partial x} \left( N_e U_e^2 + \frac{1}{m_e} P_e \right) \quad (6.226)$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (P_e U_e) + (\gamma_e - 1) P_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = 0 \quad (6.227)$$

$$N_i = N_e = N \quad (6.228)$$

$$U_i = U_e = U \quad (6.229)$$

となる。ここで、

$$N_i = N_e = N \rightarrow N_0 + N_1 + \dots \quad (6.230)$$

$$U_i = U_e = U \rightarrow U_1 + \dots \quad (6.231)$$

$$E \rightarrow E_1 + \dots \quad (6.232)$$

$$P_i \rightarrow P_{i0} + P_{i1} + \dots \quad (6.233)$$

$$P_e \rightarrow P_{e0} + P_{e1} + \dots \quad (6.234)$$

として線形化すると、

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \quad (6.235)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i N_0 U_1) + \frac{\partial P_{i1}}{\partial x} = q_i N_0 E_1 \quad (6.236)$$

$$\frac{\partial P_{i1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{i0} U_1) + (\gamma_i - 1) P_{i0} \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \quad (6.237)$$

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_0 + \frac{q_e^2}{m_e} N_0 \right) E_1 = \frac{q_i}{m_i} \frac{\partial P_{i1}}{\partial x} + \frac{q_e}{m_e} \frac{\partial P_{e1}}{\partial x} \quad (6.238)$$

$$\frac{\partial P_{e1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (P_{e0} U_1) + (\gamma_e - 1) P_{e0} \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0 \quad (6.239)$$

となる。

$$N_1 = \hat{N} \exp(ikx - i\omega t) \quad (6.240)$$

$$U_1 = \hat{U} \exp(ikx - i\omega t) \quad (6.241)$$

$$P_{i1} = \hat{P}_i \exp(ikx - i\omega t) \quad (6.242)$$

$$P_{e1} = \hat{P}_e \exp(ikx - i\omega t) \quad (6.243)$$

とすると、

$$-i\omega N_1 + N_0 ik U_1 = 0 \quad (6.244)$$

$$-i\omega m_i N_0 U_1 + ik P_{i1} = q_i N_0 E_1 \quad (6.245)$$

$$-i\omega P_{i1} = -P_{i0} ik U_1 - (\gamma_i - 1) P_{i0} ik U_1 \quad (6.246)$$

$$-i\omega P_{e1} = -P_{e0} ik U_1 - (\gamma_e - 1) P_{e0} ik U_1 \quad (6.247)$$

$$\left( \frac{q_i^2}{m_i} N_0 + \frac{q_e^2}{m_e} N_0 \right) E_1 = ik \frac{q_i}{m_i} P_{i1} + ik \frac{q_e}{m_e} P_{e1} \quad (6.248)$$

となる。式 (6.248) を変形すると

$$\left( \frac{q_i}{m_i} - \frac{q_e}{m_e} \right) q_i N_0 E_1 = ik \frac{q_i}{m_i} P_{i1} + ik \frac{q_e}{m_e} P_{e1} \quad (6.249)$$

$$q_i N_0 E_1 = \frac{1}{\left( \frac{q_i}{m_i} - \frac{q_e}{m_e} \right)} \left( ik \frac{q_i}{m_i} P_{i1} + ik \frac{q_e}{m_e} P_{e1} \right) \quad (6.250)$$

$$= \frac{1}{\left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right)} \left( ik \frac{1}{m_i} P_{i1} - ik \frac{1}{m_e} P_{e1} \right) \quad (6.251)$$

$$= \frac{m_i m_e}{m_e + m_i} \left( ik \frac{1}{m_i} P_{i1} - ik \frac{1}{m_e} P_{e1} \right) \quad (6.252)$$

となる。式 (6.252) を用いると、式 (6.245) は、

$$-i\omega m_i N_0 U_1 + ik P_{i1} = \frac{m_i m_e}{m_e + m_i} \left( ik \frac{1}{m_i} P_{i1} - ik \frac{1}{m_e} P_{e1} \right) \quad (6.253)$$

$$-m_i N_0 U_1 + \frac{k}{\omega} P_{i1} = \frac{m_e}{m_e + m_i} \frac{k}{\omega} P_{i1} - \frac{m_i}{m_e + m_i} \frac{k}{\omega} P_{e1} \quad (6.254)$$

$$-m_i N_0 U_1 = -\frac{m_i}{m_e + m_i} \frac{k}{\omega} P_{i1} - \frac{m_i}{m_e + m_i} \frac{k}{\omega} P_{e1} \quad (6.255)$$

$$N_0 U_1 = \frac{1}{m_e + m_i} \frac{k}{\omega} (P_{i1} + P_{e1}) \quad (6.256)$$

となる。式 (6.246) と式 (6.247) を用いると、式 (6.256) は、

$$N_0 U_1 = \frac{1}{m_e + m_i} \frac{k}{\omega} \left[ P_{e0} \frac{k}{\omega} U_1 + (\gamma_e - 1) P_{e0} \frac{k}{\omega} U_1 + P_{i0} \frac{k}{\omega} U_1 + (\gamma_i - 1) P_{i0} \frac{k}{\omega} U_1 \right] \quad (6.257)$$

$$N_0 = \frac{1}{m_e + m_i} \frac{k^2}{\omega^2} (\gamma_e P_{e0} + \gamma_i P_{i0}) \quad (6.258)$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{m_i + m_e} \frac{\gamma_e P_{e0} + \gamma_i P_{i0}}{N_0} \quad (6.259)$$

となる。 $P = NT$  であるとする、

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma_e T_{e0} + \gamma_i T_{i0}}{m_i + m_e} \quad (6.260)$$

となり、分散関係が導出される。

表 6.1: 物理量と変数

シンボル	名前	備考
$t$	時間	
$\mathbf{x} = (x, y, z)$	空間	
$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$	速度空間	
$\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$	バルク速度	$\mathbf{U} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v} f d\mathbf{v}}{\int_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v}}$
$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$	電場	
$\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$	磁場	
$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$	電流密度	$\mathbf{J} = qN\mathbf{U}$
$f$	プラズマ分布関数	$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$
$c$	光速	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 + \mu_0}}$
$\epsilon_0$	真空中の誘電率	
$\mu_0$	真空中の透磁率	
$m$	質量	
$q$	電荷	
$e$	素電荷	
$s$	粒子の種類	e:電子, i:イオン
$N$	数密度	$N = \int_{-\infty}^{\infty} f d\mathbf{v}$
$T$	温度	
$P$	圧力	$P = NT$
$\gamma$	比熱比	
$\mathbf{P}$	圧力テンソル	$\mathbf{P} = m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v}$
$\mathbf{Q}$	ヒートフラックスベクトル	$\mathbf{Q} = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{U})(\mathbf{v} - \mathbf{U}) f d\mathbf{v}$
$S$	エントロピー	
$\omega_p$	プラズマ振動数	$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$
$\omega_c$	サイクロトロン周波数	$\omega_c = \frac{q}{m} B $
$v_{th}$	熱速度	$v_{th} = \sqrt{\frac{T}{m}}$
$\lambda_D$	デバイ長さ	$\lambda_D = \frac{v_{th}}{\omega_p}$
$\phi$	静電ポテンシャル	$\mathbf{E} = -\nabla\phi$
$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$	ベクトルポテンシャル	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

## 参考文献

- [1] T. C. Tsai, L. H. Lyu, J. K. Chao, M. Q. Chen, and W. H. Tsai. A theoretical and simulation study of the contact discontinuities based on a Vlasov simulation code. *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, Vol. 114, p. A12103, 2009.
- [2] W.-C. Hsieh, J.-H. Shue, J.-K. Chao, T.-C. Tsai, Z. Nemecek, and J. Safrankova. Possible observational evidence of contact discontinuities. *Geophysics Research Letters*, Vol. 41, pp. 8228–8234, 2014.
- [3] G. Lapenta and J. U. Brackbill. Contact discontinuities in collisionless plasmas: A comparison of hybrid and kinetic simulations. *Geophysics Research Letters*, Vol. 23, pp. 1713–1716, 1996.
- [4] W. Baumjohann and R. A. Treumann. *BASIC SPACE PLASMA PHYSICS*, chapter 8, pp. 204–205. Imperial College Press, 1996.
- [5] M Brio and C.C Wu. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 75, No. 2, pp. 400 – 422, 1988.
- [6] B. H. Wu, J. K. Chao, W. H. Tsai, Y. Lin, and L. C. Lee. A hybrid simulation of contact discontinuity. *Geophysics Research Letters*, Vol. 21, pp. 2059–2062, 1994.
- [7] T Umeda, N Tsujine, and Y Nariyuki. Vlasov code simulation of contact discontinuities. *Physics of Plasmas*, Vol. 26, No. 10, p. 102107, 2019.
- [8] C. K. Birdsall and A. B. Langdon. *Plasma Physics via Computer Simulation*. McGraw-Hill, 1985.
- [9] O. Buneman. *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software*, chapter 3, pp. 67–84. Terra Scientific Publishing Company, 1993.
- [10] C. Z. Cheng and G. Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, Vol. 22, pp. 330–351, 1976.
- [11] D. Winske and N. Omid. *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software*, chapter 5, pp. 103–160. Terra Scientific Publishing Company, 1993.
- [12] B. U. Ö Sonnerup and L. J. Cahill Jr. Magnetopause structure and attitude from explorer 12 observations. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 72, No. 1, pp. 171–183, 1967.
- [13] W. Baumjohann and R. A. Treumann. *BASIC SPACE PLASMA PHYSICS*, chapter 8, pp. 209–216. Imperial College Press, 1996.
- [14] T. Haruki, N. Tsujine, S. Yonezawa, and M. Sato. Suppressed reflection of electric fields induced in a stressed x-point collapse. *Plasma and Fusion Research*, Vol. 14, pp. 3401076–3401076, 2019.

- [15] T Umeda, M Ashour-Abdalla, and D Schriver. Comparison of numerical interpolation schemes for one-dimensional electrostatic vlasov code. *Journal of Plasma Physics*, Vol. 72, No. 6, p. 1057–1060, 2006.
- [16] T Umeda. A conservative and non-oscillatory scheme for vlasov code simulations. *Earth, Planets and Space*, Vol. 60, No. 7, pp. 773–779, 2008.
- [17] T. Umeda, Y. Nariyuki, and D. Kariya. A non-oscillatory and conservative semi-lagrangian scheme with fourth-degree polynomial interpolation for solving the vlasov equation. *Computer Physics Communications*, Vol. 183, pp. 1094 – 1100, 2012.
- [18] W. Baumjohann and R. A. Treumann. *BASIC SPACE PLASMA PHYSICS*, chapter A.1, pp. 447–447. Imperial College Press, 1996.
- [19] F. Valentini, P. Trávníček, F. Califano, P. Hellinger, and A. Mangeney. A hybrid-vlasov model based on the current advance method for the simulation of collisionless magnetized plasma. *Journal of Computational Physics*, Vol. 225, pp. 753 – 770, 2007.
- [20] T. Amano. A generalized quasi-neutral fluid-particle hybrid plasma model and its application to energetic-particle-magnetohydrodynamics hybrid simulation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 366, pp. 366 – 385, 2018.
- [21] Y. Omura and H. Matsumoto. *Computer Space Plasma Physics: Simulation Techniques and Software*, chapter 2, pp. 21–65. Terra Scientific Publishing Company, 1993.

## 出版リスト

### 英語論文

1. **N. Tsujine**, T. Haruki, T. Umeda, Y. Nariyuki & M. Sato, Stability of Contact Discontinuities in Electrostatic Hybrid- and Full-Vlasov Simulations, Plasma and Fusion Research, Vol.15, 2020.
2. T. Umeda, **N. Tsujine** & Y. Nariyuki, Vlasov code simulation of contact discontinuities, Physics of Plasmas, Vol.26, 2019.
3. T. Haruki, **N. Tsujine**, S. Yonezawa & M. Sato, Suppressed Reflection of Electric Fields Induced in a Stressed X-Point Collapse, Plasma and Fusion Research, Vol.14, 2019.

### 英語ポスター

1. T. Haruki, **N. Tsujine**, S. Yonezawa & M. Sato, Boundary conditions required to suppress electric fields initially induced in the vicinity of a stressed X-point, The 27th International Toki Conference on Plasma and Fusion Research & The 13th Asia Pacific Plasma Theory Conference, Toki, November 2018 (Poster)
2. **N. Tsujine**, T. Haruki, M. Sato, Y. Nariyuki & T. Umeda, Temperature dependence of contact discontinuities in Vlasov simulations, Joint meeting of 26th International Toki Conference and 11th Asia Plasma & Fusion Association Conference, Toki, December 2017 (Poster)

### 日本語口頭

1. **N. Tsujine**, T. Haruki, T. Umeda, Y. Nariyuki & M. Sato, The condition of electron temperatures to maintain total pressure in contact discontinuities: kinetic simulations, 地球電磁気・地球惑星圏学会 第 143 回総会及び講演会 (2018 年 秋学会), 名古屋, 2018 年 11 月 (口頭)

### 日本語ポスター

1. T. Umeda, **N. Tsujine** & Y. Nariyuki, Vlasov code simulation of contact discontinuities, 地球電磁気・地球惑星圏学会 第 146 回総会及び講演会 (2019 年 秋学会), 熊本, 2019 年 10 月 (ポスター)
2. 辻根成, 梅田隆行, 成行泰裕 & 春木孝之, Parameter tuning of a 5th order conservative and non-oscillatory scheme with super Gaussian distributions, 日本地球惑星科学連合 2018 年大会, 幕張メッセ, 2018 年 5 月 (ポスター)
3. 辻根成, 春木孝之, 成行泰裕 & 梅田隆行, 接触不連続の Vlasov シミュレーション, プラズマ科学のフロンティア 2017 研究会, 土岐, 2017 年 8 月 (ポスター)
4. **N. Tsujine**, T. Haruki, M. Sato, Y. Nariyuki & T. Umeda, Parameter tuning of a 5th order Conservative and Non-oscillatory Scheme for Vlasov simulations, 地球電磁気・地球惑星圏学会 第 142 回総会及び講演会 (2017 年 秋学会), 宇治, 2017 年 10 月 (ポスター)

## その他

1. 辻根成, 5次精度の保存型無振動スキームのパラメータチューニングと Vlasov シミュレーションへの適用, 平成 30 年度名古屋大学宇宙地球環境研究所「奨励共同研究」
2. 辻根成, 不連続構造のブラソフシミュレーション, 平成 29 年度名古屋大学宇宙地球環境研究所「奨励共同研究」